

Teilprojekt

**A7**

Gebietsadaptierte Wavelets und parallele  
Multiskalenmethoden für Randintegraloperatoren



## 2.1 Teilprojekt A7

Gebietsadaptierte Wavelets und parallele Multiskalenmethoden für Randintegraloperatoren

### 2.1.1 Antragsteller

Prof. Dr. Guido Brunnett	Dr. Matthias Pester
22.12.1959	29.04.1954
Professur Graphische	bei Professur Mathematik
Datenverarbeitung und Visualisierung	in Industrie und Technik
Fakultät für Informatik	Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz	Technische Universität Chemnitz
09107 Chemnitz	09107 Chemnitz
Tel.: (0371) 531-1533	Tel.: (0371) 531-2656
Fax: (0371) 531-1801	Fax: (0371) 531-2657
brunnett@informatik.tu-chemnitz.de	m.pester@mathematik.tu-chemnitz.de

### 2.1.2 Projektbearbeiter

Dr. Marek Vanco, Fakultät für Informatik, Technische Universität Chemnitz

Dipl-Math. Ulf Kähler, Fakultät für Mathematik, Technische Universität Chemnitz

Dipl.-Math. Maharavo Randrianarivony, Fakultät für Informatik, Technische Universität Chemnitz

## 2.2 Ausgangsfragestellung / Einleitung

Eine Reihe praxisrelevanter Randwertprobleme, wie beispielsweise Außenraumprobleme der Akustik und der Elektrostatik, sowie Randwertprobleme der Elastizitätstheorie und der Strömungsmechanik, lassen sich mittels Randintegralgleichungsmethoden bzw. durch Kombination von Finite-Element- und Randintegralgleichungsmethoden vorteilhaft behandeln. Solche Randintegralmethoden führen jedoch üblicherweise auf vollbesetzte Matrizen. Die Behandlung vollbesetzter großdimensionierte Gleichungssysteme verbietet sich naturgemäß wegen des enormen Bedarfs an Speicherplatz und Rechenzeit. Moderne Ansätze wie das *Panel-Clustering-Verfahren* [HN89], die *schnelle Multipolentwicklung* [GR87], oder zu diesen verwandte Verfahren wie  *$\mathcal{H}$ -Matrizen* [HK00] oder die *Adaptive Cross Approximation* [BR03], versprechen einen Ausweg aus dieser Situation. Ein weiterer Zugang sind *Multiskalen-* oder *Waveletapproximationsmethoden* [BCR03, Sch98], welche auf der Verwendung von Multiskalenbasen oder biorthogonalen Waveletbasen zur Diskretisierung der Integralgleichungen beruhen. Die dadurch entstehenden Systemmatrizen sind quasi dünn-besetzt, d.h. sie lassen sich ohne Ver-

lust an Genauigkeit durch dünn-besetzte Matrizen ersetzen. Zudem können sie leicht mittels Diagonalskalierung vorkonditioniert werden [DKU99].

Die Aufgabenstellung dieses Teilprojektes bestand darin, Wavelet-Galerkinverfahren dahingehend weiterzuentwickeln, dass sie sich zur Lösung von Randintegralgleichungen auf komplexen Oberflächen eignen. Dabei sollten sowohl Oberflächen, die aus stückweise glatten Teilflächen bestehen, als auch polygonal approximierten Flächen betrachtet werden. In der letzteren Situation sollte die Wavelet-Konstruktion nach Tausch/White zum Einsatz kommen.

Die letzte auf ein Jahr verkürzte Projektphase des SFB393 sollte nach Empfehlung der DFG dazu genutzt werden, die laufenden Arbeiten zu einem sinnvollen Abschluss zu bringen. Unter diesem Gesichtspunkt wurden aus dem Katalog der Ziele des auf drei Jahre ausgelegten Antrages folgende Teilziele zur Bearbeitung in 2005 ausgewählt:

1. Bei der Entwicklung von Waveletverfahren für polygonal berandeter Oberflächen sollte das vorhandene auf Tausch/White-Wavelets beruhende Verfahren auf den 3D Fall übertragen werden.
2. Bei der Geometrieverarbeitung sollte das wichtige Verfahren zur Zerlegung getrimmter Flächen und die Methoden zur Umparametrisierung der Segmente über dem Einheitsquadrat weiterentwickelt werden. Außerdem sollten Möglichkeiten zur Approximation geschlossener Dreiecksnetze durch Verbände vierseitiger Flächenstücke untersucht werden.

## 2.3 Forschungsaufgaben / Methoden

### 2.3.1 Waveletverfahren für polygonal approximierten Oberflächen

Ziel dieses Bereiches des Teilprojektes A7 war es, die bereits in der Antragsperiode 2002 – 2004 erhaltenen 2D-Resultate bzgl. des Waveletverfahrens für polygonal approximierten Oberflächen auf den drei- bzw. n-dimensionalen Fall zu erweitern.

Ausgangspunkt solcher Verfahren ist die Randelementmethode, deren Systemmatrix in der klassischen Einskalenbasis i.A. vollbesetzt ist. Mit Hilfe von hierarchischen Wavelets lässt sich jedoch die Systemmatrix in der sogenannten *Standardform* aufstellen. Diese ist quasi dünnbesetzt und lässt sich mit der durch R. SCHNEIDER bereits eingehend untersuchten Matrixkompression [DPS93, DPS94, vPS96, Sch98] auf eine dünnbesetzte Matrix komprimieren. Da die polygonal approximierten Oberfläche jedoch keine auf Verfeinerung basierenden Wavelets zulässt, bedurfte es der Verwendung der auf Vergrößerung basierenden Tausch/White-Wavelets [TW03] zur Umsetzung des Verfahrens in 2D.

Letztere Multiskalenbasis sollte in dem bewilligten Zeitraum 2005 für den 3D-Fall umgesetzt werden. Desweiteren sollte ebenfalls das Verfahren zum Aufstellen der Systemmatrix für den 3D-Fall verwirklicht werden. Dabei sollte jedoch nicht nur die lose Kombination aus schnellen Summationsverfahren für die Randelementmethode und den Wavelets, wie sie für im 2D Fall Verwendung fand, eins zu eins in den dreidimensionalen Fall

überführt werden. Vielmehr sollte die spezielle rekursive Konstruktion, die sich von den Tausch/White-Wavelets auf die Systemmatrix „vererbt“ und die hierarchische Struktur der Systemmatrix berücksichtigt werden. Es sollte daher eine spezielle Anpassung der verwendeten schnellen Verfahren auf die Belange der Wavelets geben.

### 2.3.2 Vorverarbeitung der Geometriedaten

In der Projektphase 2002-2004 wurde ein Verfahren entwickelt, welches es ermöglicht, die Waveletkonstruktion von Schneider für getrimmte Flächenstücke einzusetzen. Dazu ist es notwendig, die Parametergebiete der getrimmten Flächen in konvexe Vierecke zu zerlegen und einen Diffeomorphismus zu konstruieren, der ein derartiges Viereck auf das Einheitsquadrat abbildet. Das vorgeschlagene Zerlegungsverfahren [RBS03] basierte auf dem Ansatz von [Joe95], bei dem reflexe Ecken auf Kosten von zusätzlichen Randpunkten entfernt werden. Diese zusätzlichen Randpunkte führen in der Zerlegung des Gesamtobjektes zu „hängenden Knoten“, die durch Unterteilung der Teilflächenstücke beseitigt werden müssen. Da die Komplexität des Lösungsverfahrens von der Anzahl der Flächenstücke abhängt, wurde die Zielstellung formuliert, in der letzten Projektphase eine neue Zerlegungsstrategie zu realisieren, die ohne Einführung zusätzlicher Randpunkte auskommt. Darüberhinaus sollte die Konstruktion der erwähnten Diffeomorphismen, die bisher ausschließlich auf der Basis von Coonsflächen durchgeführt wurde, auf den Einsatz von Gordonflächen erweitert werden. Beide Flächentypen ermöglichen die transfinite Interpolation gegebener Kurven. Allerdings erlaubt eine Gordonfläche die Interpolation eines ganzen Kurvennetzes, während eine Coonsfläche nur für die Einpassung in eine aus vier Randkurven bestehende Netzmasche eingesetzt werden kann.

Eine weitere Zielstellung im Bereich der Geometrievorverarbeitung bestand darin, ein Verfahren zu entwickeln, das eine gegebene Triangulierung einer geschlossenen Oberfläche beliebigen Geschlechts in vierseitige Segmente zerlegt, die dann durch Bezierflächen approximiert werden können.

### Literaturverzeichnis

- [BCR03] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. The fast wavelet transform and numerical algorithms. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 2003.
- [BR03] M. Bebendorf and S. Rjasanow. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, 70(1):1–24, 2003.
- [DKU99] W. Dahmen, A. Kunoth, and K. Urban. Biorthogonal spline-wavelets on the interval - stability and moment conditions. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 6:259–302, 1999.
- [DPS93] W. Dahmen, S. Prössdorf, and R. Schneider. Wavelet approximation methods for periodic pseudodifferential equations. part 2 - fast solution and matrix compression. *Advances in Computational Mathematics*, 1:259–335, 1993.
- [DPS94] W. Dahmen, S. Prössdorf, and R. Schneider. Multiscale methods for pseudodifferential equations on smooth manifolds. In *Proceedings of the International Conference on Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, volume 5 of *Wavelet Analysis and Applications*, pages 385–424. Academic Press, 1994.

- [GR87] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulation. *J. Comput. Phys.*, 73:325–348, 1987.
- [HK00] W. Hackbusch and B.N. Khoromskij. A sparse h-matrix arithmetic, ii: Application to multi-dimensional problems. *Computing*, 64:21–47, 2000.
- [HN89] W. Hackbusch and Z.P. Nowak. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Num. Math.*, 54:463–491, 1989.
- [Joe95] B. Joe. Quadrilateral mesh generation in polygonal regions. *Computer-Aided Design*, 27(3):209–222, 1995.
- [RBS03] M. Randrianarivony, G. Brunnett, and R. Schneider. Constructing a diffeomorphism between a trimmed domain and the unit square. Preprint SFB393/03–20, TU Chemnitz, 2003.
- [Sch98] R. Schneider. *Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur Lösung grosser vollbesetzter Gleichungssysteme, Habilitationsschrift*. PhD thesis, TH Darmstadt, 1998.
- [TW03] J. Tausch and J. White. Multiscale bases for the sparse representation of boundary integral operators on complex geometries. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24:1610–1629, 2003.
- [vPS96] T. von Petersdorf and C. Schwab. Wavelet approximation on first kind integral equations in a polygon. *Num. Math.*, 74:479–516, 1996.

## 2.4 Ergebnisse

### 2.4.1 Wavelet-Galerkin-Verfahren für polygonal approximierten Oberflächen

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Geometrie, gegeben als stückweise polygonal approximierten Oberfläche. Sowohl zur Konstruktion der Wavelets als auch zur Verwendung von schnellen Randelementmethoden wird eine hierarchische Unterteilung der gegebenen Oberfläche benötigt, der so genannte Clusterbaum.

Analog zum zweidimensionalen Fall lassen sich Multiskalenbasen, auch nach J. TAUSCH UND J. WHITE [TW03] Tausch/White-Wavelets genannt, die orthogonal auf den Spuren von Polynomen im Raum stehen, mit Hilfe dieser Unterteilung rekursiv aus stückweise konstanten Ansatzfunktionen erzeugen. Bei dieser Vergrößerungsstrategie entstehen in jedem Rekursionsschritt Waveletfunktionen (Abb. 2.1) sowie Skalierungsfunktionen, die zur Erzeugung von Wavelets auf dem gröberen Level weiterverwendet werden.

Die jeweiligen Multiwavelets spalten sich dabei erst durch die Singulärwertzerlegung lokaler Momentenmatrizen ab. Dabei erlaubt eine zusätzliche Betrachtung verschwindend kleiner Singulärwerte die vorzeitige Generierung von Waveletfunktionen aus Skalierungsfunktionen auf bereits feinen Leveln.

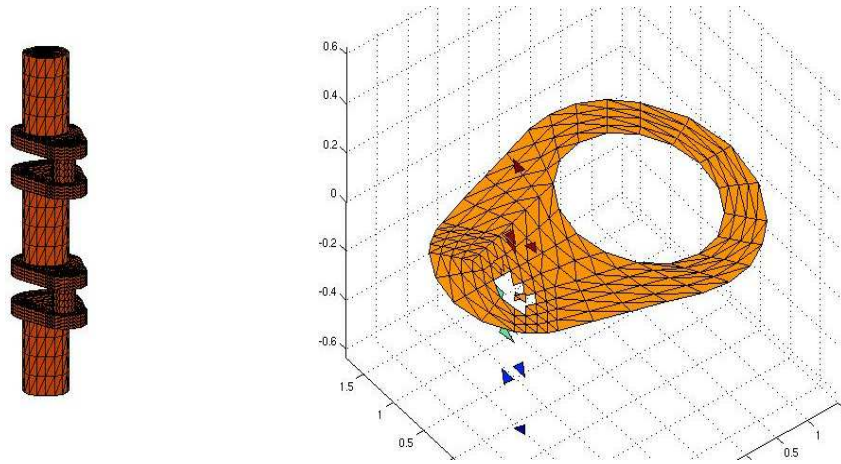


Abbildung 2.1: Waveletfunktion für die Kurbelwelle

Verwendet man die so entstandenen Wavelets als Grundlage für ein Galerkin-Verfahren, so überträgt sich die hierarchische Struktur der Wavelets auf die Matrixstruktur der Systemmatrix. Ähnlich verhält es sich mit der rekursiven Konstruktion der Wavelets. Führt man Einträge der Systemmatrix bzgl. der waveletgenerierenden Skalierungsfunktionen ein, so lassen sich die Einträge der Systemmatrix bzgl. der Wavelets aus letzteren in der selben Art und Weise berechnen, wie sich die Wavelets aus den Skalierungsfunktionen ergeben. Beide Eigenschaften wurden zur Gewinnung eines neuen Waveletverfahrens verwendet.

Da man basierend auf den Arbeiten von R. SCHNEIDER [DPS93, DPS94, vPS96, Sch98] und H. HARBRECHT [DHS06] sowohl die Einträge der Systemmatrix als auch ihre benötigten Genauigkeiten a priori kennt, kann man ausgehend von den Matrixkoeffizienten bzgl. der feinsten Leveln, die berechnet werden müssen, die Einträge für gröbere Level nach obiger Beschreibung rekursiv berechnen. Zur Berechnung der Koeffizienten bzgl. der feinst nötigen Leveln, bedarf es jedoch der Hinzunahme anderer schneller Randelementmethoden.

Solche schnellen Randelementmethoden, wie ACA, Fast-Multipol oder  $\mathcal{H}^2$ -Matrizen basieren auf der Approximation der Systemmatrix durch Ersatzstrukturen, wie entsprechenden Reihenentwicklungen bzw. Niedrig-Rang-Darstellungen. Im Gegensatz zum Waveletverfahren stellen sie keine dünnbesetzte Systemmatrix explizit auf. Jedoch ist die Grundlage aller dieser Verfahren eine hierarchische Zerlegung der Systemmatrix in Blöcke. Bei der genaueren Untersuchung speziell der  $\mathcal{H}^2$ -Matrizen stellte sich dabei heraus, dass sich Teile dieser Strukturen hervorragend mit den Strukturen der Wavelets verbinden lassen. Insbesondere die bei den  $\mathcal{H}^2$ -Matrizen verwendeten geschachtelten Clusterbasen verhalten sich in ihren Strukturen ähnlich der Konstruktion der Tausch/White-Wavelets.

Aus diesen Erkenntnissen entstand im Verlaufe des bewilligten Jahres unter Zuhilfenahme der Hlib des Max-Planck-Institutes Leipzig ein  $\mathcal{H}^2$ -basierendes Waveletverfahren. Dieses wurde als erstes zu Test- und Kontrollzwecken für den zweidimensionalen Fall umgesetzt. Auf Grund der rekursiven Struktur des Verfahrens ist es in großen Teilen unabhängig von der Raumdimension und ließ dahingehend eine schnelle Umsetzung des

Verfahrens im dreidimensionalen gegen Ende des bewilligten Jahres zu. Die notwendigen theoretischen Vorbetrachtungen wurden bereits in [HKS2] erbracht. Ein zum neuen Verfahren zugehörige Veröffentlichung ist in Arbeit.

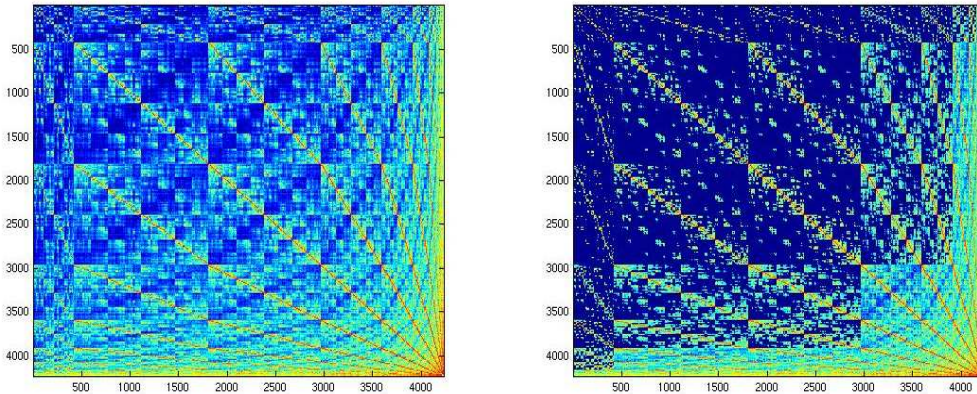


Abbildung 2.2: quasi dünnbesetzte und dünnbesetzte Systemmatrix

Das implementierte Verfahren stellt eine erste Umsetzung der  $\mathcal{H}^2$ -basierenden Waveletmethode dar. Es bedarf daher noch weiteren Untersuchungen der zugrundeliegenden Strukturen sowie der Optimierung des Codes, um eine effizientes und schnelles Verfahren zu erhalten, das sich auch in den entsprechenden Rechenzeiten mit anderen Verfahren messen kann. Eine entsprechende Adaption auf das Problem der Radiosity-Gleichung fand aus zeitlichen Gründen nicht mehr statt.

## 2.4.2 Geometrieverarbeitung

Bei der Untersuchung möglicher Zerlegungsstrategien wurde zunächst ein Verfahren implementiert, das auf einer Triangulierung des gegebenen Polygons und nachfolgender Konversion in konvexe Vierecke beruht [BHRS04]. Aufgrund des ungünstigen Laufzeitverhaltens dieser Methode wurde entschieden, einen Ansatz zu erarbeiten, der ohne eine Triangulierung des Polygons auskommt.

Das entwickelte Zerlegungsverfahren beruht auf der folgenden Aussage: Von jedem einfachen Polygon mit mehr als 4 Punkten lässt sich durch eine der folgenden Operationen ein Viereck abtrennen (siehe Abb. 2.3):

- (Op1) Verbindung zweier Polygoneckpunkte durch eine Kante. In diesem Fall ist das Viereck nicht notwendig konvex.
- (Op2) Einführung eines inneren Knotens (Steinerpunkt) und zweier zugehöriger Kanten.

Der Beweis dieses Abspaltungssatzes (siehe [RB05b]) basiert auf der Anwendung des Two-Ear-Theorems von Meister [Mei75], welches besagt, dass ein einfaches Polygon mit



mehr als drei Punkten mindestens zwei sog. Ohren (das sind zwei benachbarte Polygonkanten, die durch Einführung einer weiteren Kante vom Polygon abgetrennt werden können) besitzt.

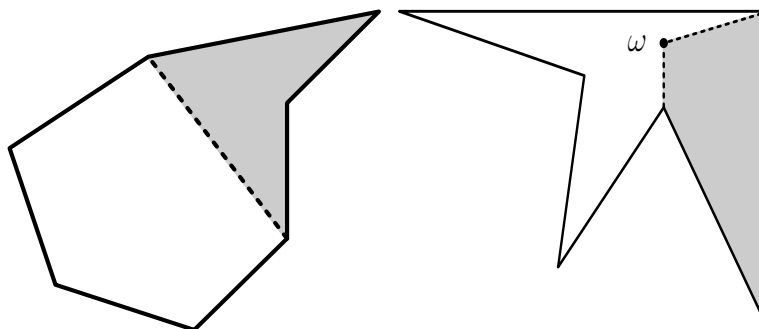


Abbildung 2.3:

Auf der Grundlage des Abspaltungssatzes lässt sich ein Algorithmus zur Zerlegung eines einfachen Polygons  $P$  in konvexe Vierecke formulieren. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $P$  eine gerade Anzahl von Eckpunkten besitzt, da wir zum Einen die Diskretisierung der gekrümmten Randkurven selbst erzeugen und zum Anderen kollineare benachbarte Kanten für  $P$  zulässig sind. Vereinfacht dargestellt arbeitet der Zerlegungsalgorithmus wie folgt. Zunächst werden maximale konvexe Teilpolygone von  $P$  abgetrennt, sofern dies möglich ist. Besitzt ein abgetrenntes konvexes Teilpolygon  $Q$  eine gerade Anzahl von Eckpunkten, so lässt es sich ohne weiteres in konvexe Vierecke zerlegen. Besitzt  $Q$  eine ungerade Anzahl von Eckpunkten, so wird auf der gemeinsamen Kante mit dem Restpolygon  $P'$  ein neuer Punkt eingefügt, so dass sowohl  $Q$  als auch  $P'$  eine gerade Anzahl von Punkten besitzen. Lassen sich keine Teilpolygone von  $P'$  abspalten, so wird  $P'$  durch die Operationen (Op1) und (Op2) in Vierecke zerlegt. In einem weiteren Schritt wird jedes nicht-konvexe Viereck mit einem seiner Nachbarn zu einem Hexagon zusammengefasst. Abschließend werden die Hexagone durch Einführung von Steinerpunkten in konvexe Vierecke zerlegt. Dies ist möglich aufgrund des Satzes von Bremner [BHRS04]. Die Implementierung der Hexagonzerlegung beruht auf der von Bremner gegebenen Liste möglicher Zerlegungen. Eine besondere Schwierigkeit stellte dabei die automatische Festlegung der benötigten Steinerpunkte dar [Ran06].

Da getrimmte Flächen auch Löcher besitzen können, ist es notwendig, diese Zerlegungsstrategie auf mehrfach zusammenhängende Polygone zu übertragen. Es wurde zunächst der naheliegende Ansatz realisiert, bei dem mehrfach zusammenhängende Polygone in eine Anzahl einfach zusammenhängender Polygone zerlegt werden, auf die dann das beschriebene Verfahren sequentiell angewendet werden kann. Die Abbildungen 2.4 und 2.5 zeigen Ergebnisse dieses Vorgehens. Darüberhinaus gelang es uns, eine Verallgemeinerung des Abspaltungssatzes zu beweisen, die besagt, dass es möglich ist, durch Einführung von höchstens drei Kanten ein Viereck von einem mehrfach zusammenhängenden Polygon abzutrennen [RB05b]. Gegenwärtig wird untersucht, ob die Verwendung dieser Aussage eine Zerlegungsstrategie ermöglicht, die effizienter arbeitet als der zuerst genannte Ansatz.

Zur Konstruktion eines Diffeomorphismus zwischen einem konvexen (im Allgemeinen

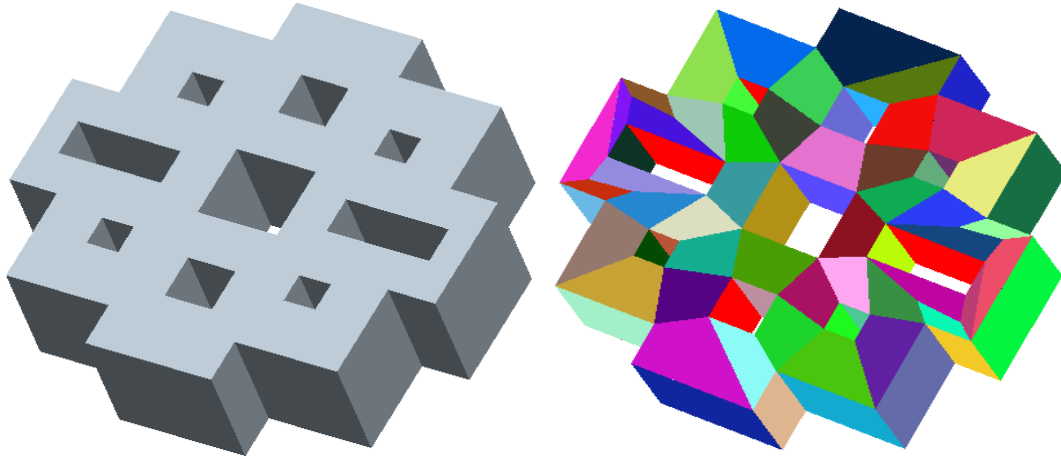


Abbildung 2.4:

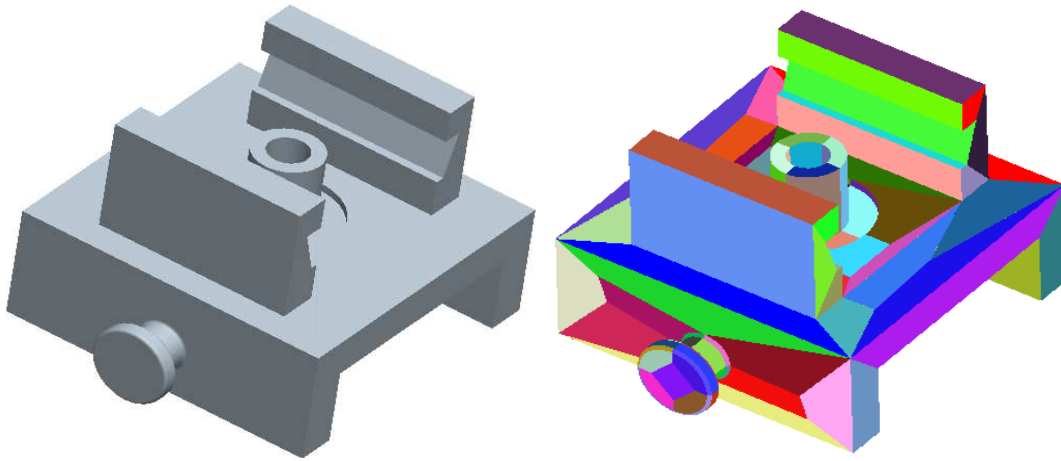


Abbildung 2.5:

gekrümmten) Viereck  $F$  und dem Einheitsquadrat wurden bisher sog. Coonsflächen eingesetzt. In [RB04] wurden für den wichtigen Fall polynomialer Randkurven notwendige und hinreichende Kriterien für die Regularität dieser Abbildungen vorgestellt. Ist die erzeugte Coonsfläche nicht regulär, so wird der benötigte Diffeomorphismus durch das folgende neuentwickelte Vorgehen erzeugt. Im Inneren des gegebenen vierseitigen Gebietes  $F$  werden weitere Kurven eingefügt. Das entstehende Kurvennetz wird dann mit einer Gordonfläche interpoliert. Für die Überprüfung der Regularität der Gordonfläche stehen in Analogie zu den Coonsflächen geeignete Kriterien zur Verfügung. Die Hauptschwierigkeit besteht somit in der automatischen Festlegung der internen Interpolationskurven. Dies geschieht durch Diskretisierung der Randkurven und Bildung eines Gitters durch Hinzunahme geeigneter Punkte  $x_{ij}$  im Innern von  $F$ . Für die Bestimmung der Positionen  $x_{ij}$  wurden zwei verschiedene Verfahren untersucht. Der erste Ansatz beruht auf der Minimierung der Dirichlet-Energie des Gitters. Der zweite Ansatz verwendet die sog. gestalterverhaltende Parametrisierung nach Floater [FH05]. Der letztgenannte Ansatz ist sehr effizient und gibt sehr gute Ergebnisse auch bei komplizierten Randkurven. Den derartig festgelegten Punkten  $x_{ij}$  werden anschließend Parameterwerte zugeordnet, so

dass die gesuchten Kurven durch Interpolation mittels kubischer B-Splines gewonnen werden können [Ran06]. Die Abb. 2.6 zeigt ein Ergebnis dieses Verfahrens.

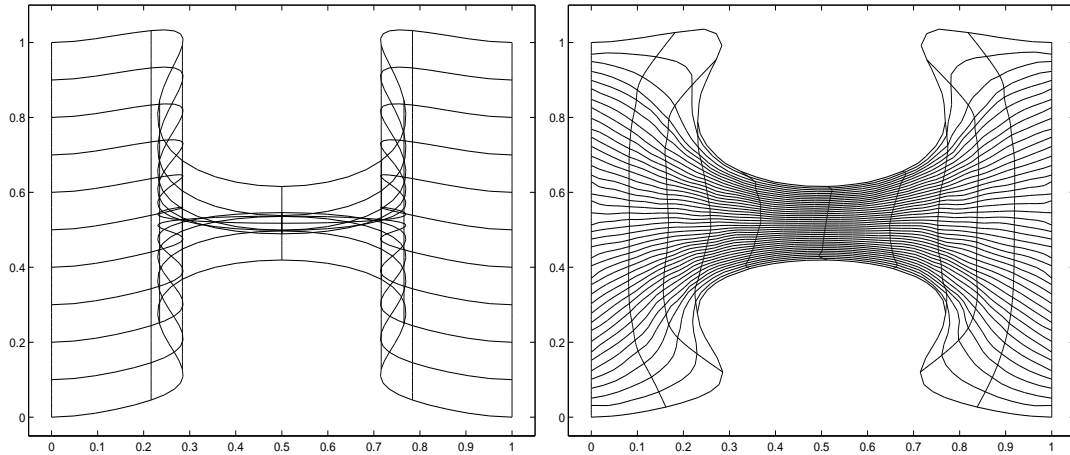


Abbildung 2.6:

Weitere im Berichtszeitraum erzielte Resultate betreffen die Approximation einer geschlossenen als Triangulierung vorliegenden Fläche durch ein Netz vierseitiger Freiformflächen. Zur Generierung der kanonischen Kurven werden zwei Standardverfahren implementiert. Der algebraische Ansatz geht von den Inzidenzmatrizen der Triangulierung aus, die zur Erzeugung der Homologiebasis in Normalform transformiert werden. Der deutlich einfachere geometrische Ansatz extrahiert die kanonischen Kurven aus einem Spannbaum der Triangulierung. Dieses Verfahren ist weniger mächtig als der erste Ansatz, da nur Kurven erzeugt werden, reicht für unsere Anwendung aber völlig aus. Aus den so erzeugten Ausgangskurven werden durch eine Längenoptimierung die letztendlich verwendeten Kurven erzeugt. Durch Abbildung der längenoptimierten kanonischen Kurven auf die Ebene erhält man ein zweidimensionales Parametergebiet für die geschlossene Oberfläche. Das 2D Parametergebiet wird anschließend in vierseitige Segmente zerlegt. Jedes dieser Segmente kann dazu verwendet werden, eine Teilfläche in Bezier- oder B-spline-Darstellung zu definieren, die einen Ausschnitt des Dreiecksnetzes approximiert. Die durch diesen Vorgang entstehende Gesamtfläche ist aus der Klasse  $C^0$  [RB05a]. Die Abbildungen 2.7 und 2.8 zeigen Ergebnisse dieses Verfahrens.

## Literaturverzeichnis

- [BHRS04] D. Bremner, F. Hurtado, S. Ramaswami, and V. Sacristn. Small strictly convex quadrilateral meshes of point sets. *Algorithmica* 38, 2:317–339, 2004.
- [DHS06] W. Dahmen, H. Harbrecht, and R. Schneider. Compression techniques for boundary integral equations - optimal complexity estimates. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(6):2251–2271, 2006.
- [DPS93] W. Dahmen, S. Prössdorf, and R. Schneider. Wavelet approximation methods for periodic pseudodifferential equations. part 2 - fast solution and matrix compression. *Advances in Computational Mathematics*, 1:259–335, 1993.

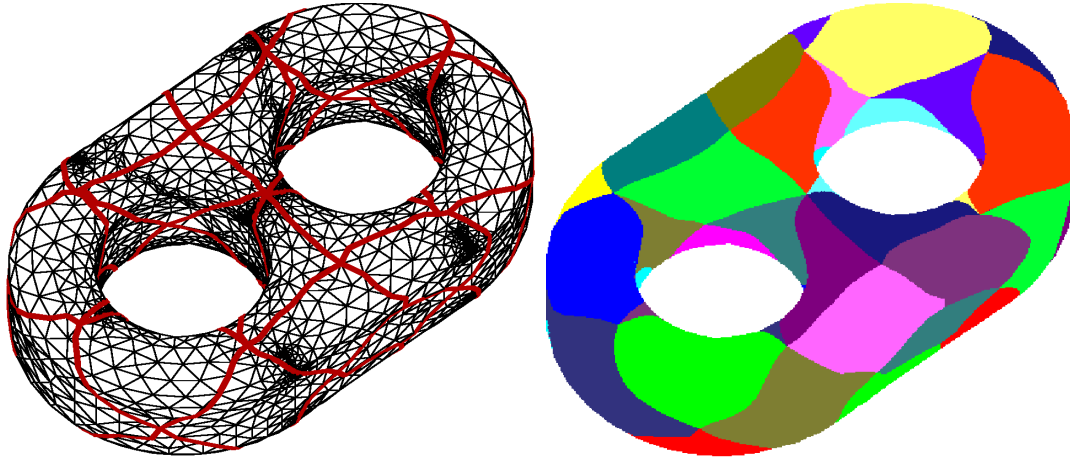


Abbildung 2.7:

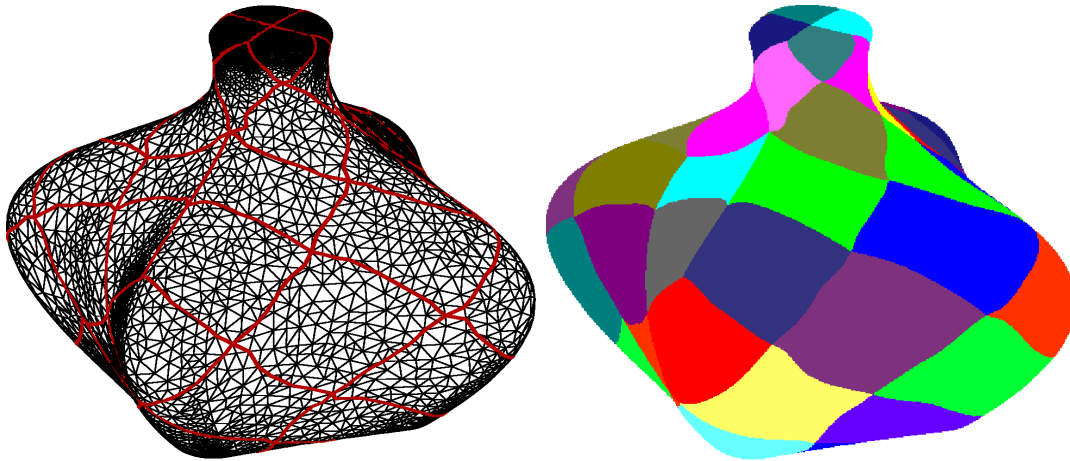


Abbildung 2.8:

- [DPS94] W. Dahmen, S. Prössdorf, and R. Schneider. Multiscale methods for pseudodifferential equations on smooth manifolds. In *Proceedings of the International Conference on Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, volume 5 of *Wavelet Analysis and Applications*, pages 385–424. Academic Press, 1994.
- [FH05] M. Floater and K. Hormann. *Surface parameterization: a tutorial and survey*. Springer Verlag GmbH, 2005.
- [Mei75] G. H. Meister. Polygons have ears. *Math. Mon.*, 82:648–651, 1975.
- [Ran06] M. Randrianarivony. *Geometric Preprocessing for the efficient use of wavelet based integral equation solvers*. PhD thesis, TU Chemnitz, 2006. (in preparation).
- [RB04] M. Randrianarivony and G. Brunnett. Necessary and sufficient conditions for the regularity of a planar coons map. Preprint SFB393/04-07, TU Chemnitz, 2004.
- [RB05a] M. Randrianarivony and G. Brunnett.  $c^0$ -paving of closed meshes with quadrilateral patches. Preprint SFB393/05-17, TU Chemnitz, 2005.

- [RB05b] M. Randrianarivony and G. Brunnett. Quadrilateral removal and 2-ear theorems. *Preprint Sonderforschungsbereich 393, SFB393/05-18*, 2005.
- [Sch98] R. Schneider. *Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur Lösung grosser vollbesetzter Gleichungssysteme*, Habilitationsschrift. PhD thesis, TH Darmstadt, 1998.
- [TW03] J. Tausch and J. White. Multiscale bases for the sparse representation of boundary integral operators on complex geometries. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24:1610–1629, 2003.
- [vPS96] T. von Petersdorf and C. Schwab. Wavelet approximation on first kind integral equations in a polygon. *Num. Math.*, 74:479–516, 1996.

## 2.5 Offene Fragen / Ausblick

Die verbleibenden offenen Fragen betreffen im Wesentlichen die Anwendung der entwickelten Methoden auf die Beleuchtungsgleichung. Dazu sind insbesondere geeignete Verfahren zur hierarchischen Unterteilung der Geometrie unter Betrachtung der Sichtbarkeitsbedingung und effiziente Methoden zur Auswertung der Sichtbarkeitsfunktion zu entwickeln. Darüber hinaus legen die durchgeführten Arbeiten nahe, ein schnelles Verfahren zur Lösung von Integralgleichungen zu entwickeln, das auf einer Verbindung des Waveletverfahrens und der Methode der  $\mathcal{H}^2$ -Matrizen beruht.

