

Teilprojekt

A12

Besondere FEM für Kontaktprobleme / Mortaring /
Randkonzentriertheit / Projektionen

2.1 Teilprojekt A12

Besondere FEM für Kontaktprobleme / Mortaring / Randkonzentriertheit / Projektionen

2.1.1 Antragsteller

Prof. Bernd Heinrich
12.10.1943
Angewandte Mathematik
Fak. für Mathematik
TU Chemnitz
09107 Chemnitz
Tel.: (0371) 531-2659
Fax: (0371) 531-2657
b.heinrich@mathematik.
tu-chemnitz.de

Prof. Arnd Meyer
08.03.1952
Numerische Analysis
Fak. für Mathematik
TU Chemnitz
09107 Chemnitz
(0371) 531-2659
(0371) 531-2657
a.meyer@mathematik.
tu-chemnitz.de

2.1.2 Projektbearbeiter

Mitarbeiter der Grundausrüstung:

Prof. Bernd Heinrich	(Angewandte Mathematik)
Prof. Arnd Meyer	(Numerische Analysis)
Dipl.-Math. techn. Roman Unger	(Numerische Analysis)
Dr. Beate Jung	(Angewandte Mathematik, 2005)

Mitarbeiter der Ergänzungsausstattung:

Dipl.-Math. techn. Roman Unger (halbe Stelle)
Dipl.-Math. techn. Kornelia Pönitz (halbe Stelle/Sept. 2004 bis 2005)
Dipl.-Math. Tino Eibner

2.2 Ausgangsfragestellung / Einleitung

Nitsche–Mortaring

Bei der numerischen Lösung elliptischer Probleme mittels Finite-Elemente Methode (FEM) auf Parallelrechnern sind Gebietszerlegungsmethoden von besonderem Interesse. Die gleichzeitige Anwendung nichtkonformer Teilgebietstriangulationen sowie einer abgeschwächten und koppelnden Stetigkeitsbedingung an den Teilgebietsrändern wird durch so genannte Mortar-Methoden möglich, die häufig über ein Sattelpunktsproblem für die Lösung u der Randwertaufgabe und einem Lagrange-Parameter λ realisiert werden.

Auf einer Idee von Nitsche (1971, cf. [Nit71, Tho97]) beruhend, wurde u.a. durch Stenberg (1998, vergl. auch [Ste98, Arn82]) ein zur Mortar-Methode verwandter Zugang zur Kopplung nichtkonformer Triangulationen (non-matching meshes) und unstetiger Finite-Elemente-Ansätze vorgeschlagen, das so genannte „Nitsche-type mortaring“. Dieser Zugang behandelt die Kopplung nicht wie bisher über Nebenbedingungen, sondern vereinfachend mittels eines Kopplungstermes, der die Bilinearform des Ausgangsproblems erweitert. Das Verfahren ist dann als Galerkin-Verfahren für die durch den Kopplungsterm modifizierte Variationsgleichung über dem Raum unstetiger Finite-Elemente-Funktionen interpretierbar. Die Finite-Elemente-Methode vom Nitsche-Typ sollte im aktuellen Berichtszeitraum in den folgenden wesentlichen Linien weiter behandelt werden.

1. Analyse der FE-Schemata nach Nitsche als FE-Approximation auf nichtkonformen Teilgebietstriangulationen, insbesondere bezüglich Stabilität und Konvergenzraten der Näherungslösung, bei schwierigen und anwendungsrelevanten Parametersituationen
2. Behandlung des Falles von komplizierter Geometrie des Randes $\partial\Omega$ (Ecken, Kanten), kleiner Diffusionskoeffizienten und daraus resultierender Lösungssingularitäten sowie Anisotropie in der Lösung u des Randwertproblems, nichtkonforme Kopplung unregelmäßiger Netze mit lokal verfeinerten (graduierten) sowie anisotropen Netzen
3. Kombination der FE-Schemata nach Nitsche mit der Fourier-FEM zur effektiven Behandlung dreidimensionaler Randwertaufgaben in axialsymmetrischen Gebieten

Kontaktsimulation

Das allgemeine Kontaktproblem sollte in seinen natürlichen Teilschritten innerhalb dieses Teilprojekts als auch kooperativ mit D1 bearbeitet werden. Basis waren die existierenden adaptiven Programmrealisierungen SPC-PM2Ad / SPC-PM3Ad, mit denen das elastische Signorini-Problem bei ebenem oder gekrümmtem Hindernis mit einem Aufwand lösbar ist, der dem einer einfachen linear elastischen Aufgabe gleicht.

Im vorliegenden Teilprojekt sollte vorrangig die Verbesserung und breitere Anwendbarkeit und Kombination mit dem Nitsche-type mortaring vorgesehen werden.

Die wichtige Verallgemeinerung zum Mehrkörperkontakt kann mit Hilfe der „Projektionstechnik“ oder auch durch Mortar-Technik vorgenommen werden.

In beiden Fällen ist die analytische Formulierung dann relativ klar, wenn die Information von „Teilränder in Kontakt“ im ersten Fall und „Knoten näherungsweise in Kontakt“ im zweiten Fall gegeben ist.

Deshalb spielte neben der theoretischen Durchdringung dieser Techniken ein „Lernalgorithmus“ eine wichtige implementierungstechnische Rolle, der oben genannte Informationen beschaffen (besser: im adaptiven Prozess „buchführen“) muss.

Randkonzentrierte *hp*-FEM

Die randkonzentrierte Finite-Element-Methode war Forschungsschwerpunkt des ehemaligen Teilprojektes A13. Mit ihrer a priori Vorgabe eines zum Rand hin verfeinerten Netzes und hohen Polynomgraden im Inneren ist die randkonzentrierte *hp*-FEM speziell auch für die Behandlung von Kontakt- und Steuerungsproblemen geeignet. Ziel sollte daher sein, die Methode der randkonzentrierten FEM in das Teilprojekt A12 zu integrieren und für das Lösung realitätsnaher Kontaktprobleme anzuwenden. Eine Hürde die es hierbei unter anderem noch zu überwinden galt, war die Entwicklung schneller Löser.

2.3 Forschungsaufgaben / Methoden

2.3.1 Teilaufgabe: Analyse des Nitsche-Mortaring für verschiedene elliptische Randwertaufgaben

In der Restlaufzeit des SFB (Mitte 2004/2005) bestand ein wesentliches Ziel dieser Teilaufgabe in der Analyse der Finite-Elemente-Methode nach Nitsche (Nitsche-Mortaring) für weitere Modellaufgaben mit elliptischer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die zu untersuchenden Problemklassen sollten umfassen:

- die Poissongleichung in dreidimensionalen axialsymmetrischen Gebieten
- singular gestörte Reaktions-Diffusions-Probleme auf beliebigen Polygonegebieten
- die Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen über polygonalen Gebieten
- Vergleich der Finite-Elemente-Approximationen nach Nitsche mit Finite-Elemente-Approximationen der inneren Penalty-Methode

Das Finite-Elemente-Schema nach Nitsche war als nichtkonforme Finite-Elemente-Approximation auf nichtkonsistenten Teilgebietstriangulationen zu entwickeln und aus der Sicht der Numerischen Analysis mathematisch zu begründen. Dabei waren schwierige und anwendungsrelevante Parametersituationen der Randwertaufgabe, wie Ecken, springende Koeffizienten und kleine Parameter (singuläre Störungen) zu berücksichtigen, die Stabilität sowie die optimale Konvergenz der Näherungslösung zu garantieren. Die Durchführbarkeit und Vorteile sowie die Anwendungsbreite der Methode waren theoretisch und durch die numerische Realisierung relevanter Beispiele aufzuzeigen. Vorarbeiten bestanden u.a. darin, bekannte Aussagen zu den klassischen Mortar-Methoden (vergl. etwa [BD98, BDW99, Bel99, BMP90, LW03, Woh98, Woh99a, Woh99b, Woh00]) sowie zur Regularitätstheorie der betrachteten Randwertaufgaben, einschließlich des besonderen Verhaltens der Lösung in der Umgebung von Ecken, Kanten und Randschichten, in der Literatur zu sichten. Weiter waren die modifizierten Variationsgleichungen nach Nitsche, bisher für die Poissongleichung bzw. verwandte Probleme bekannt (vergl. [ABCM00, Arn82, BH, BH99, BHS03, Ste95, Ste98]), für andere elliptische Probleme mit komplizierteren Parametern passend zu erweitern. Die Hilfsmittel für Fehlerabschätzungen (unter anderem inverse Ungleichungen und Spursätze) waren auf entsprechende Klassen anisotroper und graduerter Netze, in Kopplung mit isotropen Netzen, zu übertragen,

die Fehler waren in H^1 -ähnlichen Normen und in der L_2 -Norm abzuschätzen. Weiterhin waren Implementierungen der Nitsche-Mortar-Methode zu realisieren, Testbeispiele zu entwickeln und numerische Experimente durchzuführen.

2.3.2 Teilaufgabe: Kontaktbehandlung

Bei der Bearbeitung des Kontaktproblems zweier elastischer Körper miteinander liegt die Schwierigkeit nicht in der Definition der geeigneten Projektion, sondern vor allem im Datenmanagement zum Auffinden der Partnerknoten und Partnerkanten, die miteinander in Kontakt treten und damit für die Definition der Projektion zuständig sind.

In diesem Kapitel soll eine allgemeine Herleitung der geeigneten Projektion und Betrachtung der Referenzimplementierung für den zweidimensionalen Fall erfolgen.

2.1.3.1 Der Eindringungstest

Wie auch beim Kontakt eines festen Körpers mit einem unverformbaren Hindernis ist der erste Schritt des Verfahrens die Ermittlung aller kontaktverdächtigen Knoten, die tatsächlich eingedrungen sind.

Dies ist hier etwas aufwändiger, da man nicht von einem festen (unverformbaren) Hindernis ausgeht, sondern der jeweils andere Körper das Hindernis darstellt.

Im folgenden werden einige Varianten dieser Tests aufgezeigt und ihre Besonderheiten betrachtet.

2.1.3.2 Eindringungstest über Kantenschnitte

Ziel des Tests ist es, einander schneidende Kanten wie in Abbildung 2.1 zu ermitteln. Der andere (denkbare) Fall, dass sich Kanten „überschlagen“ (siehe Abbildung 2.2) muss nicht gesondert betrachtet werden, denn ein Kantenüberschlag ist nur möglich, wenn irgendwo ein Kantenschnitt vorliegt.

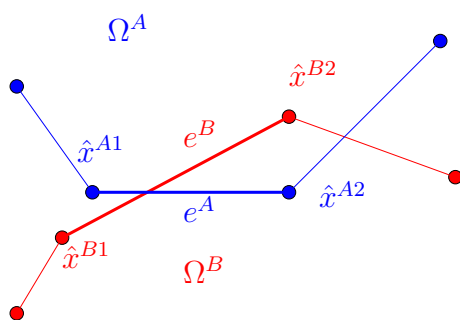


Abbildung 2.1: Kantenschnitt

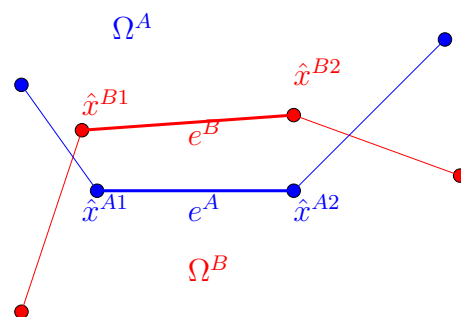


Abbildung 2.2: Kantenüberschlag

Somit wird ein in groben Verfeinerungslevels vorliegender Kantenüberschlag durch das Auffinden und Bearbeiten der Kantenschnitte aufgelöst.

Prinzipiell kann man jede Kante aus den kontaktverdächtigen Randstücken Γ_C^s der beiden Körper Ω^A und Ω^B mit jeder des anderen Körpers testen, hat damit aber einen in der Anzahl der Kanten in Γ_C^s quadratischen Aufwand. Eine Verbesserung ist durch Erlernen von Nachbarschaftsbeziehungen möglich.

Zur Herleitung des Testes ob sich die Kanten e^A und e^B schneiden, seien mit \hat{x} die verschobenen Knoten bezeichnet ($\hat{x} := x + u$) und e^A, e^B die daraus resultierenden Kanten:

$$\begin{aligned} e^A & : \begin{bmatrix} \hat{x}_1^{A1} \\ \hat{x}_2^{A1} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \hat{x}_1^{A2} \\ \hat{x}_2^{A2} \end{bmatrix} \\ e^B & : \begin{bmatrix} \hat{x}_1^{B1} \\ \hat{x}_2^{B1} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \hat{x}_1^{B2} \\ \hat{x}_2^{B2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit Definition der beiden Kantenvektoren

$$\begin{aligned} v^A & := \hat{x}^{A2} - \hat{x}^{A1} \\ v^B & := \hat{x}^{B2} - \hat{x}^{B1} \end{aligned}$$

sind die Kanten darstellbar als

$$\begin{aligned} e^A & : \hat{x}^{A1} + \lambda v^A \quad \lambda \in [0, 1] \\ e^B & : \hat{x}^{B1} + \mu v^B \quad \mu \in [0, 1] \end{aligned}$$

und das Ermitteln des Schnittpunktes der beiden Kanten erfordert die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} v^A & -v^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}^{B1} - \hat{x}^{A1} \end{bmatrix} .$$

Im Falle, dass die Systemmatrix singularär ist, verlaufen die Kanten parallel und brauchen nicht weiter betrachtet zu werden.

Im regulären Fall existiert eine eindeutige Lösung für λ und μ , falls

$$0 \leq \lambda, \mu \leq 1$$

gilt, so schneiden sich die beiden Kanten und der Test ist positiv.

2.1.3.3 Eindringungstest über Schnitte von Verschiebungen und Kanten

Dieser Test betrachtet den Schnitt zwischen dem Verschiebungsweg eines Kantenmittenknotens des einen Körpers und einer Kante des anderen Körpers.

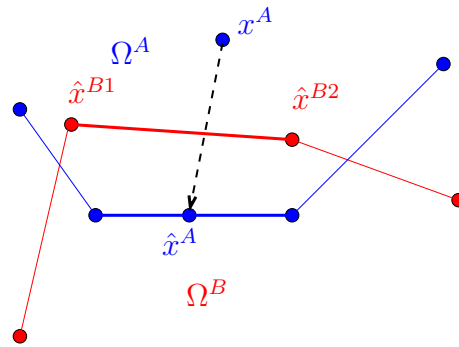


Abbildung 2.3: Variante 2 des Eindringungstestes

Dazu wird, wie in Abbildung 2.3 skizziert, ein Schnittpunkt zwischen einer Kante $(\hat{x}^{B1}, \hat{x}^{B2})$ und dem Verschiebungsvektor (x^A, \hat{x}^A) über die Lösung eines auf analoge Weise wie eben hergeleiteten 2×2 Gleichungssystems für zwei Parameter λ und μ bestimmt. Im Falle

$$0 \leq \lambda, \mu \leq 1$$

ist der Test wiederum positiv und aus den zueinandergehörigen Anfangs-, Mitten- und Endknoten der beiden beteiligten Kanten werden Knotenpaare gebildet.

2.1.3.4 Vergleich der beiden Varianten

Prinzipiell sind beide Varianten geeignet, das Kontaktproblem zweier elastischer Körper zu behandeln.

Aus numerischer Sicht ist aber die zweite Variante, die mit Schnitten von Verschiebungen und Kanten operiert zu bevorzugen, da in der anderen Variante bei fast parallelen Kanten die Berechnung des Kantenschnittpunkts und Auswertung numerisch instabil wird. Insbesondere bei Erreichen einer guten Auflösung der Kontaktzone tritt genau diese Kantenparallelität auf und eine weitere genaue Berechnung wird erschwert.

Dieses Problem hat sich auch bei der Implementierung der beiden Varianten gezeigt, weshalb nach numerischen Experimenten mit beiden Varianten der letzteren der Vorzug gegeben wurde.

Beispielrechnungen zum Kontakt zweier elastischer Körper und zum Kontakt eines elastischen Körpers mit sich selbst sind in den Anhängen 2.4.2 und 2.4.2 zu finden.

2.1.3.5 Definition des Projektors

Für alle die Knotenpaare, für die der Eindringungstest positiv verlaufen ist, wird eine jeweilige gemeinsame Tangentenrichtung s mit ihrer Normalenrichtung n und ein auf die Tangente abbildender Projektor festgelegt sowie die Startlösung derart korrigiert, dass

für zwei korrespondierende Knoten $x^A \in \Omega^A$ und $x^B \in \Omega^B$

$$\begin{aligned} x^A + \tilde{u}^A &= x^B + \tilde{u}^B \\ \text{mit } u_0^A &:= \tilde{u}^A \\ u_0^B &:= \tilde{u}^B \end{aligned}$$

gilt.

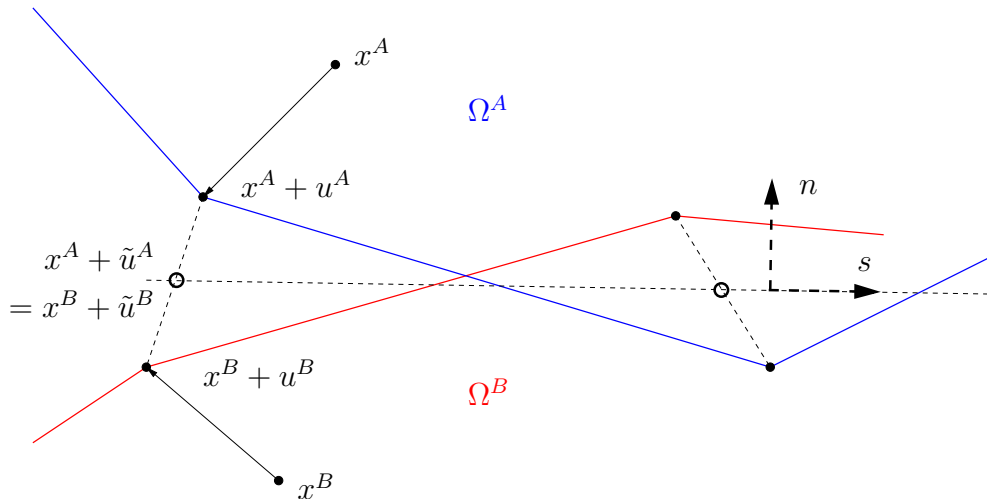


Abbildung 2.4: Korrektur der Verschiebung für das Zweikörperproblem

Die beiden korrigierten Verschiebungen \tilde{u}^A und \tilde{u}^B ergeben sich wie auch in Abbildung 2.4 dargestellt durch Ausmittlung der vorhandenen Verschiebungen über die Beziehung

$$x^A + \tilde{u}^A = x^B + \tilde{u}^B = \frac{1}{2}(x^A + u^A) + \frac{1}{2}(x^B + u^B)$$

als

$$\begin{aligned} \tilde{u}^A &= \frac{1}{2}(x^B - x^A) + \frac{1}{2}(u^A + u^B) \\ \tilde{u}^B &= \frac{1}{2}(x^A - x^B) + \frac{1}{2}(u^A + u^B) \end{aligned}$$

Analog wird das andere Knotenpärchen der Kante behandelt und somit die gemeinsame Tangenten- und Normalenrichtung festgelegt.

2.1.3.6 Betrachtung des Projektors im $2d$ -Fall

Das mit dieser Startlösung beginnende CG-Verfahren würde nun im unrestringierten Falle Korrekturterme $w^A, w^B \in \mathbb{R}^2$ berechnen, zusammen hätte man also ein Problem mit 4 Freiheitsgraden.

Um aber die Kontaktbedingung zu erfüllen, wird es derart restringiert, dass die berechneten Korrekturterme w^A, w^B für u^A, u^B den folgenden Bedingungen genügen:

$$w^A = \lambda s + \nu n \quad (2.1)$$

$$w^B = \mu s + \nu n \quad (2.2)$$

was bedeutet, dass zwar eine unabhängige Verschiebung entlang der Tangentenrichtung s möglich ist, jedoch in Normalenrichtung n nur eine gemeinsame Verschiebung für Knoten A und B zulässig ist.

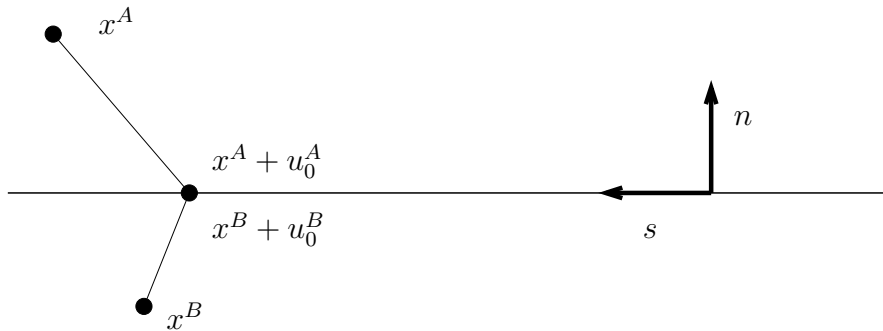


Abbildung 2.5: Konforme Startlösung für das Zweikörperproblem

Man hat also an Stelle von 4 Freiheitsgraden nur noch 3 und braucht einen geeigneten Projektor, der diesen Restriktionen genügt.

Die folgendermaßen definierte Abbildung

$$P = \begin{bmatrix} I - \frac{1}{2}nn^T & \frac{1}{2}nn^T \\ \frac{1}{2}nn^T & I - \frac{1}{2}nn^T \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

ist ein Projektor mit

$$P : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^4 \quad \dim(\mathbb{U}) = 3$$

der die in (2.1) und (2.2) geforderten Bedingungen erfüllt.

Die den Projektor definierende Eigenschaft

$$P^2 = P$$

kann man durch einfaches Nachrechnen von $P \cdot P$ unter Beachtung von $n^T n = 1$, da n normiert ist, zeigen.

Um nun zu zeigen, dass die geforderten Eigenschaften erfüllt werden, betrachten wir für $w^A, w^B \in \mathbb{R}^2$ das Bild von $\begin{bmatrix} w^A \\ w^B \end{bmatrix}$.

Für $w^A, w^B \in \mathbb{R}^2$ existieren eindeutig die orthogonalen Zerlegungen

$$w^A = \lambda s + \nu_1 n$$

$$w^B = \mu s + \nu_2 n$$

Ziel ist es zu zeigen, dass

$$P \begin{bmatrix} w^A \\ w^B \end{bmatrix} \quad \text{als} \quad \begin{bmatrix} \lambda s \\ \mu s \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$$

darstellbar ist.

$$\begin{aligned} P \begin{bmatrix} w^A \\ w^B \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} \lambda s + \nu_1 n \\ \mu s + \nu_2 n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I - \frac{1}{2}nn^T)(\lambda s + \nu_1 n) + \frac{1}{2}nn^T(\mu s + \nu_2 n) \\ \frac{1}{2}nn^T(\lambda s + \nu_1 n) + (I - \frac{1}{2}nn^T)(\mu s + \nu_2 n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und erkennen, dass alle Terme mit $n^T s$ wegen der Orthogonalität von n und s verschwinden und sich Terme der Art $\frac{1}{2}\nu_i nn^T n$ wegen $n^T n = 1$ zu $\frac{1}{2}\nu_i n$ vereinfachen ergibt:

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \lambda s + \nu_1 n - \frac{1}{2}\nu_1 n + \frac{1}{2}\nu_2 n \\ \mu s + \frac{1}{2}\nu_1 n + \nu_2 n - \frac{1}{2}\nu_2 n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda s + \frac{1}{2}\nu_1 n + \frac{1}{2}\nu_2 n \\ \mu s + \frac{1}{2}\nu_1 n + \frac{1}{2}\nu_2 n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda s \\ \mu s \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \nu := \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) \end{aligned}$$

Also erfüllt das Bild Pw eines beliebigen Vektors $w \in \mathbb{R}^4$ tatsächlich die geforderten Bedingungen.

2.1.3.7 Gemeinsamkeiten zum 3d-Fall

Für 3d-Probleme kann man den Projektor ganz analog definieren, man fordert wiederum, dass alle Korrekturen w^A , w^B aus einem nun 2-dimensionalen Unterraum \mathbb{U} kommen müssen und ein gemeinsames Verschieben beider Knoten in Normalenrichtung zu diesem Unterraum zulässig ist.

Setzt man diesen Unterraum \mathbb{U} als lineare Hülle von $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^3$ an und sei $n \in \mathbb{R}^3$ die Normale auf \mathbb{U} also sein orthogonales Komplement, so ergibt sich analog zur den Forderungen (2.1) und (2.2)

$$w^A = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \nu n$$

$$w^B = \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2 + \nu n$$

also bleiben 5 Freiheitsgrade und $P : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^6$ mit $\dim(\mathbb{U}) = 5$ ist der analoge Projektor (2.3) mit dem Unterschied, dass hier $n \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Literaturverzeichnis zu 2.3

- [ABCM00] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and D. Marini. Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems. In B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C.-W. Shu, editors, *Discontinuous Galerkin Methods*, volume 11 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 89–101. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [Arn82] D. N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(4):742–760, 1982.
- [BD98] D. Braess and W. Dahmen. Stability Estimates of the Mortar Finite Element Method for 3-Dimensional Problems. *East-West J. Numer. Math.*, 6(4):249–264, 1998.
- [BDW99] D. Braess, W. Dahmen, and Ch. Wieners. A Multigrid Algorithm For The Mortar Finite Element Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37(1):48–69, 1999.
- [Bel99] F. Ben Belgacem. The Mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik*, 84:173–197, 1999.
- [BH] R. Becker and P. Hansbo. Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Diffusion Problems with Arbitrary Peclet Number. Enumath99.
- [BH99] R. Becker and P. Hansbo. A Finite Element Method for Domain Decomposition with Non-matching Grids. Technical Report INRIA 3613, 1999.
- [BHS03] R. Becker, P. Hansbo and R. Stenberg. A Finite Element Method for Domain Decomposition with Non-matching Grids. *M²AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37:209–225, 2003 :287–303, 1999.
- [BMP90] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. A New Nonconforming Approach to Domain Decomposition: The Mortar Element Method. In H. Brezis and J. L. Lions, editors, *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*. Pitman, 1990.
- [LW03] B. B. Lamichhane and B. I. Wohlmuth. Mortar finite elements for interface problems. *Berichte IANS, Univ. Stuttgart*, Preprint 2003/001.
- [Nit71] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlung aus dem Mathematischen Seminaren der Universität Hamburg*, 36:9–15, 1970/1971.
- [Ste95] R. Stenberg. On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method. *J. Comput. Appl. Math.*, 63(1-3):139–148, 1995.
- [Ste98] R. Stenberg. Mortaring by a method of J.A. Nitsche. In S. Idelsohn, E. Onate, and E. Dvorkin, editors, *Computational Mechanics, New Trends and Applications*. Barcelona, 1998.

- [Tho97] V. Thomeé. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Springer Verlag, Berlin, New York, 1997.
- [Woh98] B. I. Wohlmuth. Analysis and Parallel Implementation of Adaptive Mortar Finite Element Methods. *East-West J. of Numer. Math.*, 6:223–248, 1998.
- [Woh99a] B. I. Wohlmuth. Hierarchical A Posteriori Error Estimators for Mortar Finite Element Methods with Lagrange Multipliers. *SIAM J.Numer.Anal.*, 36:1636–1658, 1999.
- [Woh99b] B. I. Wohlmuth. A residual based error estimator for mortar finite element discretizations. *Numer. Mathematik*, 84:143–171, 1999.
- [Woh00] B. I. Wohlmuth. A Mortar Finite Element Method Using Dual Spaces for the Lagrange Multiplier. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(3):989–1012, 2000.

2.4 Ergebnisse

2.4.1 Teilaufgabe: Analyse des Nitsche-Mortaring für verschiedene elliptische Randwertaufgaben

Die Hauptbearbeiterin dieser Teilaufgabe, Frau Dipl.-Math.techn. Kornelia Pönitz, konnte nach Schwangerschaft/Mutterschaftsurlaub erst im Zeitraum September 2004 bis 2005 (halbe Stelle) wieder an der Projektarbeit teilnehmen. Andererseits war es möglich, dass Frau Dr. Beate Jung an diesem Thema mitgearbeitet hat. Die Resultate zur Teilaufgabe sind in [HP02, HN03, Hei02, Hei03, HJ04, HJ06, HP03, HP05, Poe05] dargelegt.

Einige Resultate werden hier nochmals kurz in skizzierter Form dargelegt. Bezüglich einer ausführlichen Ergebnisbeschreibung wird auf den umfangreichen Text im Teil 2.4 Ergebnisse des SFB-Berichtes 2004 verwiesen.

Singulär gestörte Reaktions-Diffusions-Probleme

In [HP03, HP05, Poe05] wird das Nitsche Mortaring für singulär gestörte Diffusions-Reaktionsprobleme vom Typ $-\varepsilon^2 \Delta u + cu = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$, weiterentwickelt, wobei Ω jetzt ein allgemeines Polygonebiet ist. Das bei kleinem Parameter ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) entstehende Randschichtgebiet der Breite $\mathcal{O}(\varepsilon|\ln\varepsilon|)$ wird mit anisotropen Dreiecken vernetzt, das innere Restgebiet mit isotropen Dreiecken. Die Umgebung einspringender Ecken wird mit gradierten Dreiecken vernetzt, wobei das Maß der Graduierung vom Singularitätsexponenten abhängt. Am Interface Γ der Gebietszerlegung stoßen isotrope und anisotrope Dreiecke aneinander. Für diese Kombinationen nichtkonsistenter isotroper und anisotroper Netze werden Finite-Elemente-Näherungen der RWA vom Nitsche-Typ aus der Sicht der Numerischen Analysis begründet. Die Resultate und der Zugang zum Nitsche-Mortaring sind in [HP03, HP05, Poe05] für Rechtecke und Polygonebiete Ω sowie reguläre und nun auch singuläre Lösungen $u \notin H^2(\Omega)$ dargelegt und werden durch numerische Beispiele illustriert.

Betrachtet wird das Modellproblem einer Reaktions-Diffusions Gleichung auf einem Polygonebiet Ω wie folgt:

$$\begin{aligned} Lu := -\varepsilon^2 \Delta u + cu &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dabei wird angenommen, dass $0 < \varepsilon < 1$ and $0 < c_0 \leq c(x)$ ($x \in \Omega$) gelten, f hinreichend glatt sei, mindestens $f \in L_2(\Omega)$. Für kleine Werte von ε , $0 < \varepsilon \ll 1$, zeigt die Lösung u i.a. Randschichtverhalten, in den einspringenden Ecken auch Singularitätsverhalten. Das Gebiet Ω wird wieder in nichtüberlappende Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 zerlegt, so dass die RWA äquivalent zu folgender Aufgabe ist. Finde $u = (u^1, u^2)$ derart, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u^i + cu^i &= f^i \quad \text{in } \Omega_i, & u^i &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, & \text{für } i = 1, 2, \\ \frac{\partial u^1}{\partial n_1} + \frac{\partial u^2}{\partial n_2} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, & u^1 &= u^2 \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.5)$$

erfüllt sind, wobei n_i die Außennormale an $\partial\Omega_i \cap \Gamma$ ($i = 1, 2$) ist. Wir verwenden nachfolgend $V := V^1 \times V^2$, wobei $V^i := \{v^i : v^i \in H^1(\Omega_i), v^i|_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega} = 0\}$ für $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset$, $V^i := H^1(\Omega_i)$ für $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i = \emptyset$ definiert ist.

Der Finite-Elemente-Raum V_h^i (Unterraum von V^i) von Funktionen v^i auf Ω_i wird wie folgt eingeführt: $V_h^i := \{v^i \in H^1(\Omega_i) : v^i|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^i, v^i|_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega} = 0\}$, der Raum V_h durch $V_h := V_h^1 \times V_h^2 = \{v_h = (v_h^1, v_h^2) : v_h^1 \in V_h^1, v_h^2 \in V_h^2\}$ definiert. Für die Approximation von u auf V_h fixieren wir eine positive Konstante γ sowie reelle Parameter α_1, α_2 und führen die Bilinearform $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$ auf $V_h \times V_h$ und die Linearform $\mathcal{F}_h(\cdot)$ auf V_h wie folgt ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(u_h, v_h) &:= \sum_{i=1}^2 \left(\varepsilon^2 (\nabla u_h^i, \nabla v_h^i)_{\Omega_i} + (cu_h^i, v_h^i)_{\Omega_i} \right) - \left\langle \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial u_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial u_h^2}{\partial n_2}, v_h^1 - v_h^2 \right\rangle_{\Gamma} \\ &\quad - \left\langle \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2}, u_h^1 - u_h^2 \right\rangle_{\Gamma} + \varepsilon^2 \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} (u_h^1 - u_h^2, v_h^1 - v_h^2)_E, \\ \mathcal{F}_h(v_h) &:= \sum_{i=1}^2 (f, v_h^i)_{\Omega_i}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Gewichte im vierten Term von \mathcal{B}_h approximieren die Funktion $\sigma = \gamma \varepsilon^2 h^{-1}(x)$ und garantieren die Stabilität der Methode, falls γ hinreichend groß gewählt wird ($\gamma > C_I$).

Die Nitsche-Finite-Elemente-Approximation u_h der Lösung u ist definiert durch $u_h = (u_h^1, u_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2$ als Lösung von

$$\mathcal{B}_h(u_h, v_h) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.7)$$

Zur optimalen Approximation der Lösung in der Randschicht werden anisotrope Dreiecke benutzt ([AN98, Ape99]). Die Gebietszerlegung kann so gewählt sein, dass anisotrope

und isotrope (gestaltsreguläre) Dreiecke nichtkonsistent aneinander stoßen. In den einspringenden Ecken wird das Netz entsprechend dem kleinsten Singularitätsexponenten graduiert. Für Details siehe [HP03, HP05, Poe05]. Zur Herleitung der Stabilität der Bilinearform $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$ führen wir die diskrete Energie-ähnliche Norm $\|\cdot\|_{1,h}$ ein, die von ε^2 , $c(x)$ und vom Netz abhängt:

$$\|v_h\|_{1,h}^2 = \sum_{i=1}^2 \left(\varepsilon^2 \|\nabla v_h^i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|\sqrt{c}v_h^i\|_{0,\Omega_i}^2 \right) + \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2. \quad (2.8)$$

In dieser Norm können Stabilität und Beschränktheit der Bilinearform gleichmäßig bezüglich ε und h bewiesen werden. Die Fehlerabschätzungen basieren auf der in [HP03, HP05, Poe05] bewiesenen Ungleichung

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq C \|u - I_h u\|_{h,\Omega}, \quad (2.9)$$

mit C unabhängig von $h \in (0, h_0]$ und $\varepsilon \in (0, 1)$. Hier wird eine zweite diskrete Norm $\|\cdot\|_{h,\Omega}$ verwendet, die von der Bilinearform $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$ abgeleitet ist:

$$\begin{aligned} \|v\|_{h,\Omega}^2 &= \sum_{i=1}^2 \left(\varepsilon^2 \|\nabla v^i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|\sqrt{c}v^i\|_{0,\Omega_i}^2 + \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_i \frac{\partial v^i}{\partial n_i} \right\|_{0,E}^2 \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Unter der Annahme realistischer Glattheitsvoraussetzungen über die Lösung u in Abhängigkeit von ε , vergl. etwa [Ape99], kann die folgende Abschätzung für den Fehler $u - u_h$ (u_h von (2.7)) bewiesen werden, die zugleich die Konvergenz gleichmäßig bezüglich des Parameters ε ausweist:

$$\|u - u_h\|_{1,h}^2 \leq C (\varepsilon |\ln \varepsilon|^3 h^2 + h^4).$$

Die Konstante C ist unabhängig von $h \in (0, h_0]$ und $\varepsilon \in (0, 1)$.

Zur Illustration der theoretischen Resultate zur Konvergenz durch numerische Beispiele wird auf [HP03, HP05, Poe05] verwiesen.

Die Fourier-Finite-Elemente-Methode mit Nitsche-Mortaring

Für die effiziente Behandlung von RWA in 3D werden häufig sowohl Methoden zur Dimensionsreduktion als auch Gebietszerlegungsmethoden angewendet. Beide Methoden ermöglichen die Parallelisierung der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen.

Eine Kombination der sog. Fourier-Finite-Elemente-Methode (vgl. [Hei96, HJ04, HJ06]) mit der Nitsche-Finite-Elemente-Methode als Mortar-Methode (siehe auch [HP02, HJ04, HJ06]) wurde für die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichletrandbedingungen:

$$-\Delta_3 \hat{u} := -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i^2} = \hat{f} \quad \text{in } \hat{\Omega}, \quad \hat{u} = 0 \quad \text{auf } \partial \hat{\Omega}, \quad \hat{\Omega} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.11)$$

untersucht. Dabei sei $\widehat{\Omega}$ ein beschränktes, axialsymmetrisches Gebiet, und die Punktmenge $\widehat{\Omega} \setminus \Gamma_0$ (Γ_0 : der in der x_3 -Achse enthaltene Teil von $\widehat{\Omega}$) werde durch Rotation einer polygonalen Meridianebene Ω_a um die x_3 -Achse erzeugt, siehe Abbildung 2.6(a).

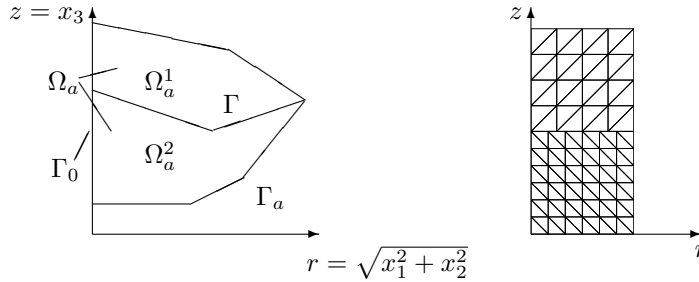


Abbildung 2.6: (a) Gebiet Ω_a mit Teilgebieten; (b) Non-matching mesh

Im weiteren wird davon ausgegangen, dass die Geometrie des Gebietes $\widehat{\Omega}$ die Voraussetzungen erfüllt um eine reguläre Lösung (d.h. $\hat{u} \in H^2(\widehat{\Omega})$) des Randwertproblems zu garantieren, siehe [HJ06]. Auf Grund der Axialsymmetrie des Gebietes $\widehat{\Omega}$ wird eine Transformation in Zylinderkoordinaten r, φ, z ($x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, x_3 = z$), mit $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ vorgenommen, wodurch die RWA (2.11) die Gestalt

$$-\Delta_{r,\varphi,z} u := -\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \Gamma_a \times (-\pi, \pi] \quad (2.12)$$

erlangt, mit $u(r, \varphi, z) := \hat{u}(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ (und analog mit f, \hat{f}) sowie $\Gamma_a := \partial\Omega_a \setminus \Gamma_0$, vgl. Abbildung 2.6(a). Für die Funktionen u und f wird mit Hilfe des Funktionensystems $\{e^{ik\varphi}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($i^2 = -1; \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$) eine partielle Fourieranalyse bzgl. des Rotationswinkels φ vorgenommen:

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(r, z) e^{ik\varphi}, \quad u_k(r, z) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi, z) e^{-ik\varphi} d\varphi \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Mit Hilfe dieser Fourieranalyse wird die 3D-RWA (2.12) in eine unendliche Folge entkoppelter 2D-RWA:

$$\begin{aligned} -\left\{ \frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_k}{\partial r} \right\} + \frac{k^2}{r^2} u_k &= f_k \text{ in } \Omega_a \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ u_k &= 0 \text{ on } \Gamma_a \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad u_k = 0 \text{ on } \Gamma_0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

zerlegt, wobei u_k ($k \in \mathbb{Z}$) die Fourierkoeffizienten der Lösung u von (2.12) sind. Zur näherungsweisen Lösung der 2D-RWA (2.13) wird die im folgenden beschriebene Nitsche-Finite-Elemente-Diskretisierung (kurz: Nitsche-FE-Diskretisierung) eingesetzt. Hierzu wird eine Zerlegung des Gebietes Ω_a in zwei polygonal berandete Teilgebiete Ω_a^1, Ω_a^2 mit $\overline{\Omega}_a = \overline{\Omega}_a^1 \cup \overline{\Omega}_a^2, \quad \Omega_a^1 \cap \Omega_a^2 = \emptyset, \quad \Gamma = \overline{\Omega}_a^1 \cap \overline{\Omega}_a^2$ (siehe Abbildung 2.6(a)) vorgenommen. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist dann die Lösung der RWA (2.13) äquivalent zur Lösung des folgenden Problems:

Finde $(u_k^1, u_k^2) = (u_k|_{\Omega_a^1}, u_k|_{\Omega_a^2})$ derart, dass

$$\begin{aligned} -\left\{ \frac{\partial^2 u_k^i}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_k^i}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_k^i}{\partial r} \right\} + \frac{k^2}{r^2} u_k^i &= f_k \text{ in } \Omega_a^i, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial u_k^1}{\partial n_1} + \frac{\partial u_k^2}{\partial n_2} &= 0 \text{ auf } \Gamma, \quad u_k^1 = u_k^2 \text{ auf } \Gamma \end{aligned} \quad (2.14)$$

sowie die Randbedingungen $u_k^i = 0$ auf $\partial\Omega_a^i \cap \Gamma_a$, $u_k^i = 0$ auf $\partial\Omega_a^i \cap \Gamma_0$ (nur für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) erfüllt sind; in (2.14) bezeichnet n_i ($i = 1, 2$) die Außennormale zu $\partial\Omega_a^i \cap \Gamma$.

Für die numerische Approximation der Lösungen von (2.14) werden auf den Teilgebieten Ω_a^i ($i = 1, 2$) quasi-uniforme Triangulationen \mathcal{T}_h^i ($i = 1, 2$; $h \in (0, h_0]$: Vernetzungsparameter), bestehend aus Dreiecken T ($T = \bar{T}$), eingeführt. Die Triangulationen \mathcal{T}_h^1 und \mathcal{T}_h^2 sind unabhängig voneinander und müssen an der Schnittlinie Γ der beiden Teilgebietsränder nicht zusammenpassen (non-matching mesh). Abbildung 2.6(b) zeigt ein einfaches Beispiel für eine solche Vernetzung. Die mit Hilfe von $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$ definierten Finite-Elemente-Räume werden mit $V_{ah} := V_{ah}^1 \times V_{ah}^2$ und $W_{ah} := W_{ah}^1 \times W_{ah}^2$ bezeichnet, wobei V_{ah}^i ($i = 1, 2$) den Raum der über Ω_a^i stetigen, stückweise linearen Funktionen bezeichnet; für die Funktionen aus W_{ah}^i ist zusätzlich die homogene Dirichlet-Randbedingung auf Γ_0 (vgl. auch (2.13)) erfüllt. Weiterhin wird eine aus Intervallen $E = \bar{E}$ bestehende Vernetzung \mathcal{E}_h der Schnittlinie Γ eingeführt. In [HJ04, HJ06] werden weitere Bedingungen an \mathcal{E}_h genauer erläutert.

Die Nitsche-FE-Approximationen $u_{0h} = (u_{0h}^1, u_{0h}^2) \in V_{ah}$ und $u_{kh} = (u_{kh}^1, u_{kh}^2) \in W_{ah}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, der Lösungen $u_k = (u_k^1, u_k^2)$ von (2.14) sind definiert als Lösungen der Gleichungen

$$\mathcal{B}_{h,k}(u_{kh}, v_h) = \mathcal{F}_{h,k}(v_h) \quad \forall v_h \in W_{ah}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (\text{bzw. } \forall v_h \in V_{ah}, \quad k = 0) \quad (2.15)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{h,k}(u_h, v_h) &:= \sum_{i=1}^2 \left\{ (\nabla u_h^i, \nabla v_h^i)_{1/2, \Omega_a^i} + k^2 (u_h^i, v_h^i)_{-1/2, \Omega_a^i} \right\} - \left\langle \alpha_1 \frac{\partial u_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial u_h^2}{\partial n_2}, v_h^1 - v_h^2 \right\rangle_{1/2, \Gamma} \\ &\quad - \left\langle \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2}, u_h^1 - u_h^2 \right\rangle_{1/2, \Gamma} + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} (u_h^1 - u_h^2, v_h^1 - v_h^2)_{1/2, E} \quad (2.16) \\ \mathcal{F}_{h,k}(v_h) &:= \sum_{i=1}^2 (f_k^i, v_h^i)_{1/2, \Omega_a^i} \end{aligned}$$

und reellen Parametern α_i ($i = 1, 2$) mit $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Gamma}$ ist das $[H_{1/2, *}^{1/2}(\Gamma)]' \times H_{1/2, *}^{1/2}(\Gamma)$ -Dualitätspaar (siehe [HJ04]) bezeichnet, $(\cdot, \cdot)_{\beta, E}$ ($\beta = \pm 1/2$) ist das gewichtete $L_{2, 1/2}(E)$ Skalarprodukt $(v, w)_{\beta, E} = \int_E v \bar{w} r^\beta ds$ (r : Abstand zur Rotationsachse) und γ eine hinreichend große positive Konstante (siehe [HJ04, HJ06]). Die wesentlichen Unterschiede zwischen $\mathcal{B}_{h,k}(\cdot, \cdot)$ aus (2.16) und den in [HP02, HN03] betrachteten Bilinearformen bestehen im Vorhandensein von Gewichtsfaktoren der Form r^β , $\beta = \pm 1/2$, im Skalarprodukt sowie in der Abhängigkeit vom Fourierparameter k . Dies erfordert modifizierte Techniken beim Nachweis der Elliptizität und Beschränktheit von $\mathcal{B}_{h,k}(\cdot, \cdot)$ sowie vor allem beim Beweis von Abschätzungen für den Approximationsfehler $u_k - u_{kh}$ ($k \in \mathbb{Z}$) in geeigneten Normen; für Details sei auf [HJ04, HJ06] verwiesen.

Mit Hilfe der Räume V_{hN} und der Funktionale $\mathcal{B}_h^N(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{F}_h^N(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} V_{hN} &:= \left\{ v(r, \varphi, z) = \sum_{|k| \leq N} v_{kh}(r, z) e^{ik\varphi} : v_{0h} \in V_{ah}, v_{kh} \in W_{ah} \quad (1 \leq |k| \leq N) \right\}, \\ \mathcal{B}_h^N(u, v) &:= 2\pi \sum_{|k| \leq N} \mathcal{B}_{h,k}(u_k, v_k), \quad \mathcal{F}_h^N(v) := 2\pi \sum_{|k| \leq N} \mathcal{F}_{h,k}(v_k) \end{aligned}$$

wird die kombinierte Fourier-Nitsche-FE-Methode zur Lösung der 3D-RWA (2.12) definiert:

$$\text{Finde } u_{hN} \in V_{hN} \text{ so dass } \mathcal{B}_h^N(u_{hN}, v_{hN}) = \mathcal{F}_h^N(v_{hN}) \quad \forall v_{hN} \in V_{hN}. \quad (2.17)$$

Die Lösung u_{hN} von (2.17) entsteht durch Fouriersynthese der Lösungen $u_{kh} = (u_{kh}^1, u_{kh}^2)$ der 2D-RWA (2.15):

$$u_{hN} = (u_{hN}^1, u_{hN}^2) \quad \text{mit} \quad u_{hN}^i = \sum_{|k| \leq N} u_{kh}^i(r, z) e^{ik\varphi} \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Das Hauptresultat der Konvergenzanalyse für die kombinierte Fourier-Nitsche-FE-Methode besteht in den folgenden Abschätzungen (zum Beweis siehe [HJ04, HJ06]):

$$\|u - u_{hN}\|_{1,h,\Omega} \leq C(h + N^{-1})\|f\|_{X_{1/2}^0(\Omega)}, \quad \|u - u_{hN}\|_{X_{1/2}^0(\Omega)} \leq C(h^2 + N^{-2})\|f\|_{X_{1/2}^0(\Omega)} \quad (2.18)$$

für die Lösung u der 3D-RWA (2.12) und ihre Approximation u_{hN} aus (2.17). Die H^1 -ähnliche Norm $\|\cdot\|_{1,h,\Omega}$ in (2.18) ist gegeben durch

$$\|v\|_{1,h,\Omega}^2 := \sum_{i=1}^2 |v^i|_{X_{1/2}^1(\Omega^i)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{X_{1/2}^0(E \times (-\pi, \pi])}^2, \quad (2.19)$$

mit $\Omega^i := \Omega_a^i \times (-\pi, \pi]$, $i = 1, 2$. Die $X_{1/2}^1$ -Halbnorm (bzw. die $X_{1/2}^0$ -Norm) in (2.19) resultiert aus der H^1 -Halbnorm (bzw. L_2 -Norm) nach Transformation der entsprechenden Funktion in Zylinderkoordinaten, siehe auch [Hei96, HJ04, HJ06]. Die Abschätzungen in (2.18) sagen insbesondere aus, dass die Diskretisierungsparameter h und N unabhängig voneinander gewählt werden können.

Bei den numerischen Experimente zur kombinierten Fourier-Nitsche-FE-Methode wurde eine RWA vom Typ (2.12) mit zwei Varianten einer Gebietszerlegung untersucht. Die Meridianebene Ω_a ist ein Fünfeck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ und $(0, 2)$, siehe Abbildung 2.7. Die rechte Seite f wird so gewählt, dass die exakte Lösung der RWA (2.12) lautet:

$$u(r, \varphi, z) = -r^2(r - z - 1)(r + z - 3)(z^2 - 2z)\Phi(\varphi) \quad \text{mit} \quad \Phi(\varphi) := -[|\varphi|(\pi + \varphi)]^{1.51} \quad \text{für } \varphi \in (-\pi, 0] \quad \text{und} \quad \Phi(\varphi) := [\varphi(\pi - \varphi)]^{1.51} \quad \text{für } \varphi \in (0, \pi].$$

Für das Beispiel 1 sind die Teilgebiete durch $\Omega_a^1 = \{(r, z) \in \Omega_a : z > 1\}$ und $\Omega_a^2 = \{(r, z) \in \Omega_a : z < 1\}$ gegeben. Abbildung 2.7(a) zeigt dieses Gebiet mit der Anfangsvernetzung. Für das Beispiel 2 wurden die Teilgebiete $\Omega_a^1 = \Omega_a \setminus \overline{\Omega_a^2}$, $\Omega_a^2 = (0.5, 1) \times (0.5, 1.5)$ gewählt, siehe Abbildung 2.7(b). Die Anfangsvernetzung wurde jeweils durch Dreiecksviertelung verfeinert, wobei insgesamt fünf Verfeinerungslevel verwendet wurden: $\{h_1, h_2, \dots, h_5\}$. Für die Diskretisierung bzgl. N (Anzahl der Fourierkoeffizienten der Näherungslösung) wurden die folgenden fünf Level verwendet: $N_1 = 8$ und $N_{i+1} = 2N_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Der experimentellen Ermittlung der Konvergenzordnung liegen die Relationen

$$\|u - u_{hN}\|_{X_{1/2}^0(\Omega)} \approx C_1^{(0)} h^{\beta_0} + C_2^{(0)} N^{-\delta_0}, \quad \|u - u_{hN}\|_{1,h,\Omega} \approx C_1^{(1)} h^{\beta_1} + C_2^{(1)} N^{-\delta_1} \quad (2.20)$$

zugrunde. Die Parameter $C_1^{(i)}$ und $C_2^{(i)}$ ($i = 1, 2$) wurden für zwei benachbarte Level von h und N als annähernd konstant vorausgesetzt. Die Tabelle 2.1 zeigt die in den Experimenten erzielten Fehlernormanteile $e_{h,0}$, $e_{h,1}$ bzgl. des Diskretisierungsparameters h

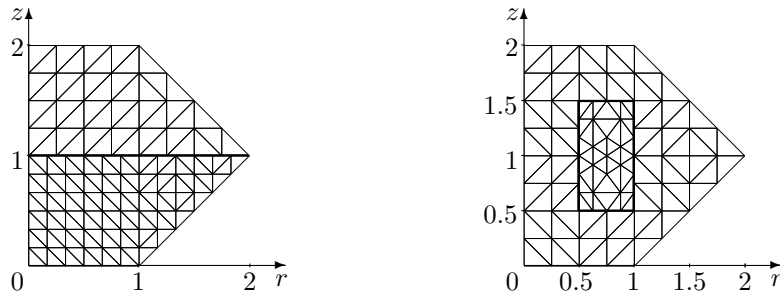


Abbildung 2.7: (a) Teilgebiete für Beispiel 1; (b) Teilgebiete für Beispiel 2

für die Level h_1, \dots, h_5 bei festem $N = 64$ und die daraus ermittelten Konvergenzordnungen $\beta_{obs,0}, \beta_{obs,1}$.

Level	Beispiel 1				Beispiel 2			
	$e_{h,0}$	$\beta_{obs,0}$	$e_{h,1}$	$\beta_{obs,1}$	$e_{h,0}$	$\beta_{obs,0}$	$e_{h,1}$	$\beta_{obs,1}$
h_1	1.9744e-1	–	3.2666e 0	–	2.1707e-1	–	3.2335e 0	–
h_2	5.2963e-2	1.90	1.6019e 0	1.03	5.7896e-2	1.91	1.6267e 0	0.99
h_3	1.3735e-2	1.95	7.9030e-1	1.02	1.4979e-2	1.95	8.1276e-1	1.00
h_4	3.4580e-3	1.99	3.9249e-1	1.01	3.7667e-3	1.99	4.0595e-1	1.00
h_5	8.6936e-4	1.99	1.9562e-1	1.00	9.4788e-4	1.99	2.0286e-1	1.00

Tabelle 2.1: Fehlernormen und Konvergenzordnungen für $h = h_1, \dots, h_6$ und $N = 64$

Level	$e_{N,0}$	$\delta_{obs,0}$	$e_{N,1}$	$\delta_{obs,1}$
N_1	4.3976e-2	–	5.9030e-1	–
N_2	1.1859e-2	1.89	3.0529e-1	0.95
N_3	3.0510e-3	1.96	1.5447e-1	0.98
N_4	7.6852e-4	1.99	7.6487e-2	1.01
N_5	1.8893e-4	2.02	3.6008e-2	1.09

Tabelle 2.2: Fehlernormen und Konvergenzordnungen für $h = h_5$ und $N = N_1, \dots, N_5$

Die beobachteten Konvergenzordnungen zeigen für beide Beispiele eine gute Übereinstimmung mit den gemäß der Abschätzungen (2.18) theoretisch erwarteten Werten $\beta_{exp,0} = 2, \beta_{exp,1} = 1$.

In der Tabelle 2.2 sind die experimentell ermittelten Fehlernormanteile $e_{N,0}, e_{N,1}$ bzgl. des Diskretisierungsparameters N für die Level N_1, \dots, N_5 bei festem $h = h_5$ und die entsprechenden Werte $\delta_{obs,0}, \delta_{obs,1}$ dargestellt. Es wird nicht zwischen Beispiel 1 und Beispiel 2 unterschieden, da die erzielten Resultate übereinstimmten. Die Resultate aus Tabelle 2.2 bestätigen die theoretisch erwarteten Konvergenzordnungen $\delta_{exp,0} = 2, \delta_{exp,1} = 1$.

Lamé Gleichungen

In [Poe05] wird die Mortar-Methode nach Nitsche für die Lamé Gleichungen betrachtet, wobei gemischte Randbedingungen und Polygonegebiete zugelassen sind. Für die Lösungen u (Lösung, Räume jeweils vektoruell) des Randwertproblems gilt: $u \in H^{1+\delta}(\Omega)$,

$\delta > 0$, δ . In [Poe05] werden für die Behandlung der Normalspannungen Sobolevräume mit Potenzgewichten r^β angewendet (da $\sigma n|_\Gamma \notin L_2(\Gamma)$ gilt) und neue Werkzeuge (Fehlerfunktionale, Spursätze) für die Fehlerabschätzung bearbeitet. Diese führen auch bei verminderter Glattheit der Lösung zu optimalen Fehlerabschätzungen in einer diskreten H^1 -ähnlichen und der L_2 -Norm. So können für stückweise lineare Ansätze, die unstetig auf polygonalem Interface Γ sind, die Konvergenzraten $\mathcal{O}(h)$ bzw. $\mathcal{O}(h^2)$ nachgewiesen werden. Im Ergebnis numerischer Experimente werden Aussagen zu den Konvergenzraten gemacht, die in guter Übereinstimmung mit den theoretischen Resultaten liegen.

2.4.2 Teilproblem: Kontakt

Die folgenden Grafiken sollen die Ergebnisse der Vorgehensweise aus Abschnitt 2.3.3 illustrieren.

A) Zwei Körper

Als erstes Beispiel zum Kontakt eines elastischen Körpers mit einem zweiten sei das in Abbildung 2.8 skizzierte Problem betrachtet.

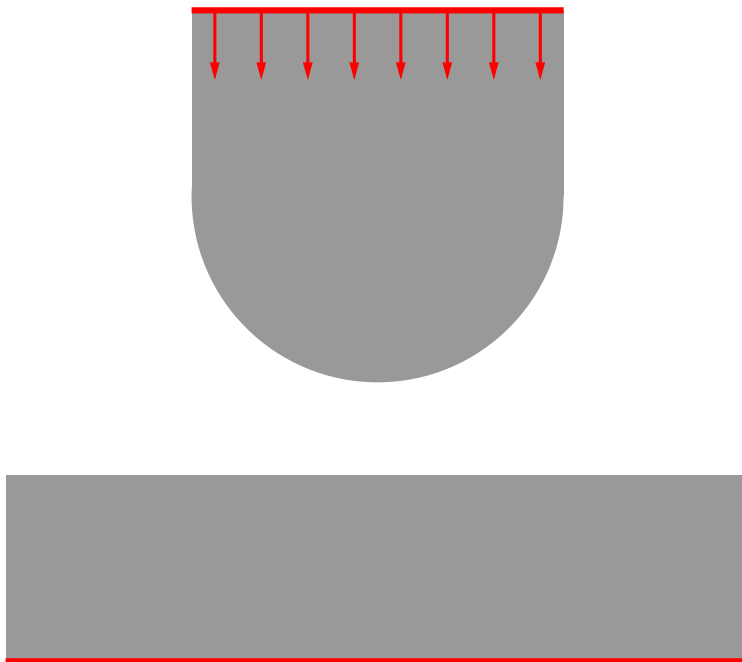


Abbildung 2.8: Zweikörperkontaktproblem

Der unterer rechteckige Körper ruht auf einer festen Unterlage, d.h. in seinem rot markierten unteren Kantenbereich ist durch eine Dirichlet-Randbedingung einer Verschiebung von Null vorgegeben.

Der obere Körper wird an seiner oberen Kante durch eine vorgegebene Verschiebung in den unteren Körper hineingedrückt.

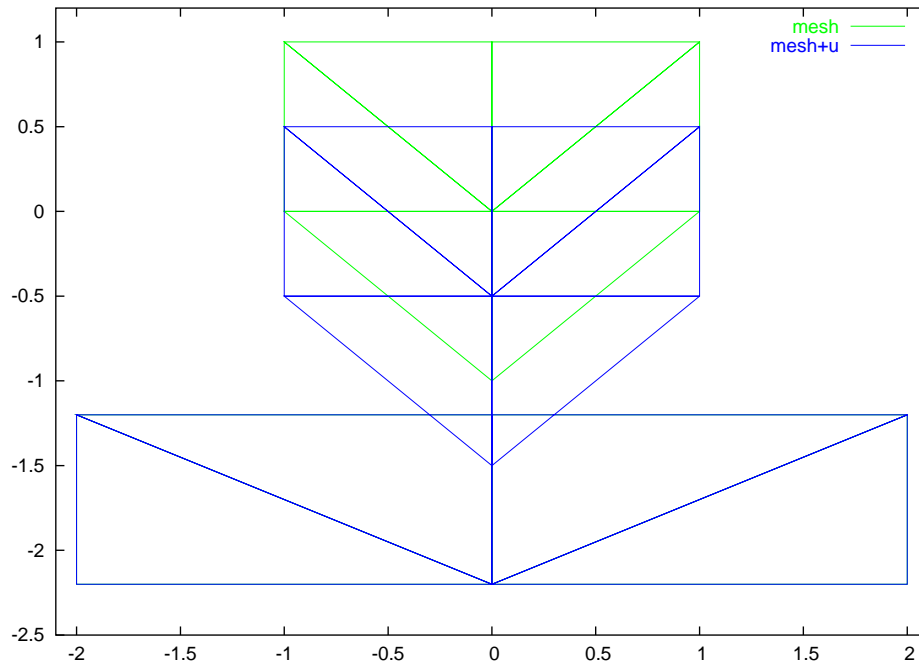


Abbildung 2.9: Ausgangsvernetzung zum Zweikörperkontaktproblem

Beide Körper bestehen aus gleichartigem Material. In Abbildung 2.9 ist die Vernetzung der Ausgangssituation dargestellt. Das halbkeisförmige untere Stück des oberen Körpers ist erst durch zwei Elemente vernetzt, weshalb es als Dreieck erscheint. Die zugehörigen Kanten tragen jedoch die notwendigen Geometrieinformationen, so dass bei weiterer Verfeinerung die wahre Geometrie immer besser approximiert wird.

Insbesondere ist im 0-ten Schritt noch kein Eindringungstest vorgenommen worden, der mittlere untere Knoten des oberen Körpers ist in den unteren Körper eingedrungen.

Im nächsten Schritt der Verfeinerung (Abbildung 2.10) wird dieses Eindringen erkannt und eine konforme Lösung bestimmt.

Mit weiteren Verfeinerungsschritten wird die Kontaktzone und die Kantengeometrie immer besser aufgelöst. In den Abbildung 2.11 und 2.12 ist die Lösung nach 8 Verfeinerungsschritten dargestellt. Zur besseren Übersicht in der Kontaktzone wurde jedoch in Abbildung 2.12 der obere Körper bei der Darstellung ein kleines Stück vom unteren Körper zurückgezogen.

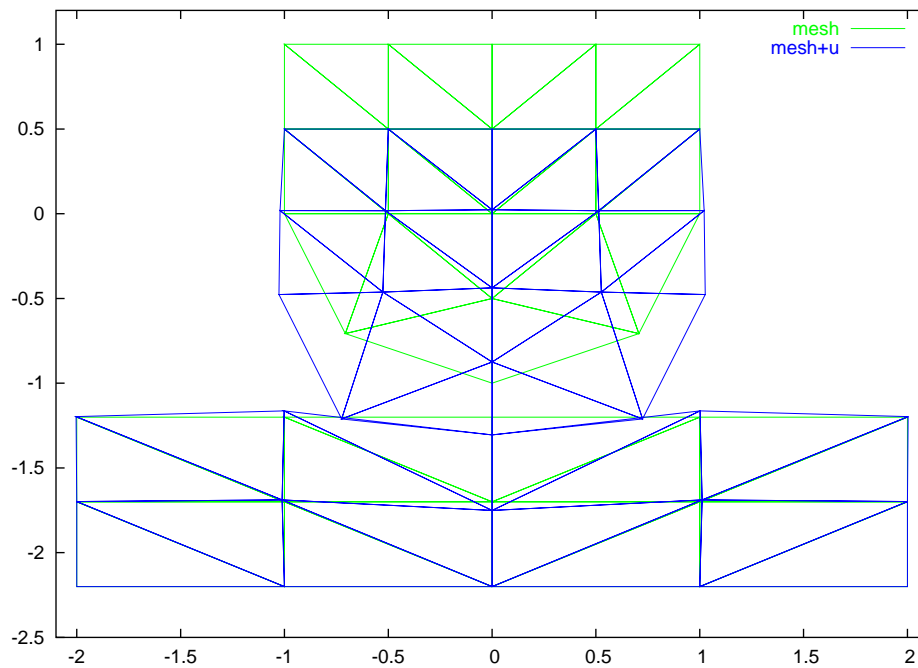


Abbildung 2.10: Zweikörperkontaktproblem nach dem ersten Verfeinerungsschritt

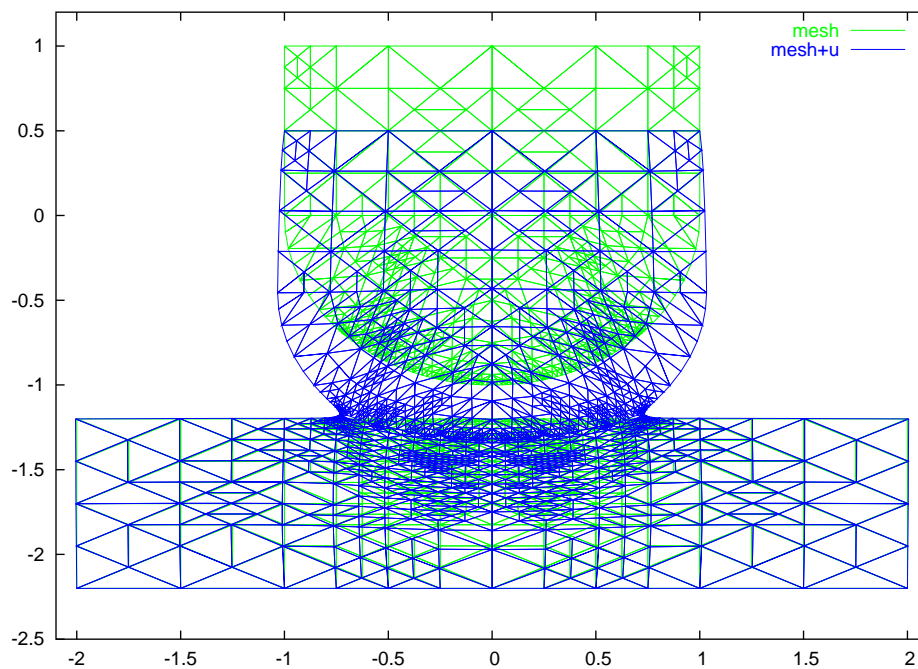


Abbildung 2.11: Zweikörperkontaktproblem nach mehreren Verfeinerungsschritten

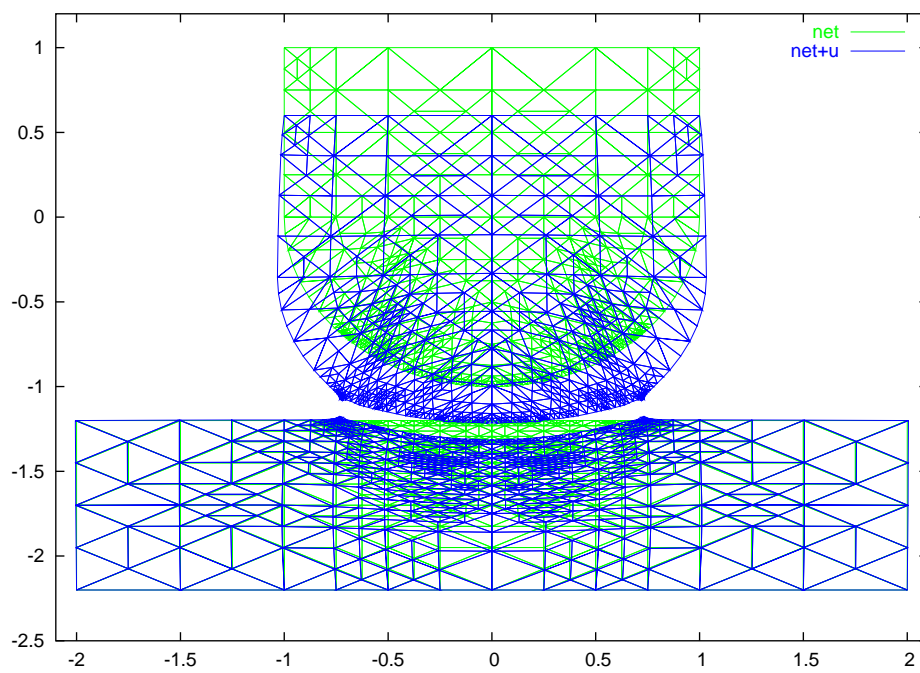


Abbildung 2.12: Abbildung 2.11 mit getrennten Körpern

B) Kontakt eines elastischen Körpers mit sich selbst

Als Beispiel zum Kontakt eines elastischen Körpers mit sich selbst sei das in Abbildung 2.13 skizzierte Problem betrachtet.

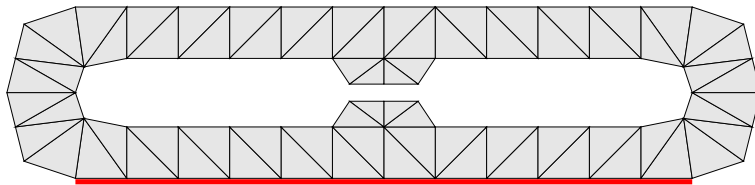


Abbildung 2.13: Kontaktproblem eines Körpers in sich

Ein elastischer Körper ruht auf einer festen Unterlage, d.h. im rot markierten Kantenbereich ist durch eine Dirichlet-Randbedingung einer Verschiebung von Null vorgegeben.

Im inneren des Körpers greift eine konstante, nach unten gerichtete Volumenlast an.

Ohne Berücksichtigung des Kontaktes des Körpers in sich, führt die Berechnung des Verschiebungsfeldes zu einer Selbstdurchdringung des Körpers, wie in Bild 2.14 dargestellt ist.

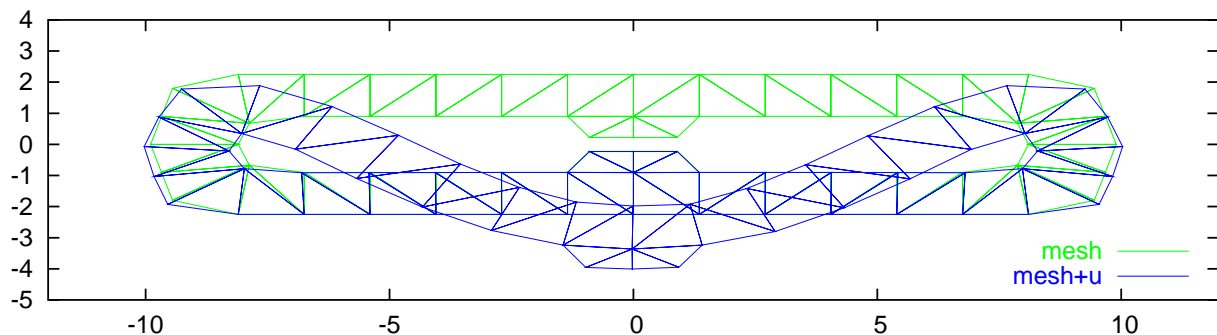


Abbildung 2.14: Verschiebungsfeld ohne Kontakt

Beachtet man jedoch die potentielle Kontaktzone in der Mitte des Körpers, so erhält man ein konformes Verschiebungsfeld wie in den Bildern 2.15 und 2.16 dargestellt.

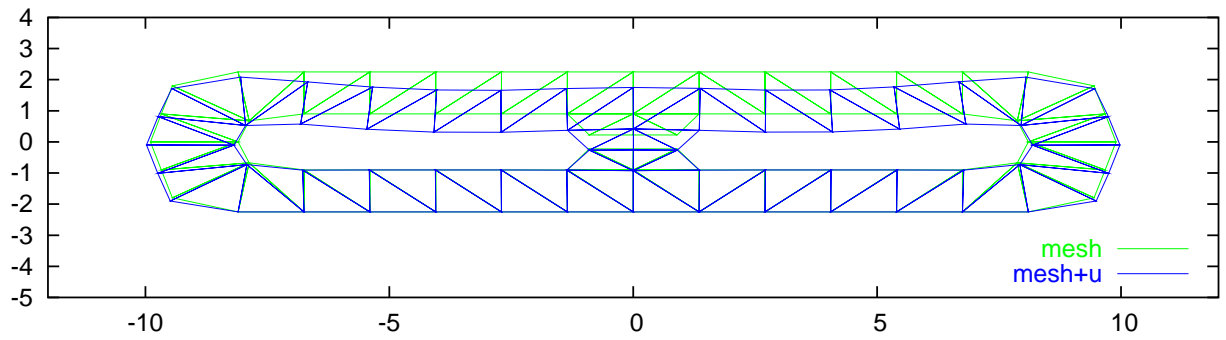


Abbildung 2.15: Verschiebungsfeld mit Kontakt

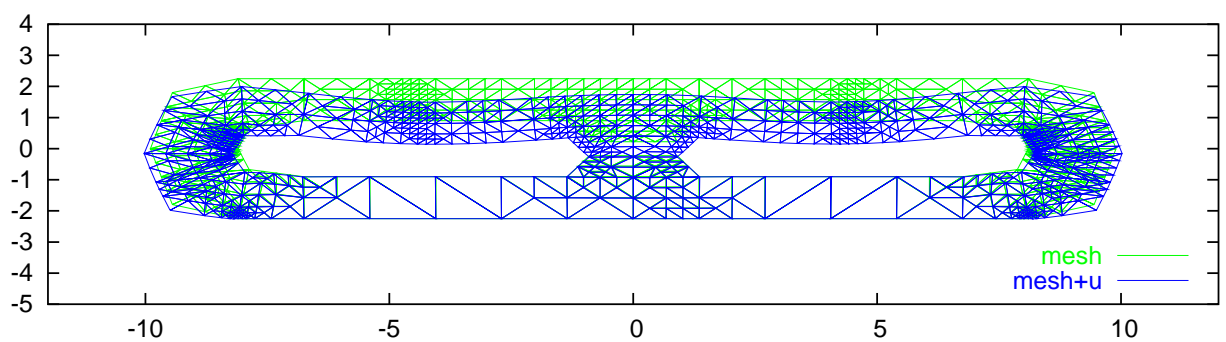
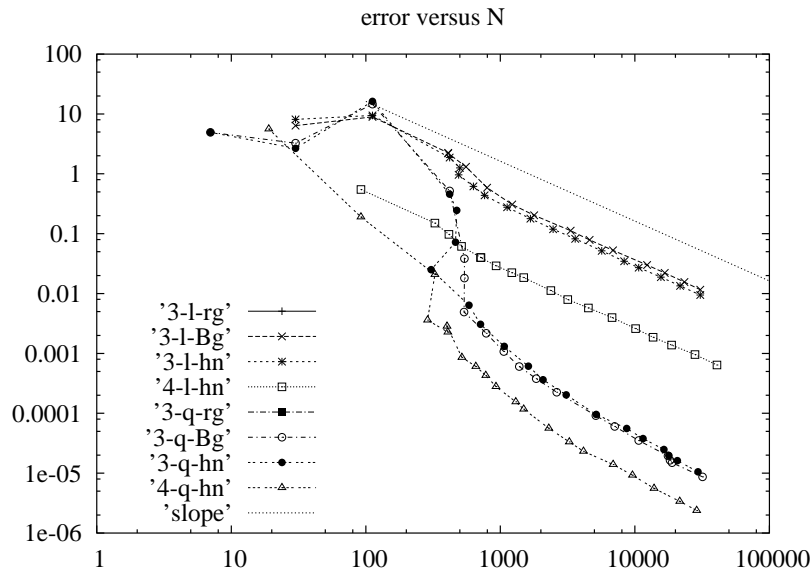


Abbildung 2.16: Verschiebungsfeld mit Kontakt

Insgesamt muss bemerkt werden, dass die Einbettung des Kontaktalgorithmus in die adaptive Finite Elemente Technik einen sehr robusten Gesamtalgorithmus liefert. Wie folgender Plot des Fehlerschätzers über die Freiheitsgrade zeigt, entsteht insgesamt ein Aufwand, der kaum größer ist als bei einem einfachen linear elastischen Deformationsproblem ohne Kontakt.



2.4.3 Teilaufgabe: randkonzentrierte hp -FEM

Wollen wir die Lösung eines Randwertproblems mittels randkonzentrierter hp -FEM bestimmen, so führt dies auf ein großdimensionales lineares Gleichungssystem, wobei die Anzahl N der Unbekannten durchaus die Größenordnung von einigen Millionen annehmen kann. Speziell für den 2D-Fall wurde bereits in [KM02] ein auf der LU -Zerlegung der Steifigkeitsmatrix beruhender Lösungsalgorithmus vorgestellt, der uns die gesuchte Lösung nach $O(N \log^8 N)$ Rechenoperationen liefert. Wollen wir jedoch 3D-Probleme lösen, die schwache Besetztheit der Steifigkeitsmatrix ausnutzen oder aber haben wir, um Speicherplatz zu sparen, die Steifigkeitsmatrix gar nicht explizit aufgestellt, sondern stattdessen nur eine Matrix-Vektor-Multiplikation implementiert, so kommen eigentlich nur iterative Lösungsverfahren in Frage. Das wohl bekannteste Iterationsverfahren ist der PCG-Algorithmus. Betrachten wir das zu lösende lineare Gleichungssystem

$$Au = b \quad (2.21)$$

mit symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$ und geeignetem Vorkonditionierer $B^{-1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, ebenfalls symmetrisch positiv definit, so bestimmt der PCG-Algorithmus, ausgehend von einer Startnäherung $u_0 \in \mathbb{R}^N$, eine Folge $\{u^k\}_{k=0,1,\dots} \subset \mathbb{R}^N$, die mit

$$\langle u, v \rangle_A := \langle Au, v \rangle, \quad \|u\|_A^2 := \langle u, u \rangle_A$$

und exakte Lösung u^* , der Abschätzung

$$\|u^* - u^k\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k \|u^* - u^0\|_A, \quad \kappa = \text{cond}_2(AB^{-1}) = \frac{\lambda_{\max}(AB^{-1})}{\lambda_{\min}(AB^{-1})}$$

genügt. Wie wir an dieser Fehlerabschätzung sehen, ist die Konditionszahl κ von entscheidender Bedeutung für die Konvergenzgeschwindigkeit des PCG-Algorithmus. Leider ist bei der randkonzentrierten FEM aber ausschließlich das reine Dirichlet-Problem von Haus aus gut konditioniert. Aus der hierfür in [KM03] gezeigten Schranke von $O(\log^\beta N)$ für die Konditionszahl der diagonalskalierten Steifigkeitsmatrix, wobei $\beta \geq 0$ von der Wahl der Formfunktionen abhängt, folgt, dass sich im Falle reiner Dirichlet-Randbedingungen selbst mit simpler Diagonalskalierung noch akzeptable Konvergenzraten im PCG erzielen lassen. Ganz anders sieht die Sache jedoch aus, sobald wir es mit Neumann- bzw. gemischten Randbedingungen zu tun haben. Um auch diese Probleme effektiv lösen zu können, ist ein guter Vorkonditionierer unentbehrlich.

Wir haben zwei auf der Additiv-Schwarz-Methode basierende Vorkonditionierer für die randkonzentrierten FEM entwickelt, die sowohl für 2- als auch 3-dimensionale Probleme mit Dirichlet-, Neumann- oder gemischten Randbedingungen anwendbar sind und dabei beweisbar zu optimalen, von der Problemgröße N unabhängigen Konditionszahlen $O(1)$ führen. Für eine detaillierte Beschreibung sowie den theoretischen Hintergrund verweisen wir auf [Eib06] und betrachten an dieser Stelle stattdessen zwei Beispielrechnungen.

Unser erstes Beispiel ist ein Randwertproblem auf dem L-Gebiet: Wir betrachten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{auf} & \quad \Omega = (0, 1)^2 \setminus ([0, 1] \times [-1, 0]) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{auf} & \quad \Gamma_N = (\{-1\} \times [-1, 1]) \cup ([-1, 1] \times \{1\}) \\ u &= 0 & \text{auf} & \quad \Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N \end{aligned}$$

mit einer rechten Seite f , so dass die exakte Lösung gegeben ist durch

$$u = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right) (1 - r^2 \cos^2 \varphi) (1 - r^2 \sin^2 \varphi) (1 + r \cos \phi)(1 - r \sin \phi).$$

Mit dem zweiten Beispiel wollen wir ein Gebiet mit kompliziertem Rand betrachten: Auf dem in Abbildung (2.18) dargestellten Gebiet betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 & \text{auf} & \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{auf} & \quad \Gamma_N = \{(x, y) \in \partial\Omega \mid y < 0\} \\ u &= 0 & \text{auf} & \quad \Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N. \end{aligned}$$

In beiden Beispielen starten wir mit einem Grobgitter \mathcal{N}_0 und erzeugen mittels eines geeigneten Algorithmus (siehe [Eib06]) eine Folge hierarchisch geschachtelter geometrischer Netze $\{\mathcal{N}_j\}_{j=0,1,\dots,M}$ mit Randgitterweiten $h_j \sim 2^{-j}h_0$. Die zum Netz \mathcal{N}_j gehörige Polynomgradverteilung definieren wir zu

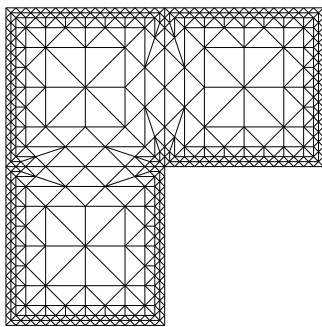
$$p_{K,j} := \left\lfloor \frac{3}{2} + \alpha \ln \left(\frac{h_K}{h_j} \right) \right\rfloor \quad \forall K \in \mathcal{T}(\mathcal{N}_j), \quad \underline{h}_j := \text{Länge der kürzesten Kante aus } \mathcal{N}_j,$$

wobei wir konkret $\alpha = 1$ wählen.

Die Ergebnisse unserer Rechnungen sind in den Abbildungen 2.17 und 2.18 dargestellt. CG steht hierbei für den nicht vorkonditionierten CG-Algorithmus und mit PCG-1 bzw.

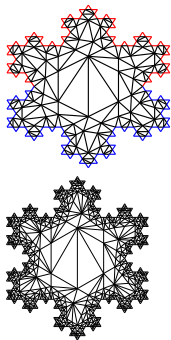
PCG-2 bezeichnen wir unsere beiden Vorkonditionierer. Alle Iterationen wurde mit $u^0 \equiv 0$ gestartet. Die angegebenen Iterationszahlen beziehen sich auf die Anzahl von Iterationsschritten, die notwendig ist, um das Residuum um einen vorgegeben Faktor zu reduzieren. Wie anhand unserer theoretischen Überlegungen (siehe [Eib06]) zu erwarten, bleiben die Iterationszahlen der PCG-Algorithmen beschränkt und liegen deutlich unter denen des CG-Algorithmus.

Abbildung 2.17: (Beispiel L-Gebiet) Links: Netz von Level 4. Rechts: Iterationszahlen um $\|\underline{r}^k\|^2 / \|\underline{r}^0\|^2 \leq 10^{-12}$ zu erreichen



L	#Elemente	p_{max}	N	CG	PCG-1	PCG-2
0	12	1	6	4	4	4
1	48	1	24	14	14	11
2	168	1	84	29	25	18
3	392	1	196	46	36	22
4	840	2	525	87	44	24
5	1736	3	1181	195	51	25
6	3528	3	2657	263	55	27
7	7112	4	5818	368	60	27
8	14280	5	12114	474	63	28
9	28616	6	25070	581	66	29
10	57288	6	51202	691	69	30
11	114632	7	103843	884	71	31
12	229320	8	209003	1120	74	31
13	458696	8	419807	1316	77	31
14	917448	9	841904	1596	79	33
15	1834952	10	1685928	—	81	33

Abbildung 2.18: (Beispiel Schneeflocke) Links: Grobgitter & Netz von Level 1 Rechts: Iterationszahlen um $\|\underline{r}^k\|^2 / \|\underline{r}^0\|^2 \leq 10^{-10}$ zu erreichen



L	#Elemente	p_{max}	N	CG	PCG-1	PCG-2
0	298	1	149	63	44	44
1	1054	3	619	185	78	57
2	3346	4	2096	318	79	62
3	8398	5	5227	477	104	65
4	18826	5	12963	659	106	70
5	40006	6	30024	927	112	78
6	82690	7	66228	1156	120	79
7	168382	7	141311	1644	128	80
8	340090	8	296938	2321	133	81
9	683830	9	613767	3282	138	81
10	1371634	10	1253012	4638	142	81

Literaturverzeichnis

- [AN98] Th. Apel and S. Nicaise. The finite element method with anisotropic mesh grading for elliptic problems in domains with corners and edges. *Math.MethodsAppl.Sci.*, 21:519–549, 1998.
- [Ape99] Th. Apel. *Anisotropic finite elements: Local estimates and applications*. Advances in Numerical Mathematics. Teubner, Stuttgart, 1999. Habilitationsschrift.
- [Eib06] K. Pietsch. Adaptive- und randkonzentrierte hp-FEM. Manuskript zur Dissertation (unveröffentlicht), Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz, 2006.
- [Hei96] B. Heinrich. The Fourier–finite–element–method for Poisson’s equation in axisymmetric domains with edges. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(5):1885–1911, 1996.
- [Hei02] B. Heinrich. Nitsche-type finite element method for elliptic problems with singularities. *PAMM*, 1: 522–523, 2002.
- [Hei03] B. Heinrich. Nitsche-type finite element method for elliptic problems with singularities. *Numerical Mathematics and Applications*, pp. 837– 845, Springer Verlag 2003.
- [HJ04] B. Heinrich and B. Jung. The Fourier-finite-element method with Nitsche mortaring. Preprint SFB393 04-11, TU Chemnitz, 2004.
- [HJ06] B. Heinrich and B. Jung. The Fourier-finite-element method with Nitsche mortaring. to appear in *IMA J. Num. Anal.*, 2006.
- [HN03] B. Heinrich and S. Nicaise. Nitsche mortar finite element method for transmission problems with singularities. *IMA J. Numer. Anal.*, 23:331–358, 2003.
- [HNW97] B. Heinrich, S. Nicaise, and B. Weber. Elliptic interface problems in axisymmetric domains. Part I: Singular functions of non-tensorial type. *Math. Nachr.*, 186:147–165, 1997.
- [HNW00] B. Heinrich, S. Nicaise, and B. Weber. Elliptic interface problems in axisymmetric domains. Part II: The Fourier-finite-element approximation of non-tensorial singularities. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 10(2):571–600, 2000.
- [HP02] B. Heinrich and K. Pietsch. Nitsche type mortaring for some elliptic problem with corner singularities. *Computing*, 68: 217–238, 2002.
- [HP05] B. Heinrich and K. Poenitz. Nitsche type mortaring for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *Computing*, 75: 257–279, 2005.
- [HW96] B. Heinrich and B. Weber. Fourier-finite-element Approximation of Elliptic Interface in Axisymmetric Domains. *Math. Methods in the Applied Sciences*, 19:909–931, 1996.
- [KM02] B.N. Khoromskij and J.M. Melenk. An efficient direct solver for the boundary concentrated FEM in 2D. *Computing*, 69:91–117, 2002.
- [KM03] B.N. Khoromskij and J.M. Melenk. Boundary concentrated finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(1):1–36, 2003.

- [Mel02] J.M. Melenk. *hp*-Finite Element Methods for Singular Perturbations, Springer-Verlag, 2002.
- [Mey99] A. Meyer. Projected PCGM for Handling Hanging Nodes in Adaptive Finite Element Procedures. Preprint SFB393 99-25 TU Chemnitz.
- [Mey02] A. Meyer. Projection Techniques embedded in the PCGM for Handling Hanging Nodes and Boundary Restrictions. in: *Engineering Computational Technology*, B.H.V.Topping and Z.Bittnar,(Eds.) Saxe-Coburg Publ., Stirling, Scotland, 147-165.
- [MeUn04] A. Meyer and R. Unger. Projection methods for contact problems in elasticity. Preprint SFB393 04-04 TU Chemnitz.
- [HN99] B. Heinrich and B. Nkemzi. The Fourier-Finite-Element Method for Lamé Equations in Axisymmetric Domains. Preprint SFB393/99-36, TU Chemnitz, 1999.
- [HP03] B. Heinrich and K. Pönitz. Nitsche type mortaring for singularly perturbed reaction-diffusion problems. Preprint SFB393 03-17 TU Chemnitz, 2003.
- [Fra03] C. Franken. Multi-Wavelet-Basen für nicht-konforme Finite-Elemente. Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz, 2003.
- [Poe05] K. Pietsch. Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche für elliptische Probleme der Ebene. Manuskript zur Dissertation (unveröffentlicht), Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz, 2005.
- [SXZ04] R. Schneider, Y. Xu und A. Zhou. On A Posteriori Error Estimates for Discontinuous Galerkin methods *Advances in Computational Analysis*, to appear 2004.

2.5 Offene Fragen / Ausblick

Kontaktsimulation

Die Ergebnisse der 2D-Simulation legen die Verallgemeinerung ins 3-Dimensionale nahe, was auch bei Anwendungen im Ingenieurbereich die eigentliche Herausforderung darstellt. Technisch erfordert dies keine wesentlichen Änderungen, weil die Projektionsoperatoren analog definiert werden können.

Teilweise sind auftretende Oszillationen im Bereich der Kontaktzone des Zweikörperproblems noch problematisch. Weiterhin ist eine effektive Verwaltung der Knoten und Kantenpaarungen im zweidimensionalen und besonders von Facepaarungen im dreidimensionalen für eine effektive Implementierung noch offen.

Diese Fragen werden zum Teil in der Fortsetzung der Problematik innerhalb des DFG-Projektes ME 1224/5-1 im Paketantrag „Numerische Simulation gekoppelter Aufgaben der Mechanik“ bearbeitet werden.

Nitsche-Mortaring

- a) Für parabolische Differentialgleichungen wären Finite-Elemente-Methoden vom Nitsche-Typ für Gebietszerlegungen im Fall allgemeiner polygonaler Gebiete aus der Sicht der Numerischen Analysis zu begründen. Unter sehr schwachen und anwendungsrelevanten Voraussetzungen interessiert der Nachweis von Eigenschaften der Diskretisierung sowie von Fehlerabschätzungen und Konvergenzraten.
- b) Für elliptische Probleme (Poisson, Lamé) mit gemischten Randbedingungen über allgemeinen polygonalen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wären a posteriori Fehlerabschätzungen für die Finite-Elemente-Methode vom Nitsche-Typ (Nitsche-Mortaring) aus der Sicht der Numerischen Analysis zu begründen.

