Teilprojekt

A11

Gemischte Formulierungen: adaptive finite Elemente und parallele Löser

2.1 Teilprojekt A11

Gemischte Formulierungen: adaptive finite Elemente und parallele Löser

2.1.1 Antragsteller

Prof. Dr. Arnd Meyer, TU Chemnitz, Professur Numerische Analysis

Prof. Dr. Michael Jung, TH Dresden,

2.1.2 Projektbearbeiter

M.Sc. Alexander Smuglyakov, Professur Numerische Analysis
Dipl.-Math. Peter Steinhorst, Professur Numerische Analysis

2.2 Ausgangsfragestellung / Einleitung

Gegenstand dieses Teilprojekts sind gemischte Finite-Elemente-Diskretisierungen, wie sie bei speziellen Anwendungen in der Festkörpermechanik auftreten. Im Zusammenarbeit mit Tp. D1 soll sich wesentlich auf fast inkompressible Materialien (Anwendung in Biologie/Medizin) und auf piezoelektrische Materialien konzentriert werden.

Wir hatten uns zum Ziel gestellt, effiziente Simulationssoftware zu entwickeln, die auf theoretisch fundierten effizienten, d. h. adaptiven und lösungsangepassten, parallelen Lösungsstrategien beruht.

2.3 Forschungsaufgaben / Methoden

2.3.1 Inkompressibilität

Für effiziente Simulationen bei dieser Aufgabenklasse müssen aufgrund Analogie zum Stokes–Problem Elemente mit erfüllter Babu‘ska – Brezzi – Bedingung benutzt werden, deshalb kamen hier die bekannten Taylor–Hood–Elemente zur Anwendung. Das bereits für das Stokes–Problem bestehende adaptive Experimentalprogramm SPC-PM-AdSt wurde zum Programm SPC-PM-AdMix modifiziert, was einige Anpassungen erforderlich machte. Anschließend sollten sowohl der Löser als auch der Fehlerschätzer getestet bzw. im Hinblick auf mögliche Verbesserung untersucht werden. Ein prinzipieller Nachteil des genutzten Lösers (Bramble-Pasciak-CG) ist die Abhängigkeit von zwei zu wählenden Konstanten, zu deren Wahl bisher nur empirische Untersuchungen vorlagen.

2.3.2 Piezoelektrische Probleme

Bei der Kopplung von Verformung und elektrischem Potential in einer analogen Sattelpunktsformulierung war hauptsächlich abzuklären ob und wie eine analoge Babu‘ska – Brezzi – Bedingung zu erfüllen ist. Danach richtet sich die Wahl der Finiten Elemente. Zum zweiten ist eine Modifikations des Lösers (Bramble-Pasciak-CG) vorzusehen, weil die Ordnung des Differentialoperators zum Potential φ jetzt 2 und nicht wie im Modellfall der Stokes–Gleichung 0 ist.

2.4 Ergebnisse

2.4.1 Inkompressibilität

Das als Modifikation von SPC-PM-AdSt entstandene Experimentalprogramm SPC-PM-AdMix funktioniert für Elastizitätsprobleme, bei denen auch inkompressible Materialien ($\nu = 0.5$) im gesamten Gebiet oder Teilgebieten zugelassen sind. Der Löser konnte dabei von Stokes fast 1:1 übernommen werden, lediglich musste die für kompressible Materialien nichtverschwindende Druckmassen-Teilmatrix mit hinzugenommen werden (fußend auf [BP88, MS01]). Ein neues Ergebnis konnte im Hinblick auf die problemangepasste Wahl einer Konstanten gefunden werden. Für die Wahl einer geeigneten Konstante für die Gewichtung der Blöcke im Bramble-Pasciak-CG wurde in [MSt05] eine Strategie beschrieben und an numerischen Testbeispielen untersucht. Unter Voraussetzung guter Vorkonditionierer (z.B. der verwendete Hierarchische-Basen-Vorkonditionierer nach Yserentant in 2D) für den Steifigkeitsanteil des gemischten Problems ist es möglich, durch Berechnung eines Rayleighquotienten einen näherungsweise optimalen Wert für den Gewichtungsparameter zu erhalten. Betrachtungen von Rechengenauigkeit und Iterationszahlen an Testbeispielen motivieren die gewählte Strategie, theoretisch wird diese durch eine Konditionsabschätzung unterlegt. Der Fehlerschätzer wurde analog zum kompressiblen Fall aufgebaut, wobei hier die aufgeteilte Berechnung des Spannungstensors σ in der gemischten Formulierung zu beachten war. Eine Erweiterung von SPC-PM-AdMix auf dreidimensionale Probleme konnte wegen des verkürzten Zeitrahmens bisher leider nicht fertiggestellt werden.

2.4.2 Piezoelektrische Probleme

Die theoretische Fragestellung nach der Notwendigkeit einer analogen Babu‘ska – Brezzi – Bedingung konnte geklärt werden. Da im piezoelektrischen Fall die Systemstruktur

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix}$$

mit koerzivem Teil C besteht, lässt sich das System auch in der unsymmetrischen, aber positiven Struktur

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix}$$

aufschreiben. Es können daher prinzipiell beliebige Elemente für Verschiebung und elektrisches Potential gewählt werden, die Babu‘ska – Brezzi – Bedingung muss nicht notwendigerweise erfüllt werden. Aufgrund der gleichen Ordnung der Differentialoperatoren bieten sich Kombinationen gleichartiger Elemente an, z.B. $\mathcal{P}^1{-}\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2{-}\mathcal{P}^2$ oder $\mathcal{Q}^2{-}\mathcal{Q}^2$.

Für den einfachsten Fall (im piezoelektrischen ist dies linear, transversal isotropes Materialverhalten) konnte durch Modifizierung des zweidimensionalen Experimentalprogramms SPC-PM-AdMix eine Variante SPC-PM-AdPiez erstellt werden, welche für erste Testrechnungen zur Verfügung steht. Noch aus steht die Wahl geeigneter Vorkonditionierungen (die Variante gleichartiger Behandlung beider Teile mit Multilevelverfahren erscheint hier erfolgversprechend) sowie eine Anpassung des Fehlerschätzers, um effektive adaptive Rechnungen zu ermöglichen.

Literaturverzeichnis

[AC00] M. Ainsworth and P. Coggins. The stability of mixed *hp*-finite element methods for Stokes flow on high aspect ratio elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38:1721–1761, 2000.

[AD99] G. Acosta and R. G. Durán. The maximum angle condition for mixed and nonconforming elements. Application to the Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37:18–36, 1999.

[ANS01] Th. Apel, S. Nicaise, and J. Schöberl. A non-conforming finite element method with anisotropic mesh grading for the Stokes problem in domains with edges. *IMA J. Numer. Anal.*, 21:843–856, 2001.

[BP88] J. H. Bramble and J. E. Pasciak. A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems. *Math. Comput.*, 50:1–17, 1988. Corrections in 51:387–388, 1988.

[CF01] C. Carstensen and S. Funken. A posteriori error control in low-order finite element discretisations of incompressible stationary flow problems. *Math. Comp.*, 70:1353–1381, 2001.

[CKN03] E. Creusé, G. Kunert, and S. Nicaise. A posteriori error estimation for the Stokes problem: Anisotropic and isotropic discretizations. Preprint SFB393/03–01, TU Chemnitz, 2003. Submitted to Math. Models Methods Appl. Sci.

[KNJ03] K. Kulshreshtha, N. Nataraj, and M. Jung. Performance of a parallel mixed finite element implementation for fourth order clamped anisotropic plate bending problems in distributed memory environments. *Applied Mathematics and Computation*, 2003. (accepted for publication).

[MS01] A. Meyer and T. Steidten. Improvements and experiments on the Bramble-Pasciak type CG for mixed problems in elasticity. Preprint SFB393/01-13, TU Chemnitz, 2001.

[MSt05] A. Meyer and P. Steinhorst. Überlegungen zur Parameterwahl im Bramble-Pasciak-CG für gemischte FEM. Preprint SFB393/05-07, TU Chemnitz, 2005.

[Ran01] M. Randrianarivony. Stability of mixed finite element methods with anisotropic meshes. Master’s thesis, TU Chemnitz, 2001.

[SK02] M. Scherzer and M. Kuna. Combined analytical and numerical solution of 2D interface corner configurations between dissimilar piezoelectric materials. Int. J. Fracture 127: 61–99, 2004.

[SKS02] F. Shang, M. Kuna and M. Scherzer. A Finite Element procedure for three-dimensional analyses of thermopiezoelectric structures in static applications. Technische Mechanik, Band 22, Heft 3: 235–243, 2002.

[SS98] D. Schötzau and Ch. Schwab. Mixed *hp*-FEM on anisotropic meshes. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8:787–820, 1998.

[SSS99] D. Schötzau, Ch. Schwab, and R. Stenberg. Mixed *hp*-FEM on anisotropic meshes II: Hanging nodes and tensor products of boundary layer meshes. *Numer. Math.*, 83:667–697, 1999.