

Teilprojekt

A12

Finite-Elemente-Methode vom Nitsche-Typ für
nichtkonforme Gebietszerlegungen

2.1 Teilprojekt A12

Finite-Elemente-Methode vom Nitsche-Typ für nichtkonforme Gebietszerlegungen

2.1.1 Antragsteller

Prof. Bernd Heinrich	Prof. Arnd Meyer	Prof. Reinhold Schneider
12.10.1943	08.03.1952	20.03.1957
Angewandte Mathematik	Numerische Analysis	Numerische Mathematik
Fak. für Mathematik	Fak. für Mathematik	Fak. für Mathematik
TU Chemnitz	TU Chemnitz	TU Chemnitz
09107 Chemnitz	09107 Chemnitz	2002 – September 2003
Tel.: (0371) 531-2659	(0371) 531-2659	
Fax: (0371) 531-2657	(0371) 531-2657	ab Oktober 2003 in Kiel:
b.heinrich@mathematik. tu-chemnitz.de	a.meyer@mathematik. tu-chemnitz.de	rs@numerik.uni-kiel.de

2.1.2 Projektbearbeiter

Mitarbeiter der Grundausrüstung:

Prof. Bernd Heinrich	(Angewandte Mathematik)
Prof. Arnd Meyer	(Numerische Analysis)
Prof. Reinhold Schneider	(Numerische Mathematik, 2002 bis Sept. 2003)
PD Dr. Thomas Apel	(Numerische Analysis, 2002 bis Dez. 2003)
Dipl.-Math. techn. Roman Unger	(Numerische Analysis)

Mitarbeiter der Ergänzungsausrüstung:

Dipl.-Math. techn. Kornelia Pönitz (2002 bis August 2003)
Dipl.-Math. techn. Roman Unger

2.2 Ausgangsfragestellung / Einleitung

Nitsche-Mortaring

Für die effiziente numerische Lösung elliptischer Probleme mittels Finite-Elemente Methode (FEM) auf Parallelrechnern sind Gebietszerlegungsmethoden von besonderem Interesse. Die gleichzeitige Anwendung nichtkonformer Teilgebietstriangulationen sowie einer abgeschwächten und koppelnden Stetigkeitsbedingung an den Teilgebietsrändern wird durch so genannte Mortar-Methoden möglich, die häufig über ein Sattelpunktsproblem für die Lösung u der Randwertaufgabe und einem Lagrange-Parameter λ realisiert werden.

Auf einer Idee von Nitsche (1971, cf. [Nit71, Tho97]) beruhend, wurde u.a. durch Stenberg (1998, vergl. auch [Ste98, Arn82]) ein zur Mortar-Methode verwandter Zugang zur Kopplung nichtkonformer Triangulationen (non-matching meshes) und unstetiger Finite-Elemente-Ansätze vorgeschlagen, das so genannte „Nitsche-type mortaring“. Dieser Zugang behandelt die Kopplung nicht wie bisher über Nebenbedingungen, sondern

vereinfachend mittels eines Kopplungstermes, der die Bilinearform des Ausgangsproblems erweitert. Das Verfahren ist dann als Galerkin-Verfahren für die durch den Kopplungsterm modifizierte Variationsgleichung über dem Raum unstetiger Finite-Elemente-Funktionen interpretierbar. Die Finite-Elemente-Methode vom Nitsche-Typ sollte in drei wesentlichen Linien behandelt werden.

1. Analyse der FE-Schemata nach Nitsche als FE-Approximation auf nichtkonformen Teilgebietstriangulationen, insbesondere bezüglich Stabilität und Konvergenzraten der Näherungslösung, bei schwierigen und anwendungsrelevanten Parametersituationen:
 - komplizierte Geometrie des Randes $\partial\Omega$ (Ecken, Kanten), unstetige Koeffizienten, kleine Diffusionskoeffizienten und daraus resultierende Lösungssingularitäten sowie Anisotropie in der Lösung u des Randwertproblems,
 - nichtkonforme Kopplung unregelmäßiger Netze mit lokal verfeinerten (graduierten) sowie anisotropen Netzen.
2. Behandlung von Aufgaben des elastischen Kontaktes, unter besonderer Berücksichtigung des Koppelterms und der effizienten Auflösung der Diskretisierungsschemata, auch unter Einbeziehung der FE-Methode vom Nitsche-Typ.
3. Verallgemeinerung der Nitsche-Methode auf den Fall der schwachen Kopplung der Näherungslösung auf dem Skelett aller Elementkanten einer gegebenen Gebietstriangulation (Discontinuous Galerkin Method), einschließlich Methoden der effizienten Auflösung der linearen Gleichungssysteme mittels Multiskalenmethoden.

Kontaktsimulation

Die numerische Simulation reibungsfreier Kontaktprobleme zwischen einem elastischen Körper und einem starren Hindernis wird meist durch die Lösung der resultierenden Variationsungleichungen, z.B. mittels Strafmethode, ausgeführt.

Kernpunkt unserer Forschung war die Entwicklung geeigneter Projektionsmethoden zur Lösung des folgenden Problems im 2D-Fall.

Problem 1 *Gesucht ist das Verschiebungsfeld $u(x)$ für einen elastischen Körper Ω , so dass die Lamégleichung mit Lamé-Konstanten λ , μ und dem Spannungstensor σ*

$$\begin{aligned} -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\mathbf{grad\,div}\,u &= f \\ u(x) &= g_D \quad \text{auf } \Gamma_D \\ \sigma(u) \cdot \mathbf{n} &= g_N \quad \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

erfüllt wird, und alle Punkte von Ω außerhalb eines vorgegebenen starren Hindernisses verbleiben (siehe Abbildung 2.1)

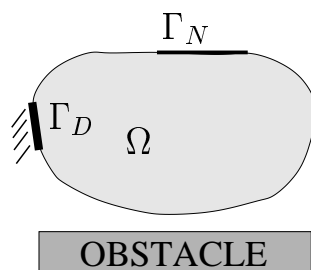


Abbildung 2.1: Das Kontaktproblem

2.3 Forschungsaufgaben / Methoden

2.3.1 Teilaufgabe: Analyse des Nitsche-Mortaring für verschiedene elliptische Randwertaufgaben

Ein wesentliches Ziel dieser Teilaufgabe bestand in der Analyse der Finite-Elemente-Methode nach Nitsche (Nitsche-Mortaring). Für verschiedene Modellaufgaben mit elliptischer Differentialgleichung zweiter Ordnung war das Finite-Elemente-Schema nach Nitsche als nichtkonforme Finite-Elemente-Approximation auf nichtkonsistenten Teilgebietstriangulationen zu entwickeln und aus der Sicht der Numerischen Analysis mathematisch zu behandeln. Dabei waren schwierige und anwendungsrelevante Parametersituationen der Randwertaufgabe, wie Ecken, springende Koeffizienten und kleine Parameter (singuläre Störungen) zu berücksichtigen, die Stabilität sowie die optimale Konvergenz der Näherungslösung zu garantieren. Die Durchführbarkeit und Vorteile sowie die Anwendungsbreite der Methode waren theoretisch und durch die numerische Realisierung relevanter Beispiele aufzuzeigen. Vorarbeiten bestanden u.a. darin, bekannte Aussagen zu den klassischen Mortar-Methoden (vergl. etwa [BD98, BDW99, Bel99, BMP90, LW03, Woh98, Woh99a, Woh99b, Woh00]) sowie zur Regularitätstheorie der betrachteten Randwertaufgaben, einschließlich des besonderen Verhaltens der Lösung in der Umgebung von Ecken, Kanten und Randschichten, in der Literatur zu sichten. Weiter waren die modifizierten Variationsgleichungen nach Nitsche, bisher für die Poissongleichung bzw. verwandte Probleme bekannt (vergl. [ABCM00, Arn82, BH, BH99, BHS03, Ste95, Ste98]), für andere elliptische Probleme mit komplizierteren Parametern passend zu erweitern. Die Hilfsmittel für Fehlerabschätzungen (unter anderem inverse Ungleichungen und Spursätze) waren auf entsprechende Klassen anisotroper und gradierter Netze, in Kopplung mit isotropen Netzen, zu übertragen, die Fehler waren in H^1 -ähnlichen Normen und in der L_2 -Norm abzuschätzen. Weiterhin waren Implementierungen der Nitsche-Mortar-Methode zu realisieren, Testbeispiele zu entwickeln und numerische Experimente durchzuführen.

Die bisher betrachteten Problemklassen umfassten:

- die Poissongleichung mit Dirichlet'schen Randbedingungen,
- die Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen über polygonalen Gebieten,
- Interfaceprobleme mit unstetigen Koeffizienten,
- singulär gestörte Reaktions-Diffusions-Probleme.

2.3.2 Teilaufgabe: Discontinuous Galerkin Methode

Konstruktion von unstetigen Multiwaveletbasen auf hierarchischen Triangulationen, die geeignet für DG-Methoden sind, einschließlich ihrer Untersuchung und Anwendung auf Randwertaufgaben im Rahmen des nichtkonformen Zugangs nach Nitsche. Die unstetigen Multiwaveletbasen sollen orthogonal oder im wesentlichen orthogonal bezüglich des (gebrochenen) H^1 -Skalarproduktes sein.

Darüber hinaus sind für die Vorkonditionierung Normäquivalenzen für die Spuren auf den Koppelländern zu beweisen, die der Schlüssel für den effizienten Einsatz der Waveletbasen sind. Die Methoden und Resultate zum Nitsche-type mortaring sind auf ihre Verallgemeinerbarkeit für den Fall zu untersuchen, dass eine schwache Stetigkeitsbedingung auf allen Elementkanten möglich ist, so dass damit der Zusammenhang zu DG-Methoden hergestellt werden kann.

2.3.3 Teilaufgabe: Kontaktbehandlung

Projektionsmethoden für hängende Knoten

Die grundlegende Idee zur Nutzung von Projektionsmethoden stammt aus dem Problem, in einem adaptiven FEM-Algorithmus hängende Knoten effektiv zu behandeln.

Für effektive Vorkonditionierer werden hierarchische Netze gebraucht, bei Verwendung von Rot-Grün-Verfeinerungstechniken geht die Hierarchie durch Entfernung grüner Elemente vor der nächsten Verfeinerung jedoch verloren.

Ein Weg, dieses Problem zu umgehen, ist mit den hängenden Knoten zu arbeiten und mittels Projektionstechniken korrekte Lösungen zu erzwingen.

Als ein einfaches Beispiel betrachte man die folgende Abbildung.

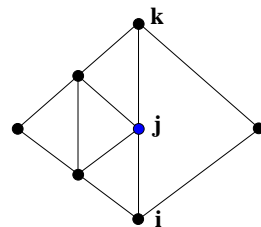


Abbildung 2.2: Ein Beispiel für hängende Knoten

Der Wert im Mittelknoten u_j ist nicht frei, sondern durch die Werte in u_i und u_k festgelegt. Der Einbau dieser Information in den Gleichungssystemlöser wird mit einem geeignet definierten Projektor

$$P = \left[\begin{array}{cccc|c} & & I & & \\ \dots & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ & & & & & I \end{array} \right]$$

mit $\frac{1}{2}$ an den Spalten i und k sowie 0 in allen anderen Spalten der Zeile j vorgenommen.

Wird solch ein Projektor in den Vorkonditionierer des CG-Lösers eingebaut, also die Berechnung des Korrekturvektors w von

$$w := C^{-1}r$$

zu

$$w := PC^{-1}P^t r$$

abgeändert [?] und außerdem sichergestellt, dass die Startlösung konform ist ($u^0 \in Im(P)$), so liegen auch alle Iterierten u^k und somit die Lösung u in $Im(P)$.

Zu einer detaillierten Beschreibung dieser Methode zur Behandlung hängender Knoten siehe [?, ?].

Im Folgenden soll die Erweiterung dieser Idee zur Behandlung einiger Arten spezieller Randbedingungen und Rückführung des Kontaktproblems auf ein Problem mit derartigen Randbedingungen beschrieben werden.

Projektoren für verschiedene Arten von Randbedingungen

Einige Arten von Randbedingungen sind durch Projektoren behandelbar, so zum Beispiel periodische Randbedingungen mit $u_{left} = u_{right}$ am linken und rechten Randbereich in Abbildung 2.3

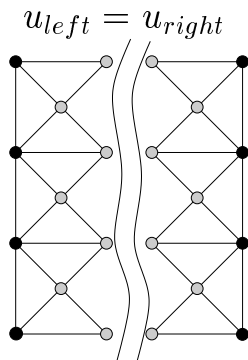


Abbildung 2.3: Periodische Randbedingungen

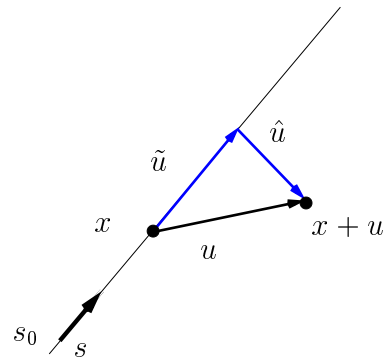


Abbildung 2.4: Rutschrandbedingungen

Eine andere Art von Randbedingungen sind die so genannten „Rutschrandbedingungen“ (slip-boundary-conditions), bei denen im Gegensatz zur Dirichletbedingung $u(x)$ nicht völlig fixiert ist, sondern gefordert wird, dass der zugehörige Knoten in einem ein-dimensionalen Unterraum zu verbleiben hat und dort seine energieminimale Position einnimmt. (Siehe dazu Abbildung 2.4)

Diese Art von Randbedingungen wird zur Behandlung des Kontaktes genutzt. Der Rutschrand ist durch Fixierung eines Punktes s_0 und einer Richtung s wohldefiniert ($\|s\| = 1$). Die Verschiebung u wird in zwei orthogonale Komponenten \tilde{u} entlang des Randes und \hat{u} orthogonal zum Rand zerlegt und die Randbedingung als $\hat{u} = 0$ verstanden.

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} \oplus \hat{u} \\ \tilde{u} &= ss^T u \end{aligned} \quad \implies \quad P = \begin{bmatrix} I & & \\ & ss^T & \\ & & I \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Somit ist für alle Knoten x_i auf dem Rutschrand der Projektor eine Blockdiagonalmatrix mit 2×2 Blöcken ss^T , wobei s die Rutschrichtung des Knotens x_i ist.

Ebene Halbraumhindernisse

Analog zu den Rutschrandbedingungen lassen sich durch Angabe eines Punktes s_0 und einer Richtung s mit $\|s\| = 1$ Halbraumhindernisse definieren.

Die Behandlung des Kontaktes besteht aus zwei Teilen, dem Erkennen des Eindringens von Knoten in das Hindernis sowie der Korrektur der Verschiebungen für diese Knoten durch gezieltes Einschalten von Projektoren.

Sei x ein kontaktverdächtiger Knoten auf dem Rand von Ω , n die innere Normale des Hindernisses und $a := (x + u) - s_0$.

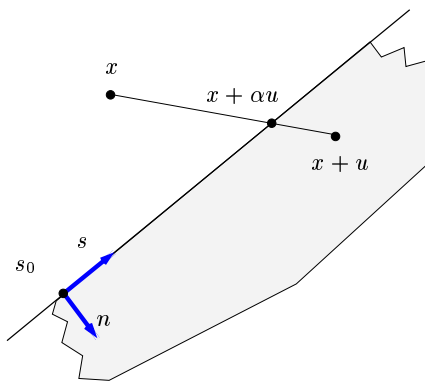


Abbildung 2.5: Halbraumhindernis

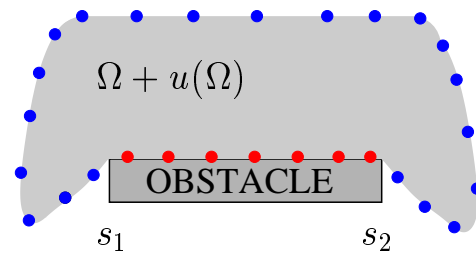


Abbildung 2.6: Endliches ebenes Hindernis

Der Eindringungstest besteht aus der Berechnung von $\langle n, a \rangle$

$$(x + u) \text{ dringt ein} \quad \Leftrightarrow \quad \langle n, a \rangle > 0 \quad (2.2)$$

Ist dieser Test erfüllt, muss einerseits $(x + u)$ zu $(x + \alpha u)$ mit

$$\alpha = \frac{\langle s_0 - x, n \rangle}{\langle u, n \rangle}$$

korrigiert, sowie der entsprechende Projektor analog (2.1) eingeschaltet werden.

Diese beiden Schritte des gesamten Algorithmus erzwingen, dass keine Knoten in das Hindernis eindringen; es kann jedoch passieren, dass an den Enden der (a priori unbekannt) Kontaktzone Knoten „eingefangen“ werden.

Um dies zu verhindern, schließt sich nach dem Lösen des FE-Gleichungssystems mit aktiven Projektoren ein weiterer Test an.

Eine einfache Möglichkeit besteht darin, den Kontaktdruck in der aktuellen Kontaktzone zu berechnen und alle Knoten freizugeben (also die zugehörigen Projektoren auszuschalten), für die sich ein negativer Kontaktdruck ergibt.

Man beachte, dass der PCGM-Löser mit einem zulässigen Startvektor beginnt und durch die Projektionen für die Kontaktknoten nur zulässige Korrekturen bestimmt. Dadurch bleibt auch die Lösung zulässig.

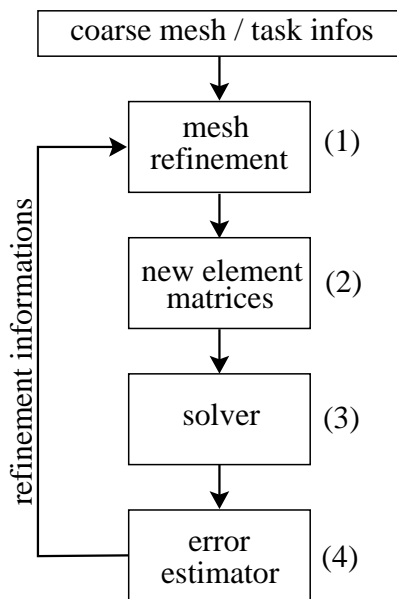


Abbildung 2.7: Normaler Lösungszyklus

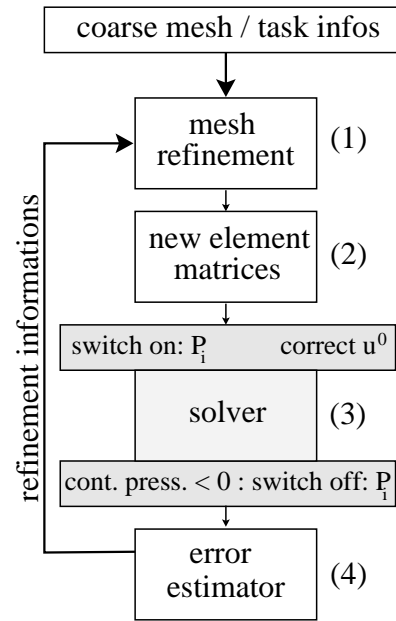


Abbildung 2.8: Der gesamte Zyklus

Der gesamte Algorithmus mit Eindringungstest, Schalten der Projektoren und Testen des Kontaktdruckes ist in Abbildung 2.8 zu sehen, in Abbildung 2.7 ist der normale Zyklus für einen adaptiven FE-Algorithmus aufgeführt.

Endliche ebene Hindernisse

Um neben den Halbraumhindernissen auch endliche ebene Hindernisse behandeln zu können, (siehe Abbildung 2.6) muss der Algorithmus nur ein wenig im Eindringungstest abgeändert werden.

Nur für Knoten zwischen den Enden s_1 und s_2 des Hindernisses darf der Test das Ergebnis „Knoten eingedrungen“ liefern.

Alle anderen Teile des Algorithmus bleiben unverändert.

In Abbildung 2.22 ist ein Beispiel für ein endliches Hindernis zu sehen.

Beschreibung des Hindernisses mit impliziten Funktionen

Eine Beschreibung des Hindernisses mit impliziten Funktionen ermöglicht die Bearbeitung krummlinig berandeter Hindernisse bei gleichzeitig sehr einfachen Eindringungstests.

Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion von $x \in \Omega$. Das Hindernis ist dann definiert durch

$$F(x) \begin{cases} = 0 & \text{auf dem Hindernisrand} \\ < 0 & \text{innerhalb des Hindernisses} \\ > 0 & \text{außerhalb des Hindernisses} \end{cases}$$

Somit kann durch Einsetzen von $x + u$ in F getestet werden, ob ein Eindringen des Knotens vorliegt oder nicht.

Falls der Knoten eindringt, ist durch Lösung einer eindimensionalen, nichtlinearen Gleichung

$$\sigma := F(x + \alpha u) = 0 \tag{2.3}$$

ein Parameter α zu bestimmen, so dass $x + \alpha u$ auf den Rand des Hindernisses kommt. Dies kann z.B. mittels Bisektion erfolgen, gut geeignete Startwerte sind dabei $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$, weil diese Werte unterschiedliche Vorzeichen von σ garantieren.

Mit diesem Parameter α wird ein eindimensionaler (affiner) Unterraum für den zugehörigen Knoten definiert und gefordert, dass er auf der Tangente im Punkt $x + \alpha u$ auf dem Hindernisrand verbleibt.

In der Implementierung wird diese Tangente (aus $\nabla F(x + \alpha u)$ berechnet) analog zu einem Halbraumhindernis für diesen einen Knoten behandelt.

Zu berechneten Beispielen siehe Abbildungen 2.23 und 2.24

Hindernisbeschreibung mit Splinekurven

Implizite Funktionen ermöglichen zwar eine einfache Implementierung, sind aber nicht sehr gut geeignet um praktisch relevante Konturen, z.B. von Umformwerkzeugen, zu modellieren. Für diese Zwecke besser geeignet ist eine Beschreibung des Hindernisses durch Splinekurven.

Definition 1 (Splinekurve) Sei $\{(x_1^1, x_2^1), (x_1^2, x_2^2) \dots (x_1^n, x_2^n)\}$ eine Menge gegebener Kontrollpunkte und seien in den Punkten (x_1^1, x_2^1) und (x_1^n, x_2^n) geeignete Randbedingungen festgelegt.

Mit diesen Werten und einem Parameter $t \in [0, 1]$ sind zwei kubische Splines $S_1(t)$ und $S_2(t)$ fixiert.

Somit definiert die Abbildung

$$\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \Gamma(t) := \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

in der Ebene eine Splinekurve.

So kann eine Werkzeugkontur mit Angabe einiger Kontrollpunkte und Randbedingungen im ersten und letzten Kontrollpunkt festgelegt werden.

Bei Verwendung von Splinekurven zur Beschreibung des Hindernisses ist, wie auch in den bisherigen Fällen, ein Eindringungstest durchzuführen, wobei die Tangentenrichtung wieder nebenbei abfällt.

Hierzu sei die folgende (nichtlineare) Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\sigma(\alpha, t) := \begin{bmatrix} (x_1 + \alpha u_1) - S_1(t) \\ (x_2 + \alpha u_2) - S_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

mit Knotenkoordinaten $x = [x_1, x_2]^T$, Verschiebung $u = [u_1, u_2]^T$ und der Splinekurve $S(t) = [S_1(t), S_2(t)]^T$ definiert.

Somit ist die Berechnung des Schnittpunktes des Hindernisrandes mit der Verschiebungsrichtung des Knotens x ein Nullstellenproblem von σ .

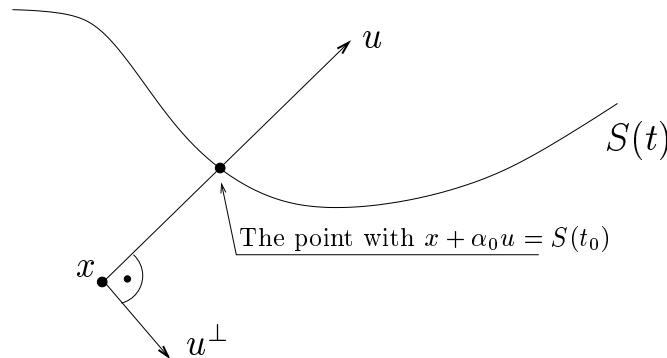


Abbildung 2.9: Eindringungstest und Berechnung des Randpunktes

Mit der Lösung $[\alpha_0, t_0]$ wo $\sigma(\alpha_0, t_0) = 0$ kann die Entscheidung, ob der Knoten eindringt folgendermaßen getroffen werden.

- Für $t_0 < 0$ oder $t_0 > 1$ gibt es keinen Schnitt zwischen der Linie $x + \alpha u$ und dem Hindernis und der Knoten dringt somit nicht ein. In diesem Falle gibt es nichts zu tun, und der Wert von α_0 muss nicht beachtet werden.
- Für $\alpha_0 > 1$ ist der Knoten außerhalb des Hindernisses und muss nicht korrigiert werden
- Für $\alpha_0 < 1$ dringt der Knoten ein, die Verschiebung u muss zu $u := x + \alpha_0 u$ korrigiert und der Projektor eingeschaltet werden. Als zur Definition des Projektors benötigte Normalen- und Tangentenrichtungen am Hindernisrand können dabei die bereits berechneten Ableitungen der Splinekurve verwendet werden. ($s = [\dot{S}_1(t_0), \dot{S}_2(t_0)]^T$)

Prinzipiell ist es möglich, das nichtlineare Nullstellenproblem für die beiden Unbekannten t und α mittels Voriteration durch einige Schritte einer Gradientenmethode und anschließender Newtoniteration zu lösen. Mit einigen Annahmen an den Hindernisrandpunkt kann es jedoch in ein (nichtlineares) 1D-Problem transformiert werden.

Literaturverzeichnis zu 2.3

- [ABCM00] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and D. Marini. Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems. In B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C.-W. Shu, editors, *Discontinuous Galerkin Methods*, volume 11 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 89–101. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [Arn82] D. N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(4):742–760, 1982.
- [BD98] D. Braess and W. Dahmen. Stability Estimates of the Mortar Finite Element Method for 3-Dimensional Problems. *East-West J. Numer. Math.*, 6(4):249–264, 1998.
- [BDW99] D. Braess, W. Dahmen, and Ch. Wieners. A Multigrid Algorithm For The Mortar Finite Element Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37(1):48–69, 1999.
- [Bel99] F. Ben Belgacem. The Mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik*, 84:173–197, 1999.
- [BH] R. Becker and P. Hansbo. Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Diffusion Problems with Arbitrary Peclet Number. Enumath99.
- [BH99] R. Becker and P. Hansbo. A Finite Element Method for Domain Decomposition with Non-matching Grids. Technical Report INRIA 3613, 1999.
- [BHS03] R. Becker, P. Hansbo and R. Stenberg. A Finite Element Method for Domain Decomposition with Non-matching Grids. *M²AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37:209–225, 2003 :287–303, 1999.
- [BMP90] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. A New Nonconforming Approach to Domain Decomposition: The Mortar Element Method. In H. Brezis and J. L. Lions, editors, *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*. Pitman, 1990.
- [LW03] B. B. Lamichhane and B. I. Wohlmuth. Mortar finite elements for interface problems. *Berichte IANS, Univ. Stuttgart*, Preprint 2003/001.
- [Nit71] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlung aus dem Mathematischen Seminaren der Universität Hamburg*, 36:9–15, 1970/1971.
- [Ste95] R. Stenberg. On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method. *J. Comput. Appl. Math.*, 63(1-3):139–148, 1995.
- [Ste98] R. Stenberg. Mortaring by a method of J.A. Nitsche. In S. Idelsohn, E. Onate, and E. Dvorkin, editors, *Computational Mechanics, New Trends and Applications*. Barcelona, 1998.
- [Tho97] V. Thomeé. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Springer Verlag, Berlin, New York, 1997.
- [Woh98] B. I. Wohlmuth. Analysis and Parallel Implementation of Adaptive Mortar Finite Element Methods. *East-West J. of Numer. Math.*, 6:223–248, 1998.
- [Woh99a] B. I. Wohlmuth. Hierarchical A Posteriori Error Estimators for Mortar Finite Element Methods with Lagrange Multipliers. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36:1636–1658, 1999.
- [Woh99b] B. I. Wohlmuth. A residual based error estimator for mortar finite element discretizations. *Numer. Mathematik*, 84:143–171, 1999.
- [Woh00] B. I. Wohlmuth. A Mortar Finite Element Method Using Dual Spaces for the Lagrange Multiplier. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(3):989–1012, 2000.

2.4 Ergebnisse

2.4.1 Teilaufgabe: Analyse des Nitsche-Mortaring für verschiedene elliptische Randwertaufgaben

Einleitend sei bemerkt, dass die Hauptbearbeiterin dieser Teilaufgabe, Frau K. Pönitz, wegen Schwangerschaft/Mutterschaftsurlaub nur im Zeitraum Januar 2002 bis August 2003 an der Projektarbeit teilnehmen konnte. Die Dokumentation der in dieser Zeit erzielten Resultate liegt aus diesem Grund nur partiell vor. Die Resultate zur Teilaufgabe sind in [HP02, HN03, Hei02, Hei03, HP03, Poe04] dargelegt.

Die Herangehensweise sowie einige Resultate werden hier nochmals in skizzierter Form dargelegt. Wir betrachten das Nitsche-Mortaring anhand der Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen. Bei den weiteren Aufgabenstellungen wird dann nur noch auf Besonderheiten und Neuerungen eingegangen. Die Resultate zu den gemischten Randbedingungen überdecken den Fall der Randbedingungen 1. Art, der in [HP02] beschrieben ist. Nachfolgend wird die Bezeichnung $H^s(X)$ (X ein Gebiet, $H^0 = L_2$) für Sobolevräume der Ordnung $s \in \mathbb{R}$ benutzt, $\|\cdot\|_{s,X} := \|\cdot\|_{H^s(X)}$ bzw. $|\cdot|_{s,X} := |\cdot|_{H^s(X)}$ bezeichnen die dazugehörigen Normen und Seminormen. Die Konstante C wird generell als generische und von dem Diskretisierungsparameter h unabhängige Konstante verwendet, mit der Symbolik $a \sim b$ die Äquivalenz im Sinne der Ungleichungen $C_1 a \leq b \leq C_2 a$.

Gemischte Randbedingungen

Die Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen (homogenen Dirichlet- und inhomogenen Neumannrandbedingungen) wird über beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit polygonalem Rand $\partial\Omega$ betrachtet,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{auf } \Gamma_N, \end{aligned} \tag{2.6}$$

wobei mit $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ der Randabschnitt mit Dirichletrandbedingungen und mit $\Gamma_N \subset \partial\Omega$ entsprechend der Neumanrand bezeichnet wird ($\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \partial\Omega$ und $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$). Weiterhin sei $\Gamma_D \neq \emptyset$, $f \in L_2(\Omega)$ und $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ für alle geradlinigen Randsegmente $\Gamma_j \subset \Gamma_N$.

Das Gebiet Ω wird entsprechend der nichtüberlappenden Gebietszerlegungsmethode in disjunkte Teilgebiete zerlegt, die selbst wieder polygonal seien. Der Einfachheit halber werden nur zwei Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 betrachtet, so dass $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ und $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ gilt. Der Schnitttrand der beiden Teilgebiete wird mit Γ bezeichnet: $\Gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$.

Es kann nun eine zu Problem (2.6) äquivalente Aufgabe über den einzelnen Teilgebieten formuliert werden, wobei an den Schnittflächen (Interfaces) Kompatibilitätsbedingungen (Interfacebedingungen, Transmissionsbedingungen) zu formulieren sind. Gesucht ist $u = (u^1, u^2)$ (verallgemeinert im 'gebrochenen' H^1), so dass

$$\begin{aligned} -\Delta u^i &= f \quad \text{in } \Omega_i, & i &= 1, 2 \\ u^i &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_i \cap \Gamma_D, & i &= 1, 2 \\ \frac{\partial u^i}{\partial n_i} &= g \quad \text{auf } \partial\Omega_i \cap \Gamma_N, & i &= 1, 2 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} u^1 &= u^2 \quad \text{auf } \Gamma, \\ \frac{\partial u^1}{\partial n_1} &= -\frac{\partial u^2}{\partial n_2} \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{2.7}$$

gilt, mit $u^i := u|_{\Omega_i}$ und n_i als äußerer Normale an den Rand $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2$.

Mit dieser Aufgabe wird eine diskrete Variationsformulierung assoziiert, die die Stetigkeitsforderung $u^1 = u^2$ auf Γ nur approximativ berücksichtigt und eine Näherung u_h der Lösung u definiert. Dazu sei

$$V_h^i := \{v^i \in H^1(\Omega_i) : v^i|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^i, \quad v^i|_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_D} = 0\} \quad (2.8)$$

der gewöhnlichen Finite-Elemente-Raum mit Polynomgrad k über der Triangulation $\mathcal{T}_h^i := \mathcal{T}_h(\Omega_i)$ ($i = 1, 2$) bestehend aus Dreiecken T . Der Raum V_h sei definiert durch $V_h = V_h^1 \times V_h^2$. Die Knoten der Dreiecke der Triangulationen \mathcal{T}_h^1 und \mathcal{T}_h^2 auf dem Schnitttrand Γ müssen dabei nicht zusammenpassen, es entstehen für $\mathcal{T}_h := \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2$ so genannte „non-matching meshes“.

Die FE-Approximation nach Nitsche ist definiert durch $(u_h^1, u_h^2) = u_h \in V_h$, so dass

$$\mathcal{B}_h(u_h, v_h) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.9)$$

gilt. Die Bilinearform $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$ und die Linearform der rechten Seite $\mathcal{F}_h(\cdot)$ sind dabei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(u_h, v_h) &= \sum_{i=1}^2 (\nabla u_h^i, \nabla v_h^i)_{\Omega_i} - \left\langle \alpha_1 \frac{\partial u_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial u_h^2}{\partial n_2}, v_h^1 - v_h^2 \right\rangle_{\Gamma} \\ &\quad - \left\langle \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2}, u_h^1 - u_h^2 \right\rangle_{\Gamma} + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} (u_h^1 - u_h^2, v_h^1 - v_h^2)_E \end{aligned} \quad (2.10)$$

und $\mathcal{F}_h(v_h) = \sum_{i=1}^2 ((f, v_h^i)_{\Omega_i} + \langle g, v_h^i \rangle_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_N})$. Es bezeichnet $(\cdot, \cdot)_X$ das L_2 -Skalarprodukt für $X \in \{\Omega^i, E\}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ das $(H_*^{-\frac{1}{2}}, H_*^{\frac{1}{2}})$ -Dualitätsprodukt auf Γ . Weiterhin sei: \mathcal{E}_h Zerlegung des Interfaces Γ in Intervalle E , h_E die Länge eines Elementes $E \in \mathcal{E}_h$, α_1 und α_2 ($0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) zwei Parameter, γ eine hinreichend große positive Konstante. Eine Motivation für diesen Ansatz wird bei (2.15)–(2.17) für eine allgemeinere Parameterkonstellation im Hauptteil des Operators gegeben.

Es wurde gezeigt, dass die Variationsformulierung konsistent mit der Lösung u der Randwertaufgabe ist, d.h. es gilt: $\mathcal{B}_h(u, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$. Somit gehört das Nitsche-Mortarverfahren nicht zu den „inneren Penalty-Verfahren“, denen es auf den ersten Blick ähnelt. Die Konstante γ in der Bilinearform (2.10) dient der Stabilisierung des Verfahrens, hängt nicht von h ab, kann aber in Abhängigkeit von der Gestaltsregularität der Netzelemente am Interface abgeschätzt werden.

Für die weiteren Betrachtungen wird eine netzabhängige Norm eingeführt. Diese wird mit $\|\cdot\|_{1,h}$ bezeichnet und ist für $v_h \in V_h$ folgendermaßen definiert:

$$\|v_h\|_{1,h}^2 := \sum_{i=1}^2 \|\nabla v_h^i\|_{0,\Omega_i}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2. \quad (2.11)$$

Die Bilinearform ist bezüglich dieser Norm gleichmäßig V_h -elliptisch und V_h -beschränkt, wobei für die Gültigkeit der V_h -Elliptizität der Parameter γ genügend groß gewählt werden muss, genauer gesagt: $\gamma > C_I$, aber unabhängig von h ist. Die Konstante C_I stammt dabei aus der Ungleichung (Typ einer inversen Ungleichung)

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 \leq C_I \sum_{i=1}^2 \|\nabla v_h^i\|_{0,\Omega_i}^2 \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.12)$$

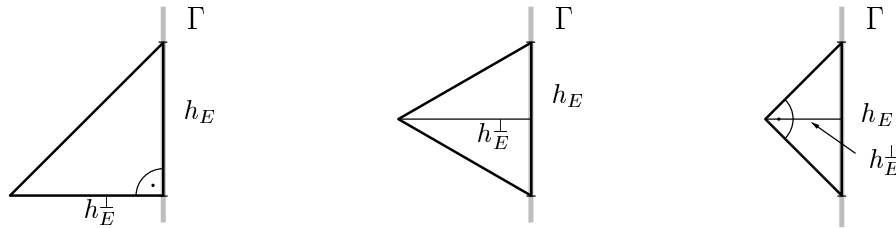


Abbildung 2.10: Beispiele für C_I (links: $C_I = 2$, Mitte: $C_I = \frac{4}{\sqrt{3}}$, rechts: $C_I = 4$)

und kann leicht bestimmt werden. Zum Beispiel gilt für den Fall linearer Ansatzfunktionen und $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^i$ (Einschränkung von \mathcal{T}_h^i auf Γ) sowie $\alpha_i = 1$ für $i \in \{1, 2\}$: $C_I = 2 \sup_{h < h_0} \max_{E \in \mathcal{E}_h^i} \left(\frac{h_E}{h_E^{\perp}} \right)$, wobei h_E die Länge der Dreiecksseite E und h_E^{\perp} die Höhe des Dreiecks T_E über dieser Seite bezeichnet, siehe Abbildung 2.10.

Für die Gültigkeit der Ungleichung (2.12) sowie der späteren Fehlerabschätzungen wird noch eine lokal wirkende Verträglichkeitsannahme der Triangulationen \mathcal{T}_h^i mit der Zerlegung \mathcal{E}_h von Γ vorausgesetzt (auf die hier nicht eingegangen wird, siehe etwa [HP02, HN03]), die aber noch gewisse nicht quasi-uniforme Netze, wie z.B. graduierte Netze in der Umgebung von Ecken, zulässt.

Es ist bekannt, dass die Lösung von Aufgabe (2.6) über polygonalen Gebieten lokale Singularitäten aufweist. Jedoch kann die Lösung in einen regulären und einen singulären Anteil zerlegt werden, wobei der Grad der Singularität von den Innenwinkeln ω und der Art der anliegenden Randbedingungen an den Ecken P abhängt. Für die Lösung von (2.6) gilt $u = u_{\text{re}} + u_{\text{si}}$ mit dem regulären Anteil $u_{\text{re}} \in H^2(\Omega)$ und dem singulären Lösungsanteil $u_{\text{si}} \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$, wobei $\lambda \in (0, 1)$ der Singularitätenexponent ist, $\delta \in (0, \lambda)$.

Für die Fehlerabschätzungen beim Mortaring nach Nitsche sind unter anderem Dualitätsprodukte der Art $\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_s}, w_h \right\rangle_E$ (w_h stückweise polynomial, $\frac{\partial u}{\partial x_s}$: Spur der partiellen Ableitung) für Intervalle $E \subset \Omega$ abzuschätzen. Da auf Grund der geringen Regularität der Lösung $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$ im Allgemeinen $\frac{\partial u}{\partial x_s} \notin L_2(E)$ gilt, werden für Singularitätsexponenten $\lambda \leq \frac{1}{2}$ L_2 -Räume mit Potenzgewichten des Eckenabstandes r verwendet. Für u folgt dann $r^\beta \frac{\partial u}{\partial x_s} \in L_2(E)$, falls $\beta > \frac{1}{2} - \lambda + \delta$ und r der Abstand zur Ecke P ist. Ebenfalls lässt sich $r^{-\beta} w_h \in L_2(E)$ für $\beta < \frac{1}{2}$ zeigen. Damit kann für die beim Mortaring nach Nitsche zu betrachtenden Dualitätsprodukte für $\beta \in (\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2})$ die Cauchy-Schwarz-Ungleichung mit gewichteten Normen benutzt werden, also $\left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_s}, w_h \right\rangle_E \right| \leq \left\| r^\beta \frac{\partial u}{\partial x_s} \right\|_{0,E} \left\| r^{-\beta} w_h \right\|_{0,E}$.

Wie bekannt, vermindert die geringere Regularität der Lösung von Problemen mit Ecken-singularitäten die Konvergenzordnung und vergrößert i.a. auch den lokalen Fehler der Finite-Elemente-Approximation. Zur Kompensation gibt es mehrere Möglichkeiten, von denen hier die Verwendung lokal graduerter Netze betrachtet wird. Diese werden mit Hilfe eines reellen Parameters $\mu \in (0, 1]$ beschrieben, und zwar derart, dass für den

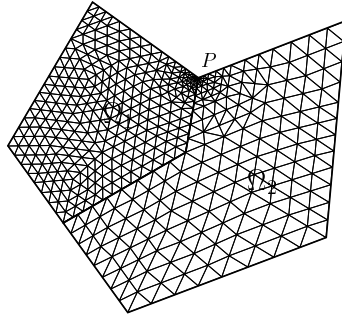


Abbildung 2.11: Graduiertes Netz

Durchmesser h_T der Elemente T der Triangulationen die Beziehung

$$h_T \sim \begin{cases} h^\mu & \text{für } r_T = 0 \\ r_T^{1-\mu} h & \text{für } 0 < r_T < R_J \\ h & \text{für } r_T \geq R_J \end{cases}$$

gilt. Hier bezeichnet r_T den Abstand des Elementes T von der einspringenden Ecke, R_J den Radius des Sektors um die einspringende Ecke, in dem das Netz verfeinert wird. Der Parameter μ gibt den Grad der lokalen Netzverfeinerung an. Für $\mu = 1$ ist das Netz nicht graduiert und quasi-uniform, und für $0 < \mu < 1$ wird die lokale Maschenweite zur einspringenden Ecke hin immer kleiner, siehe Abbildung 2.11, vergl. auch [Ape99, Hei96, HNW00].

Für den Verfahrensfehler $\|u - u_h\|_{1,h}$ der Finite-Elemente-Approximation nach Nitsche $u_h \in V_h$ gemäß (2.9), mit Polynomgrad $k = 1$ auf graduierten Dreiecksnetzen, wurde die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq C \kappa(h, \mu) \left(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma_N} \right)$$

unter der Voraussetzung $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$ bewiesen, mit einer von h unabhängigen Konstante C und der Funktion

$$\kappa(h, \mu) := \begin{cases} h^\lambda & \text{für } \lambda < \mu \leq 1 \\ h |\ln h|^{\frac{1}{2}} & \text{für } \mu = \lambda \\ h & \text{für } 0 < \mu < \lambda < 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Dabei ist h der Diskretisierungsparameter ($h \leq h_0$), λ der Singularitätsexponent und μ der Graduierungsparameter des Netzes.

Somit werden beim Mortaring nach Nitsche dieselben Konvergenzraten wie bei klassischen Finite-Elemente-Methoden auf konformen Triangulationen und bei regulärer Lösung $u \in H^2(\Omega)$ erreicht. Insbesondere ist der Approximationsfehler für Netze ohne Graduierung ($\mu = 1$), wie bei Eckensingularitäten zu erwarten, nur von der Ordnung $\mathcal{O}(h^\lambda)$. Für ausreichend graduierte Netze ($\mu < \lambda$) wird hingegen die optimale Fehlerordnung $\mathcal{O}(h)$ angenommen.

Die Abschätzung des Fehlers $\|u - u_h\|_{1,h}$ kann in mehrere Teilschritte gegliedert werden. Zuerst wird ähnlich wie beim Lemma von C ea der Approximationsfehler gegen den Interpolationsfehler beschr ankt, allerdings in einer weiteren netzabh angigen Norm, die

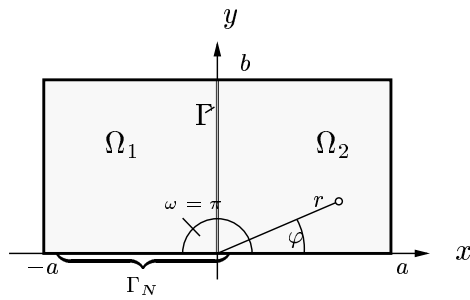
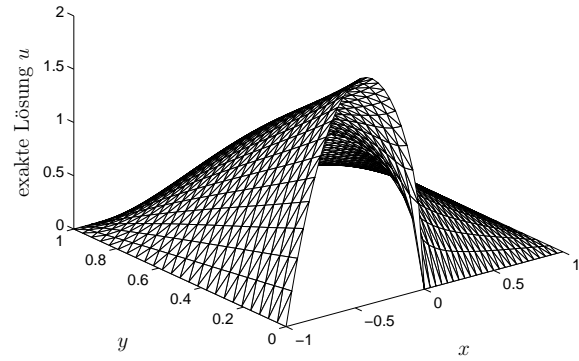


Abbildung 2.12: Berechnungsgebiet

Abbildung 2.13: Lösung u auf nichtgraduiertem h_3 -Netz

die Normalenableitung des Interpolationsfehlers längs Γ enthält. Diese Norm wird dann jeweils für den regulären und den singulären Lösungsanteil (u_{re} und u_{si}) abgeschätzt und schließlich gegen die Daten beschränkt. In den Beweisen wurden noch einige Hilfssätze für den Umgang mit gewichteten Normen benötigt, wie sie beispielweise auch in [HN03] gezeigt wurden.

Der Fehler $u - u_h$ wurde ebenfalls in der L_2 -Norm abgeschätzt; es gilt hier

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C \kappa^2(h, \mu) \left(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma_N} \right),$$

mit $\kappa(h, \mu)$ wie in (2.13) gegeben. Der Fehler in der L_2 -Norm konvergiert also, wie erwartet und auch in numerischen Experimenten beobachtet, doppelt so rasch wie der Fehler in der $\|\cdot\|_{1,h}$ -Norm.

Das Berechnen der Systemsteifigkeitsmatrix erfordert die Berechnung von Gebietsintegralen wie beim klassischen Galerkin-Verfahren, wegen der Mortar-Terme in der Bilinearform zusätzlich auch von Kurvenintegralen längs Γ . Die entstehende Matrix ist aber ebenfalls symmetrisch und positiv definit, und die Konditionszahl ist von der Ordnung $O(h^{-2})$, auch für die hier betrachteten nichtkonsistenten und gradierten Netze.

Die Ergebnisse von experimentellen Tests werden hier am Beispiel der Aufgabe (2.6) über dem Gebiet $\Omega = (-a, a) \times (0, b) \subset \mathbb{R}^2$ ($a = b = 1$) mit Neumannrandbedingungen auf $\Gamma_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in (-a, 0)\}$ und homogenen Dirichletrandbedingungen auf dem übrigen Rand, also auf $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N$, dargestellt. Dabei seien die rechte Seite f und die Randdaten g so gewählt, dass für die exakte Lösung

$$u = 4(x^2 - a^2)(y - b)r^\lambda \sin(\lambda\varphi)$$

gilt, wobei (r, φ) die Polarkoordinaten an dem singulären Punkt $P = (0, 0)$ sind und $\lambda = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{2}$ gelte, siehe Abbildung 2.12 und 2.13.

Für die Mortar-Methode nach Nitsche wird das Gebiet Ω in zwei Teilgebiete $\Omega_1 = (-a, 0) \times (0, b)$ und $\Omega_2 = (0, a) \times (0, b)$ zerlegt, die unabhängig voneinander vernetzt werden, so dass Anfangsnetze mit dem Diskretisierungsparameter h_0 , wie in Abbildung 2.14 dargestellt, entstehen, deren Knoten auf der Schnittkante Γ nicht zusammenfallen. Für die durchgeführten Berechnungen werden diese Anfangsnetze verfeinert, in dem der Diskretisierungsparameter h jeweils halbiert wird. Bei den Netzen mit lokaler Graduierung

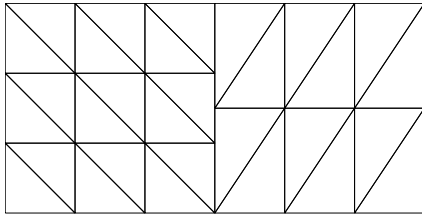


Abbildung 2.14: Anfangsnetz (h_0 -Level)

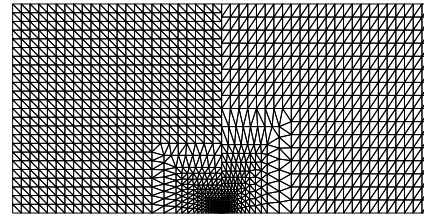


Abbildung 2.15: Netz mit Graduierung (h_3 -Level)

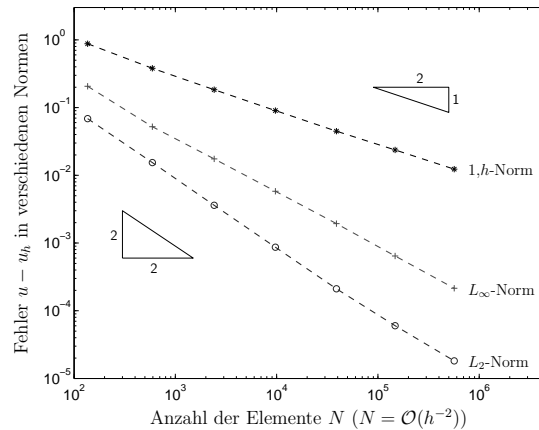
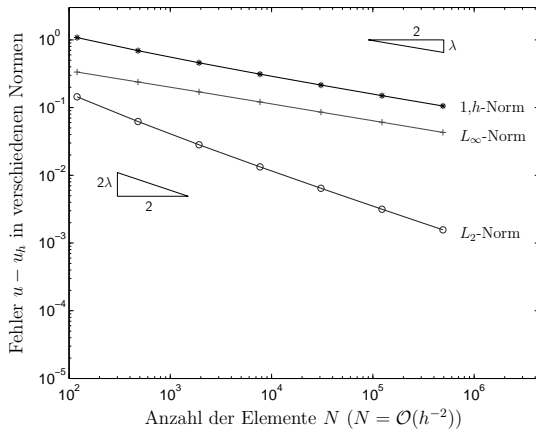


Abbildung 2.16: Fehler in verschiedenen Normen auf Netzen ohne Graduierung (links) und mit Graduierung (rechts) ($\gamma = 7, \alpha_1 = 1, \mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$)

wird neben der gewöhnlichen Viertelung der Dreiecke außerhalb des Graduierungsgebietes, innerhalb mit $\mu = 0.9\lambda = 0.45$ graduell verfeinert (siehe Abbildung 2.15).

Da die Lösung u explizit bekannt ist, können der Fehler $u - u_h$ der Näherung u_h in verschiedenen Normen angegeben und die Konvergenzrate bezüglich h näherungsweise berechnet werden. In Abbildung 2.16 ist der Fehler $u - u_h$ in der Norm $\|\cdot\|_{1,h}$ sowie auch in der L_2 - und L_∞ -Norm über der Anzahl N der Dreieckselemente $T \in \mathcal{T}_h$ abgetragen. Die eingezeichneten Dreiecke sollen die Anstiege der Fehlerkurven verdeutlichen und ermöglichen das Ablesen der Konvergenzordnung bezüglich h . Man erkennt, dass die im Experiment beobachteten Konvergenzraten in der Norm $\|\cdot\|_{1,h}$ und der L_2 -Norm gut mit den theoretisch bewiesenen übereinstimmen. Das heißt, für nicht graduierte Netze und in der Norm $\|\cdot\|_{1,h}$ hat der Exponent β der Konvergenzrate $\mathcal{O}(h^\beta)$ ungefähr den Wert $\beta \approx \lambda = 0.5$ und für Netze mit Graduierung gilt $\beta \approx 1$. Die Konvergenzraten $\mathcal{O}(h^\beta)$ in der L_2 -Norm sind jeweils doppelt so groß, also $\beta \approx 2\lambda = 1$ (ohne Graduierung) und $\beta \approx 2$ (mit Graduierung).

In Abbildung 2.17 wird der Einfluss der Singularität und die Verringerung des absoluten Fehlers bei Verwendung von graduierten gegenüber quasiuniformen Netzen ebenfalls gut sichtbar.

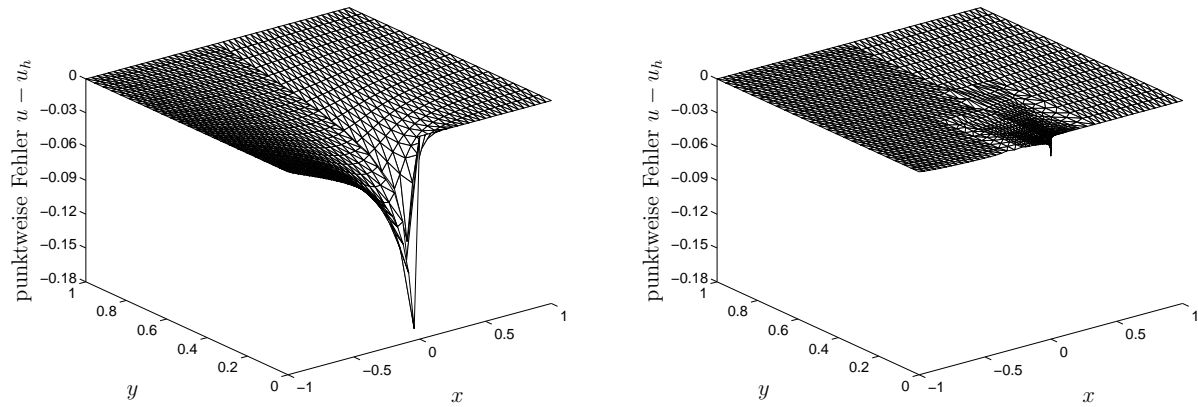


Abbildung 2.17: Punktweise Fehler auf dreimal verfeinerten Netzen (links ohne und rechts mit Graduierung)

Singulär gestörte Reaktions-Diffusions-Probleme

In [HP03] wird das Nitsche Mortaring für singulär gestörte Diffusions-Reaktionsprobleme vom Typ $-\varepsilon^2 \Delta u + cu = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$, entwickelt, wobei Ω ein Rechteckgebiet ist. Das bei kleinem Parameter ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) entstehende Randschichtgebiet R der Breite $\mathcal{O}(\varepsilon|\ln\varepsilon|)$ wird mit anisotropen Dreiecken vernetzt, das Restgebiet $\Omega \setminus R$ mit isotropen Dreiecken. Am Interface Γ der Gebietszerlegung, das den inneren Teil $\Omega \setminus R$ des Gebietes vom Randschichtbereich R trennt, stoßen isotrope und anisotrope Dreiecke aneinander. Für diese Kombinationen nichtkonsistenter isotroper und anisotroper Netze werden Finite-Elemente-Näherungen der RWA vom Nitsche-Typ aus der Sicht der Numerischen Analysis begründet. Die Resultate und der Zugang zum Nitsche-Mortaring, die im Folgenden skizziert werden, sind in [HP03] für Rechtecke Ω sowie reguläre Lösungen $u \in H^2(\Omega)$ dargelegt und werden durch numerische Beispiele illustriert.

Betrachtet wird das Modellproblem einer Reaktions-Diffusions Gleichung auf einem Rechteck Ω wie folgt:

$$\begin{aligned} Lu := -\varepsilon^2 \Delta u + cu &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dabei wird angenommen, dass $0 < \varepsilon < 1$ and $0 < c_0 \leq c(x)$ ($x \in \Omega$) gelten, f hinreichend glatt sei, mindestens $f \in L_2(\Omega)$. Für kleine Werte von ε , $0 < \varepsilon \ll 1$, zeigt die Lösung u i.a. Randschichtverhalten. Das Gebiet Ω wird wieder in nichtüberlappende Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 zerlegt, so dass die RWA äquivalent zu folgender Aufgabe ist. Finde $u = (u^1, u^2)$ derart, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u^i + cu^i &= f^i \quad \text{in } \Omega_i, \quad u^i = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \frac{\partial u^1}{\partial n_1} + \frac{\partial u^2}{\partial n_2} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad u^1 = u^2 \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{2.15}$$

erfüllt sind, wobei n_i die Außennormale an $\partial\Omega_i \cap \Gamma$ ($i = 1, 2$) ist. Wir verwenden nachfolgend $V := V^1 \times V^2$, wobei $V^i := \{v^i : v^i \in H^1(\Omega_i), v^i|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} = 0\}$ für $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset$, $V^i := H^1(\Omega_i)$ für $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i = \emptyset$ definiert ist. Dann kann die folgende Variationsgleichung

notiert werden,

$$\sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Omega_i} \varepsilon^2 (\nabla u^i, \nabla v^i) dx + \int_{\Omega_i} cuv dx - \left\langle \varepsilon^2 \frac{\partial u^i}{\partial n_i}, v^i \right\rangle_{\Gamma} \right) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f^i v^i dx \quad \forall v \in V. \quad (2.16)$$

Wegen $\frac{\partial u^1}{\partial n_1} = \alpha_1 \frac{\partial u^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial u^2}{\partial n_2} = -\frac{\partial u^2}{\partial n_2}$ für beliebiges $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2$) mit $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ist die folgende Gleichung äquivalent zur vorangegangenen:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Omega_i} \varepsilon^2 (\nabla u^i, \nabla v^i) dx + \int_{\Omega_i} cuv dx \right) - \left\langle \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial u^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial u^2}{\partial n_2}, v^1 - v^2 \right\rangle_{\Gamma} \\ & - \left\langle \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v^2}{\partial n_2}, u^1 - u^2 \right\rangle_{\Gamma} + \int_{\Gamma} \sigma (u^1 - u^2) (v^1 - v^2) ds = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f^i v^i dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Es sei bemerkt, dass die zwei zusätzlichen Terme, die $u^1 - u^2$ enthalten, hier beide gleich Null sind, in der Approximation nicht verschwinden und künstlich aus folgendem Grund eingeführt worden sind. Der erste bewirkt die Symmetrie, der zweite penalisiert (nach der Diskretisierung) den Sprung der Näherungslösung und garantiert die Stabilität im Fall einer geeignet gewählten Gewichtsfunktion $\sigma > 0$. Die Finite-Elemente-Methode nach Nitsche ist durch die Diskretisierung der obigen Gleichung gegeben. Dabei wird ein Finite-Elemente-Unterraum V_h von V benutzt, der nichtkonforme Triangulationen und Unstetigkeiten der finiten Elemente längs Γ zulässt. Die Funktion σ wird mit $\gamma \varepsilon^2 h^{-1}(x)$ angesetzt, wobei $\gamma > 0$ eine hinreichend große Konstante ist, $h(x)$ eine Maschenparameterfunktion auf Γ .

Der Finite-Elemente-Raum V_h^i (Unterraum von V^i) von Funktionen v^i auf Ω_i wird wie folgt eingeführt: $V_h^i := \{v^i \in H^1(\Omega_i) : v^i|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^i, v^i|_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega} = 0\}$, der Raum V_h durch $V_h := V_h^1 \times V_h^2 = \{v_h = (v_h^1, v_h^2) : v_h^1 \in V_h^1, v_h^2 \in V_h^2\}$ definiert. Für die Approximation von u auf V_h fixieren wir eine positive Konstante γ sowie reelle Parameter α_1, α_2 und führen die Bilinearform $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$ auf $V_h \times V_h$ und die Linearform $\mathcal{F}_h(\cdot)$ auf V_h wie folgt ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(u_h, v_h) & := \sum_{i=1}^2 \left(\varepsilon^2 (\nabla u_h^i, \nabla v_h^i)_{\Omega_i} + (cu_h^i, v_h^i)_{\Omega_i} \right) - \left\langle \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial u_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial u_h^2}{\partial n_2}, v_h^1 - v_h^2 \right\rangle_{\Gamma} \\ & - \left\langle \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2}, u_h^1 - u_h^2 \right\rangle_{\Gamma} + \varepsilon^2 \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} (u_h^1 - u_h^2, v_h^1 - v_h^2)_E, \\ \mathcal{F}_h(v_h) & := \sum_{i=1}^2 (f, v_h^i)_{\Omega_i}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die Gewichte im vierten Term von \mathcal{B}_h approximieren die Funktion $\sigma = \gamma \varepsilon^2 h^{-1}(x)$ und garantieren die Stabilität der Methode, falls γ hinreichend groß gewählt wird ($\gamma > C_I$). Die Nitsche-Finite-Elemente-Approximation u_h der Lösung u ist definiert durch $u_h = (u_h^1, u_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2$ als Lösung von

$$\mathcal{B}_h(u_h, v_h) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.19)$$

Zur optimalen Approximation der Lösung in der Randschicht werden anisotrope Dreiecke benutzt ([AN98, Ape99]). Die Gebietszerlegung kann so gewählt sein, dass anisotrope und isotrope (gestaltsreguläre) Dreiecke nichtkonsistent aneinander stoßen. Die Ungleichung (2.12) gilt im Fall isotroper Netze unverändert. Im Fall anisotroper Netze bleibt diese Ungleichung ebenfalls gültig, falls die Voraussetzung $h_F/h_F^\perp \leq C < \infty$ für alle Dreiecksseiten F mit Kontakt zum Interface Γ erfüllt ist. Für Details siehe [HP03]. Zur Herleitung der Stabilität der Bilinearform $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$ führen wir die diskrete Energie-ähnliche Norm $\|\cdot\|_{1,h}$ ein, die von ε^2 , $c(x)$ und vom Netz abhängt:

$$\|v_h\|_{1,h}^2 = \sum_{i=1}^2 \left(\varepsilon^2 \|\nabla v_h^i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|\sqrt{c}v_h^i\|_{0,\Omega_i}^2 \right) + \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2. \quad (2.20)$$

In dieser Norm können Stabilität und Beschränktheit der Bilinearform gleichmäßig bezüglich ε und h bewiesen werden. Die Fehlerabschätzungen basieren auf der in [HP03] bewiesenen Ungleichung

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq C \|u - I_h u\|_{h,\Omega}, \quad (2.21)$$

mit C unabhängig von $h \in (0, h_0]$ und $\varepsilon \in (0, 1)$. Hier wird eine zweite diskrete Norm $\|\cdot\|_{h,\Omega}$ verwendet, die von der Bilinearform $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$ abgeleitet ist:

$$\|v\|_{h,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^2 \left(\varepsilon^2 \|\nabla v^i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|\sqrt{c}v^i\|_{0,\Omega_i}^2 + \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_i \frac{\partial v^i}{\partial n_i} \right\|_{0,E}^2 \right) + \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2. \quad (2.22)$$

Unter der Annahme realistischer Glattheitsvoraussetzungen über die Lösung u in Abhängigkeit von ε , vergl. etwa [Ape99], kann die folgende Abschätzung für den Fehler $u - u_h$ (u_h von (2.19)) bewiesen werden, die zugleich die Konvergenz gleichmäßig bezüglich des Parameters ε ausweist:

$$\|u - u_h\|_{1,h}^2 \leq C (\varepsilon |\ln \varepsilon|^3 h^2 + h^4).$$

Die Konstante C ist unabhängig von $h \in (0, h_0]$ und $\varepsilon \in (0, 1)$.

Zur Illustration der theoretischen Resultate zur Konvergenz wird in [HP03] folgendes Randwertproblem betrachtet:

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = -e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{y}{\varepsilon}} \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2.23)$$

wobei Ω durch $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ gegeben ist. Das Gebiet wird wie in der Abbildung ersichtlich vernetzt. Die Experimente zeigen, dass selbst für sehr kleine Werte von ε die theoretisch bewiesenen Konvergenzraten erreicht werden, wenn die Breite der Randschicht adäquat gewählt wird.

Interface Probleme

In [HN03] (siehe auch [Hei03] für eine kurze Übersicht) wird die Mortar-Methode nach Nitsche für Interfaceprobleme mit unstetigen Koeffizienten und Transmissionsbedingungen betrachtet. Die Interfaces für Gebietsdekomposition und die Transmissionsbedingungen dürfen hier zusammenfallen. Die Transmissionsbedingungen lassen im Allgemeinen

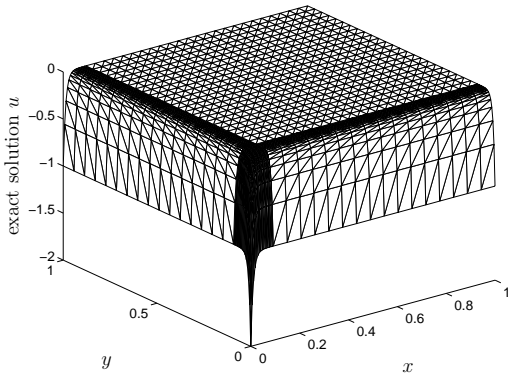


Abb. 2.18: Lösung u auf dem h_3 -Netz für $\varepsilon = 10^{-2}$

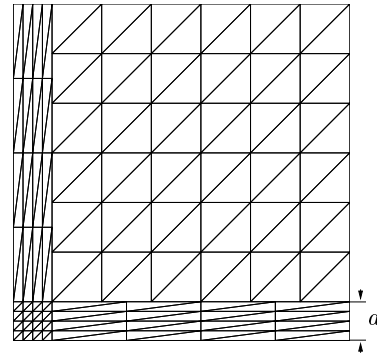


Abb. 2.19: h_1 -Netz, Randschichtbreite a

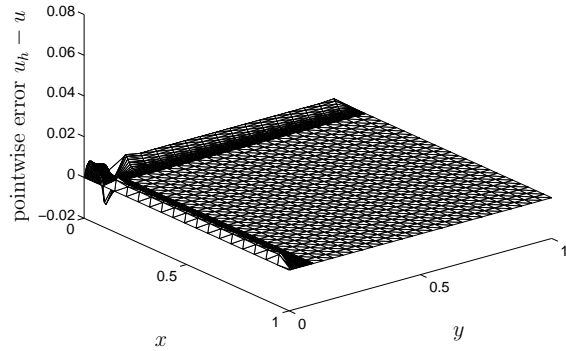
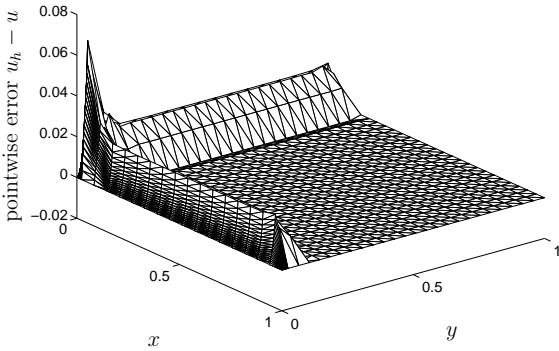


Abb. 2.20: Punktweiser Fehler $u_h - u$ für $\varepsilon = 10^{-2}$ und für $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^2$ ($\alpha_2 = 1$) auf Netzen mit $a = \varepsilon |\ln \varepsilon|$ (links) und $a = 2\varepsilon |\ln \varepsilon|$ (rechts)

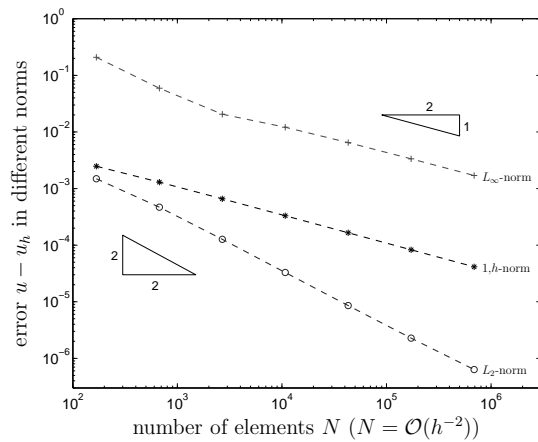
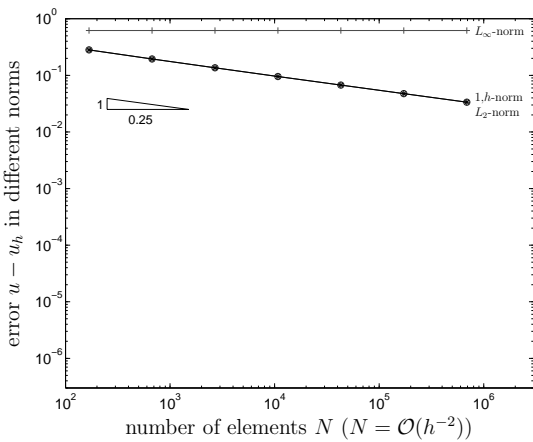


Abbildung 2.21: Beobachteter Fehler $u - u_h$ in der L_2 -, L_∞ - und $\|\cdot\|_{1,h}$ -Norm für $\varepsilon = 10^{-5}$, $a = 0.5$ (links) und $a = \varepsilon |\ln \varepsilon|$ (rechts)

nur Lösungen u des Randwertproblems zu, für die gilt: $u \in H^{1+\delta}(\Omega)$, $\delta > 0$, δ beliebig. In [HN03] werden für die Behandlung der Normalenableitung $(\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} \notin L_2(\Gamma))$, Γ Interface) Sobolevräume mit Potenzgewichten r^β (β reell) angewendet und neue Werkzeuge (Fehlerfunktionale, Spursätze) für die Fehlerabschätzung entwickelt. Diese führen auch bei verminderter Glattheit der Lösung zu optimalen Fehlerabschätzungen in einer diskreten H^1 -ähnlichen und der L_2 -Norm. So können für stückweise lineare Ansätze, die unstetig auf polygonalem Interface Γ sind, die Konvergenzraten $\mathcal{O}(h)$ bzw. $\mathcal{O}(h^2)$ nachgewiesen werden. Im Ergebnis numerischer Experimente werden Aussagen zu den Konvergenzraten gemacht, die in guter Übereinstimmung mit den theoretischen Resultaten liegen. Die Methode reagiert auf die Wahl von γ (oberhalb des theoretischen Minimalwertes: $\gamma > C_I$) nicht sensitiv, der Verfahrensfehler ist für sehr große Bereiche von γ fast konstant.

2.4.2 Teilproblem: Discontinuous–Galerkin Methode

Der betreuende Bearbeiter dieses Teilthemas, Prof. Schneider, konnte wegen Rufannahme in Kiel nur im Zeitraum 2002 – September 2003 in Chemnitz im SFB mitarbeiten. Im Berichtszeitraum ist eine Diplomarbeit entstanden, die sich mit der Realisierung der im Antrag vorgeschlagenen Multiwavelets beschäftigte. Gemeinsam mit den Gästen Prof. Aihui Zhou und Dr. Li von der Chinesischen Akademie der Wissenschaften in Peking wurde im Berichtszeitraum in der Arbeitsgruppe Schneider ebenfalls an Discontinuous Galerkin und geeigneten Multiwaveletbasen gearbeitet. Die Diplomandin Claudia Franken hat in ihrer Diplomarbeit [Fra03] anstelle eines Discontinuous-Galerkin-Ansatzes mit stückweise linearen Ansatzfunktionen eine schwache Kopplung zwischen den Elementen analog zu den Mortarmethoden verwendet. In diesem Fall ist es im Prinzip sogar möglich die Kopplungsnebenbedingung zu eliminieren, man endet dann bei Crouzieux-Raviart-Elementen, wovon aber kein Gebrauch gemacht wurde. Von den vorgeschlagenen Multiskalenbasen sind unter Weglassen eines Types alle Basisfunktionen orthogonal bezüglich der durch den gebrochenen Laplace-Operator definierten Bilinearform, d.h. innerhalb der Elemente. Die Kopplungsnebenbedingungen bestimmen jedoch die Kondition des Systems. Diese Kopplungsnebenbedingungen mussten explizit auch über eine Multiskalenbasis über dem Skelett der Elementkanten realisiert werden. So konnte eine Vorkonditionierung realisiert werden, die noch (wie die numerischen Ergebnisse belegen) auf ein logarithmisches Wachsen hindeutet. Diese Vorkonditionierung hat sich jedoch bislang noch nicht auf das Discontinuous Galerkin übertragen lassen. Auch hinsichtlich der Theorie konnte die Situation bislang nicht geklärt werden. Das Weglassen des einen Basistyps erfordert erneut den Nachweise einer diskreten LBB-Bedingung für die verwendeten Ansatzräume. Hier liegt nun aufgrund der Multiskalenbasis eine vollkommen neuartige Situation vor, die bislang noch nicht behandelt ist. Für Multiwaveletbasen gibt es bis dato keine der Normäquivalenz entsprechenden Aussagen, so dass die Behandlung elliptischer Randwertprobleme, insbesondere die Vorkonditionierung mit unstetigen Multiwavelets im Zusammenhang mit Discontinuous Galerkin, bislang noch nicht geklärt ist. Erfahrungen und Ergebnisse hinsichtlich Multigridlösern von Kamschat zeigen, dass die Situation hier durchaus schwieriger ist. Zusammenfassend muss gesagt werden, dass erste Resultate erzielt wurden, es aber hierbei noch nicht ganz gelungen ist, alle grundlegenden Probleme zu lösen.

Während eines Gastaufenthaltes von Prof. Aihui Zhou wurde mit der Frage der a poste-

riori Fehlerschätzer begonnen. A priori Fehlerschranken für Discontinuous Galerkin sind hinlänglich bekannt. Auch die Entwicklung von a posteriori Fehlerschätzern ist relativ klar vorgezeichnet, als Summe lokaler Residuen plus Kantensprünge der Normalableitung, und das ist die Besonderheit bei Discontinuous Galerkin, Sprünge der Lösung selbst. Die wesentliche Schwierigkeit ist aber nun das explizite Auftreten der Normalableitung, die in $H^{-1/2}$ abgeschätzt werden müsste. Unter einer kleinen Zusatzannahme konnte dann Effizienz und Verlässlichkeit des Fehlerschätzers gezeigt werden. Diese Arbeit schließt Lücken einer Arbeit von Becker und Hansbo. Zusätzlich wurden lokale Abschätzungen gezeigt. Für die Resultate siehe [SXZ04].

2.4.3 Teilproblem: Kontakt

Die folgenden Grafiken sollen die Ergebnisse der Vorgehensweise aus Abschnitt 2.3.3 illustrieren.

Ebene Hindernisse

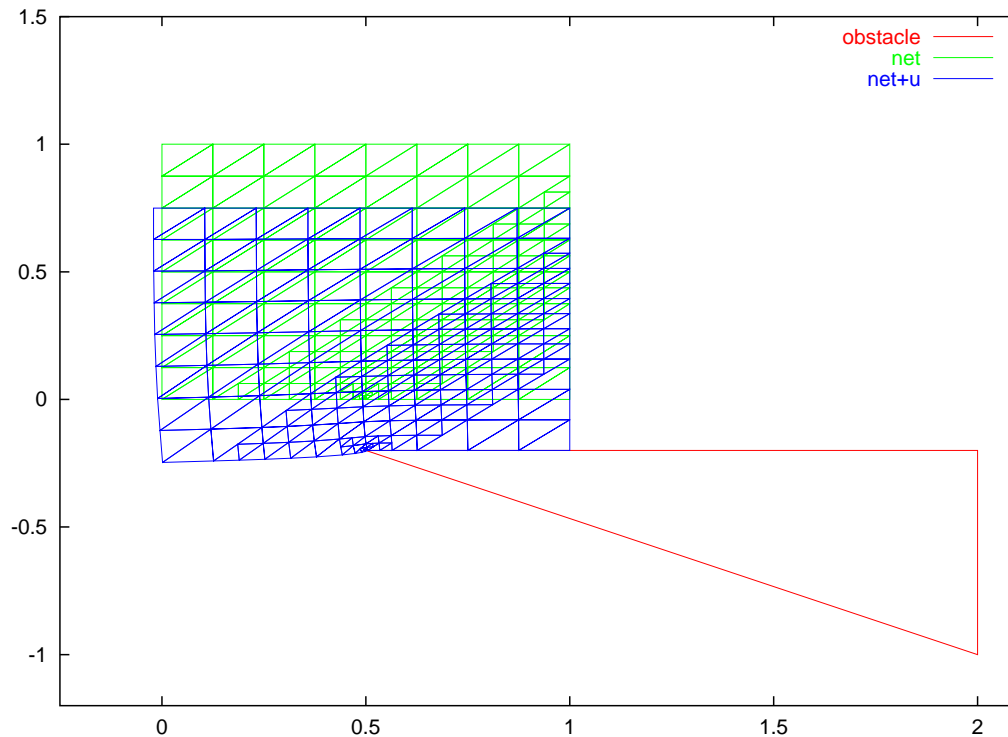


Abbildung 2.22: Beispiel für ein endliches Hindernis

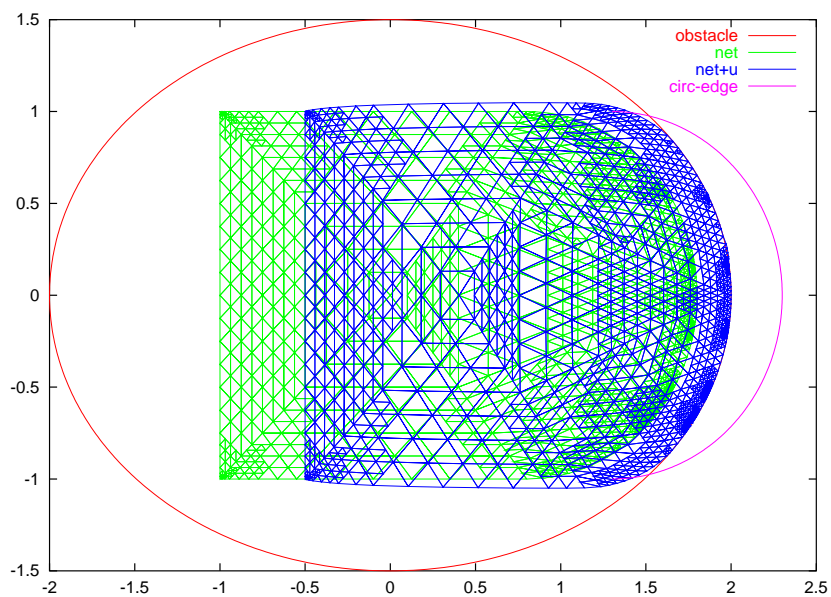
Hindernisse mit impliziten Funktionen

Abbildung 2.23: Hindernisbeschreibung mit impliziten Funktionen 1

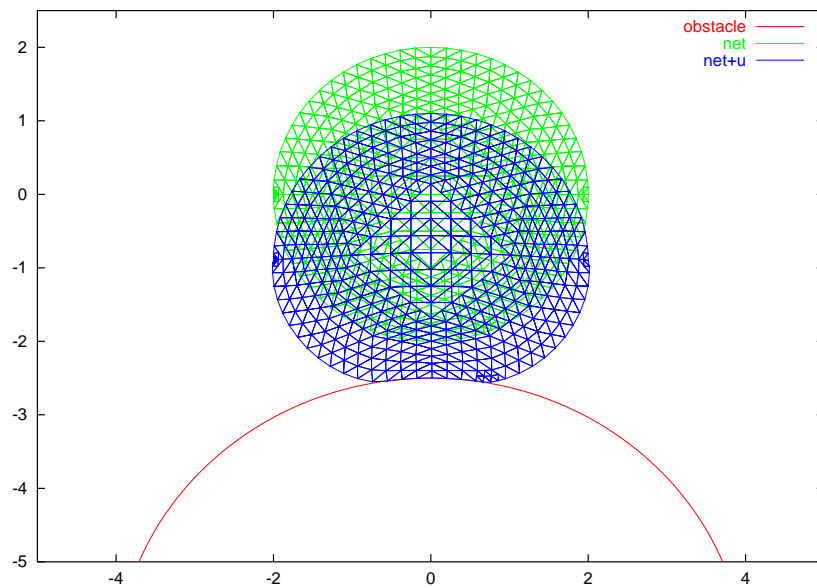
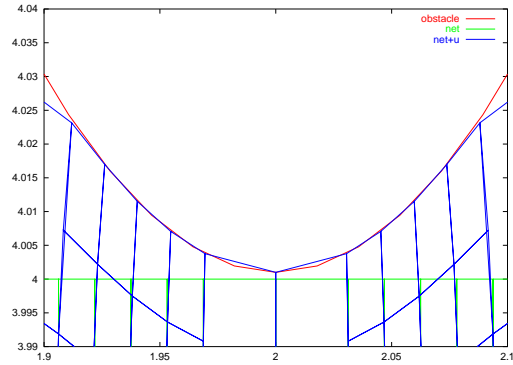
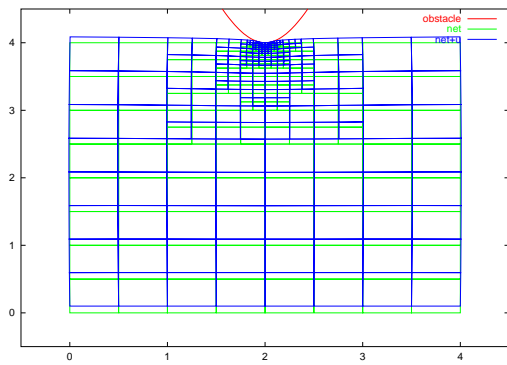
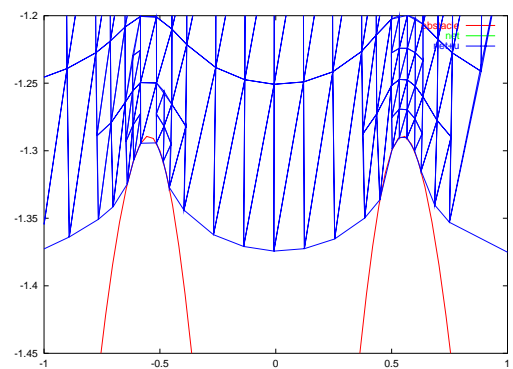
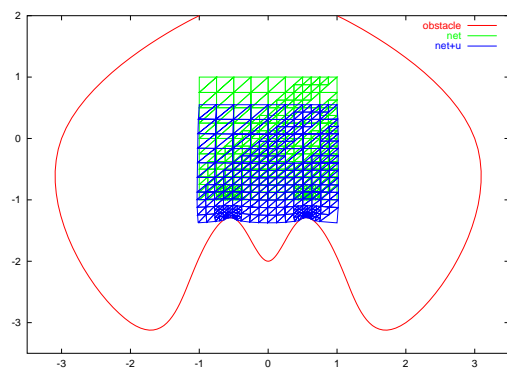


Abbildung 2.24: Hindernisbeschreibung mit impliziten Funktionen 2

Hindernisse mit Splinekurven

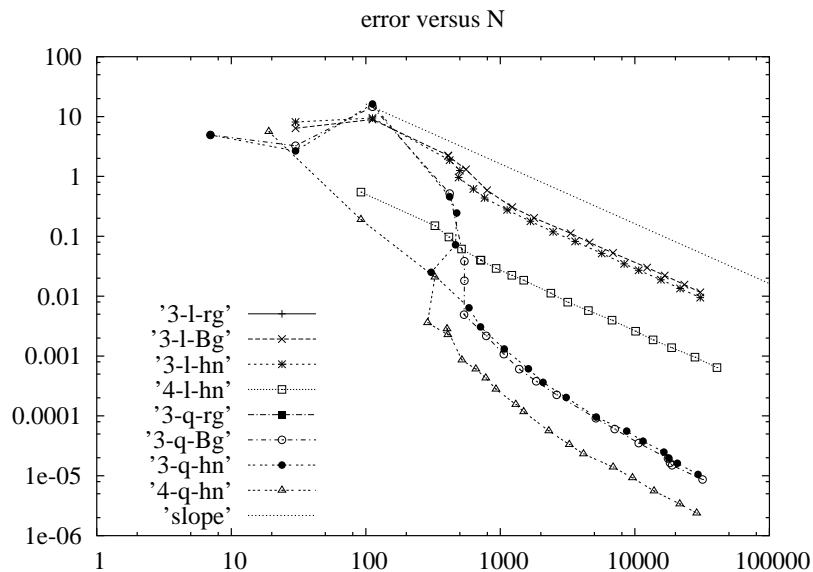


Hindernis mit Splinekurven 1



Hindernis mit Splinekurven 2

Insgesamt muss bemerkt werden, dass die Einbettung des Kontaktalgorithmus in die adaptive Finite Elemente Technik einen sehr robusten Gesamtalgorithmus liefert. Wie folgender Plot des Fehlerschätzers über die Freiheitsgrade zeigt, entsteht insgesamt ein Aufwand, der kaum größer ist als bei einem einfachen linear elastischen Deformationsproblem ohne Kontakt.



Literaturverzeichnis

- [AN98] Th. Apel and S. Nicaise. The finite element method with anisotropic mesh grading for elliptic problems in domains with corners and edges. *Math.MethodsAppl.Sci.*, 21:519–549, 1998.
- [Ape99] Th. Apel. *Anisotropic finite elements: Local estimates and applications*. Advances in Numerical Mathematics. Teubner, Stuttgart, 1999. Habilitationsschrift.
- [Hei96] B. Heinrich. The Fourier–finite–element–method for Poisson’s equation in axisymmetric domains with edges. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(5):1885–1911, 1996.
- [Hei02] B. Heinrich. Nitsche-type finite element method for elliptic problems with singularities. *PAMM*, 1: 522–523, 2002.
- [Hei03] B. Heinrich. Nitsche-type finite element method for elliptic problems with singularities. *Numerical Mathematics and Applications*, pp. 837– 845, Springer Verlag 2003.
- [HN03] B. Heinrich and S. Nicaise. Nitsche mortar finite element method for transmission problems with singularities. *IMA J. Numer. Anal.*, 23:331–358, 2003.
- [HNW97] B. Heinrich, S. Nicaise, and B. Weber. Elliptic interface problems in axisymmetric domains. Part I: Singular functions of non-tensorial type. *Math. Nachr.*, 186:147–165, 1997.
- [HNW00] B. Heinrich, S. Nicaise, and B. Weber. Elliptic interface problems in axisymmetric domains. Part II: The fourier-finite-element approximation of non-tensorial singularities. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 10(2):571–600, 2000.
- [HP02] B. Heinrich and K. Pietsch. Nitsche type mortaring for some elliptic problem with corner singularities. *Computing*, 68: 217–238, 2002.
- [HW96] B. Heinrich and B. Weber. Fourier-finite-element Approximation of Elliptic Interface in Axisymmetric Domains. *Math. Methods in the Applied Sciences*, 19:909–931, 1996.
- [Mel02] J.M. Melenk. *hp-Finite Element Methods for Singular Perturbations*, Springer-Verlag, 2002.
- [Mey99] A. Meyer. Projected PCGM for Handling Hanging Nodes in Adaptive Finite Element Procedures. Preprint SFB393 99-25 TU Chemnitz.
- [Mey02] A. Meyer. Projection Techniques embedded in the PCGM for Handling Hanging Nodes and Boundary Restrictions. in: *Engineering Computational Technology*, B.H.V.Topping and Z.Bittnar,(Eds.) Saxe-Coburg Publ., Stirling, Scotland, 147-165.
- [MeUn04] A. Meyer and R. Unger. Projection methods for contact problems in elasticity. Preprint SFB393 04-04 TU Chemnitz.
- [HN99] B. Heinrich and B. Nkemzi. The Fourier-Finite-Element Method for Lamé Equations in Axisymmetric Domains. Preprint SFB393/99-36, TU Chemnitz, 1999.

- [HP03] B. Heinrich and K. Pönitz. Nitsche type mortaring for singularly perturbed reaction-diffusion problems. Preprint SFB393 03-17 TU Chemnitz, 2003.
- [Fra03] C. Franken. Multi-Wavelet-Basen für nicht-konforme Finite-Elemente. Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz, 2003.
- [Pie00] K. Pietsch. Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche für elliptische Probleme der Ebene. Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz, 2000.
- [Poe04] K. Pönitz. Nitsche-Finite-Elemente-Methode für die Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen Preprint SFB393, TU Chemnitz, 2004, in Vorbereitung.
- [SXZ04] R. Schneider, Y. Xu und A. Zhou. On A Posteriori Error Estimates for Discontinuous Galerkin methods Advances in Computational Analysis, to appear 2004.

2.5 Offene Fragen / Ausblick

Kontaktsimulation

Die guten Ergebnisse der 2D-Simulation legen die Verallgemeinerung ins 3-Dimensionale nahe, was auch bei Anwendungen im Ingenieurbereich die eigentliche Herausforderung darstellt. Technisch erfordert dies keine wesentlichen Änderungen, weil die Projektionsoperatoren analog als $I - nn^T$ definiert werden können (mit n der lokalen Normalen am Hindernis).

Wesentlich komplizierter stellt sich der 2-Körperkontakt (also deformierbares Hindernis) dar. Während die Projektoren relativ leicht verallgemeinerbar sind, ist insbesondere der Durchdringungstest von wesentlich höherem Aufwand. Dies sollte in Fortsetzung dieses Projektes aufgenommen werden.

Nitsche-Mortaring

a) Für singular gestörte Diffusions-Reaktionsprobleme vom Typ $-\varepsilon^2 \Delta u + cu = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$, bisher auf Rechtecken betrachtet, wären Finite-Elemente-Methoden vom Nitsche-Typ für Gebietszerlegungen im Fall allgemeiner polygonaler Gebiete Ω aus der Sicht der Numerischen Analysis zu begründen, etwa unter Nutzung von Regularitätsergebnissen aus [Mel02]. Hier sind dann Eckensingularitäten und zugleich Randschichten der Lösung zugelassen. Dazu wären Kombinationen von nichtkonsistenten isotropen und anisotropen Netzen zu betrachten, mit lokal verfeinerten Netzen in der Umgebung der Ecken. Unter diesen sehr schwachen und anwendungsrelevanten Voraussetzungen interessiert der Nachweis von Konvergenzraten, wie diese von regulären Lösungen und konformen finiten Elemente her bekannt sind.

b) Für die Lamé'schen Gleichungen mit gemischten Randbedingungen über allgemeinen polygonalen Gebieten $\Omega \subset R^2$ wäre die Finite-Elemente-Methode vom Nitsche-Typ (Nitsche-Mortaring) aus der Sicht der Numerischen Analysis zu begründen (erste Ansätze dazu liegen vor) und auf ihre Eignung für Kontaktaufgaben zu untersuchen. Die wesentlichen Ungleichungen/Abschätzungen, die für den Fall der Poissongleichung bekannt sind, müssten auf den Fall der Lamé'schen Gleichungen übertragen werden, auch

unter der Voraussetzung, dass die verwendeten Netze am Interface Γ der Gebietszerlegung nicht quasi-uniform sind. Gleichzeitig wären Lösungssingularitäten, bedingt durch Knickpunkte des Randes bzw. durch gemischte Randbedingungen, mittels graduerter Netze so zu behandeln, dass Konvergenzraten – wie von regulären Lösungen und konformen finiten Elementen her bekannt – nachgewiesen werden können.

