

## 2.1 Teilprojekt A8

Parallele numerische Lösung von Optimalsteuerungsproblemen für partielle Differentialgleichungen

### 2.1.1 Antragsteller

Prof. Dr. Volker Mehrmann  
Fachbereich 3 / Mathematik  
Sekretariat MA 4–5  
Technische Universität Berlin  
Straße des 17. Juni 136  
D–10623 Berlin

Tel. (030) 314-25736 (21264)  
Fax (030) 313-79706  
email: mehrmann@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Fredi Tröltzsch  
Fachbereich 3 / Mathematik  
Sekretariat MA 4–5  
Technische Universität Berlin  
Straße des 17. Juni 136  
D–10623 Berlin

Tel. (030) 314-79688 (21264)  
Fax (030) 314-79706  
email: troeltz@math.tu-berlin.de

### 2.1.2 Projektbearbeiter

Projektbearbeiter (Ergänzungsausstattung):

Dr. T. Penzl (Lehrstuhl Numerische Algebra)  
Dr. N. Arada (Lehrstuhl Optimale Steuerung)

Mitarbeiter (Grundausrüstung):

Dr. A. Rösch (Lehrstuhl Optimale Steuerung).

## 2.2 Zwischenbericht

Ein ausführlicher Bericht wird bis zum 30.09.2001 vorgelegt. Es folgt ein Zwischenbericht.

Ziel dieses Teilprojekts war die Entwicklung effizienter numerischer Methoden zur Lösung einer Klasse von Optimalsteuerproblemen bei partiellen Differentialgleichungen auf modernen Rechnerarchitekturen. Grundlage für diese neuen Methoden sollte die explizite Lösung des aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen resultierenden strukturierten Zweipunkt–Randwertproblems der ortsdiskretisierten Euler-Lagrange Gleichungen sein. Diese Randwertprobleme sollen mit Hilfe von Methoden gelöst werden, die einerseits auf die zugrunde liegenden Differentialgleichungstypen aber andererseits auch auf die besondere algebraische Struktur der Euler-Lagrange Gleichungen zugeschnitten sind.

Als Modelle sollten dabei zunächst linear–quadratische optimale Randsteuerprobleme bei parabolischen Differentialgleichungen in Ortsgebieten einfacher Geometrie behandelt werden, wie sie unter vereinfachenden Annahmen bei gesteuerten Aufheizungs- und Abkühlungsprozessen auftreten.

Die gesteckten Ziele im Rahmen dieses Projektes wurden erreicht und zum Teil weit übertroffen. Leider musste gegen Mitte des Projektes die Zielrichtung der Forschungen etwas verändert werden, da Herr Dr. Thilo Penzl als Mitarbeiter der Grundausrüstung das Projekt wesentlich geprägt hat, Ende 1999 bei einem Forschungsaufenthalt in Kanada tödlich verunglückt ist.

Wesentliche Ergebnisse sind Fortschritte bei der Behandlung grosser linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme. Hier konnte sowohl für die direkte Lösung des Steuerungsproblems mittels des Newtonverfahrens für die entsprechende Riccati Gleichung [6, 10, 12, 14] als auch des zweiten betrachteten Ansatzes mittels Modellreduktion [9, 10, 11] erfolgreich gezeigt werden, dass diese Methoden für die betrachtete Problemklasse sehr erfolgreich arbeiten.

Bei der Modellreduktion wird zuerst das durch eine Orts-Semidiskretisierung entstehende Input-Output System mittels Modellreduktion durch ein System mit kleiner Systemdimension approximiert, für dieses die Optimalsteuerung berechnet und dann diese für das ursprüngliche System verwendet [10, 13, 14]

Diese Methoden und auch die Methoden zur direkten Lösung der grossen Riccati-gleichungen sind bereits im Paket LYAPACK implementiert und mit grossem Erfolg an der betrachteten Problemklasse getestet worden [14]. Eine FORTRAN Version ist in Vorbereitung.

Eine der derzeit besten Methoden zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen bei semilinearen partiellen Differentialgleichungen ist die Methode der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP). Als Verfahren vom Newton-Typ ist diese Methode lokal quadratisch konvergent, bedarf jedoch einer gewissen Globalisierung. Im Projekt wurde deshalb die *verallgemeinerte (augmented) Lagrange-Newton-SQP-Methode* sowohl theoretisch als auch numerisch untersucht [3].

Bei Vorgabe von Zustandsbeschränkungen wird die numerische Analysis wesentlich schwieriger. Hier entstanden Resultate zu aktive-Mengen-Strategien, welche auf die Lösung der quadratischen Unterprobleme des SQP-Verfahrens angewendet werden können. Die entwickelte Technik ist sehr schnell und hat auch in schwierigen Problemen zuverlässig die Lösung ermittelt, [8].

Verfahren höherer Konvergenzordnung wurden auch bei der Identifikation von nichtlinearen Wärmeübergangsgesetzen verwendet. Hier eignen sich SQP-Verfahren aus verschiedenen Gründen weniger. Gauss-Newton-Techniken liefern bessere Ergebnisse, [15]. Sie sind wesentlich schneller als die vorher verwendeten Gradientenmethoden und auch robust gegenüber Störungen in den gegebenen Messdaten.

Weiterhin wurden Verfahren der linearen bzw. quadratischen Optimierung zur numerischen Lösung einer Klasse von Steuerungsproblemen bei linearen elliptischen Differentialgleichungen untersucht, bei denen ein Maximum-Norm-Zielfunktional gegeben ist. In [7] wurden Aufgaben dieser Art mit a priori gegebenen Zustandsbeschränkungen sowohl analytisch als auch numerisch behandelt, wozu verschiedene innere-Punkt-Methoden sowie alternativ das Simplexverfahren zum Einsatz kamen.

In [2] werden Fehlerabschätzungen in der  $L^2$ - sowie  $L^\infty$ -Norm für Steuerungsprobleme bei semilinearen elliptischen Gleichungen in polygonal berandeten Ortsgebieten bei einer FEM-Diskretisierung mit Standard-Dreieckselementen bewiesen. Die er-

haltenen Fehlerabschätzungen, sind möglicherweise noch nicht optimal, verbessern aber die bekannten wesentlich. Weitere Ergebnisse zu dieser Thematik wurden in [4] publiziert. Theoretische Untersuchungen zur Behandlung von Optimalsteuerungsproblemen, welche diesen Komplex abrunden, enthalten die Arbeiten [5] sowie [1].

## Literaturverzeichnis

- [1] N. ARADA. Relaxation of optimal control problems in  $L^p$ -spaces. *Control Optimization and Calculus of Variations (COCV)* 6 (2000), 73–96.
- [2] N. ARADA, E. CASAS AND F. TRÖLTZSCH. Error estimates for a semilinear elliptic control problem. *Preprint SFB 393/00–32, TU Chemnitz, 2000* .
- [3] N. ARADA, J.-P. RAYMOND, AND F. TRÖLTZSCH. On an Augmented Lagrangian SQP method for a class of optimal control problems in Banach spaces. *Preprint SFB 393/00–19, TU Chemnitz, 2000 Eingereicht bei Computational Optimization and Applications*.
- [4] N. ARADA AND J. P. RAYMOND. Approximation of optimal control problems with state constraints. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 21 (2000), 601–621.
- [5] N. ARADA AND J. P. RAYMOND. Optimal control problems with mixed control-state constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39 (2000), 1391–1407.
- [6] P. BENNER, J. LI AND T. PENZL *Numerical solution of large Lyapunov equations, Riccati equations, and linear-quadratic optimal control problems*, in preparation, Zentrum f. Technomathematik, Fb. Mathematik und Informatik, Univ. Bremen, 28334 Bremen, Germany, 2000.
- [7] T. GRUND AND A. RÖSCH. Optimal control of a linear elliptic equation with a supremum-norm functional. Eingereicht bei Optimization Methods and Software.
- [8] K. KUNISCH AND A. RÖSCH. Primal-dual strategy for constrained optimal control problems. Eingereicht bei SIAM Journal Control Optimization.
- [9] V. MEHRMANN, T. PENZL, AND F. TRÖLTZSCH. Control of heterogeneous systems of partial differential equations and differential algebraic equations. *Invited presentation: 9th Seminar on Numerical Solution of Differential and Differential-Algebraic Equations, Halle, 4.9.–8.9.2000*.
- [10] T. PENZL. Numerische Lösung großer Lyapunov-Gleichungen. *Logos Verlag, Berlin, 1998*.
- [11] T. PENZL. Algorithms for model reduction of large dynamical systems. *Preprint SFB 393/99-39, TU Chemnitz eingereicht zur Veröffentlichung, 2000*.
- [12] T. PENZL. A cyclic low rank Smith method for large sparse Lyapunov equations. *SIAM J. Sci. Comput.* (21), pages 1401–1418, 2000.

- [13] T. PENZL. Eigenvalue decay bounds for solutions of Lyapunov equations: the symmetric case. *Preprint SFB 393/99-39, TU Chemnitz; Systems and Control Letters, (40)*, pages 139–144, 2000.
- [14] T. PENZL. LYAPACK - users guide. *Preprint SFB 393/00-33, TU Chemnitz*, 2000.
- [15] A. RÖSCH. A Gauss-Newton Method for the Identification of Nonlinear Heat Transfer Laws. Eingereicht.
- [16] T. STYKEL. On a criterion for asymptotic stability of differential-algebraic equations. *Preprint SFB 393/99-17, TU Chemnitz; eingereicht zur Veröffentlichung bei Zeitschr. f. Angew. Math. und Mech.*, 2000.
- [17] T. STYKEL. Generalized Lyapunov equations for descriptor systems: Stability and inertia theorems.