2.1 Teilprojekt A7

Biorthogonale Waveletbasen zur effizienten Behandlung für Randintegralgleichungen

2.1.1 Antragsteller

Prof. Dr. Reinhold Schneider
geb. 20.03.1957
Professur Numerik (Partielle Differentialgleichungen)
Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz
09107 Chemnitz
Tel.: (0371) 531-8441
Fax: (0371) 531-2657
reinhold.schneider@mathematik.tu-chemnitz.de

2.1.2 Projektbearbeiter

Name(n) des/der Projektbearbeiter/Mitarbeiter, Lehrstuhl, Fachgruppe

Dr. Christian Bourgeois (Projektberarbeiter, vorübergehend)
Dipl.-Math. Helmut Harbrecht (Projektbearbeiter / Grundausstattung)
Doz. Dr. Michael Jung (Grundausstattung)
Dipl.-Math. Michael Konik (Grundausstattung / Projektbearbeiter)
Dipl.-Ing. Cristian Pérez (Projektbearbeiter, vorübergehend)

2.2 Ausgangsfragestellung/Einleitung

Gegenstand des Teilprojektes A7 war die effiziente Behandlung von Randintegralgleichungsmethoden mittels Waveletbasen. Randintegralgleichungsmethoden eignen sich vielfach zur numerischen Lösung bestimmter Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen, wie beispielsweise Außenraumprobleme der Akustik und der Elektrostatik sowie Randwertprobleme der Elastizitätstheorie und der Strömungsmechanik. Anstatt eine Diskretisierung des Gebietes bzw. des unbeschränkten Außenraumes vorzunehmen, wird zur Lösung einer Randintegralgleichung lediglich die Oberfläche des Gebietes diskretisiert. Dies reduziert erheblich die Anzahl der erforderlichen Freiheitsgrade zur Approximation der Lösung. Ein wesentlicher Nachteil beim Einsatz von Randelementmethoden besteht jedoch darin, dass die auftretenden Matrizen vollbesetzt sind. Im Gegensatz dazu führen z.B. Finite-Elemente-Methoden im allgemeinen zu dünn besetzten Matrizen.

Ziel und Aufgabe moderner effizienter Methoden zur Lösung von Integralgleichungen [GR, HANO, GI, GT, HA, RO, TYR] ist es den Aufwand zur Lösung auf eine asymptotisch nahezu optimale Ordnung zu reduzieren ohne die Genauigkeit der Verfahren zu beeinträchtigen. Bedeutsam hierbei ist sowohl die Reduktion des erforderlichen Speicherplatzes als auch der Rechenzeiten. Während zur traditionellen Darstellung der Systemmatrix $\mathcal{O}(N^2)$ Matrixeinträge erforderlich sind, N sei hier die Anzahl der Gleichungen, reduzieren diese Methoden den Aufwand für eine Matrix-Vektor-Multiplikation auf eine fast optimale Rate $\mathcal{O}(N \log^a N)$ oder gar optimale Rate $\mathcal{O}(N)$. Waveletbasen offerieren ebenfalls eine Möglichkeit dies zu erreichen [BCR]. Die Verwendung von Waveletbasen, z.B. im Rahmen des Galerkin-Verfahrens, führt zu quasi dünn besetzten Matrizen. Dies bedeutet, dass ein Großteil der Matrixeinträge vernachlässigt werden kann ohne das Ergebnis wesentlich zu beeinträchtigen [DPS2]. Der Antragstellung gingen grundlegende Entwicklungen dieser Methoden voraus [DPS1, DPS2, DPS3, S, PSS], an der der Antragsteller aktiv beteiligt war. Im Berichtszeitraum sollten das vom Antragsteller mitentwickelte Konzept [S, DPS3, DSII], wie u.a. die Anwendung biorthogonaler Waveletbasen [CDF, DS1], und die direkte Generierung der komprimierten Matrix [S, PS2] realisiert und weiterentwickelt werden. Die Verbindung dieser Methoden mit Finite-Elemente-Methoden, die die Vorteile beider Methoden vereinigt, wurde im Berichtszeitraum begonnen.

2.3 Forschungsaufgaben/Methoden

Schnelle Methoden zur Lösung von Randintegralgleichungen eröffnen für die Randelementmethoden neue und bislang ungeahnte Möglichkeiten. Darüberhinaus initiieren sie die Entwicklung neuer Verfahren, welche auf Darstellungen beruhen, die ehemals viel zu aufwendig waren, aber mit Hilfe dieser neuen Ansätze wesentlich effizienter werden. Als Beispiel seien genannt das Aufstellen der inversen Matrix einer Finite-Elemente-Berechnung, Funktionen von Operatoren wie $\mathbf{A}^{-1}$, $e^{-t\mathbf{A}}$ usw. [HAK]. Abgesehen von Vorläufervarianten waren die ersten schnellen Methoden für Integralgleichungen die *Fast Multipole Methode* [GR, RO] und das unabhängig davon entwickelte *Panel Clustering* [HANO]. Beide Methoden sind inzwischen weiterentwickelt worden und finden in verschiedenen Anwendungen Einsatz. Diesen Verfahren ist gemeinsam, daß das Potential lokal unterschiedlich approximiert wird um die Matrix-Vektor-Multiplikation zu beschleunigen. Die eigentliche Systemmatrix wird dabei nicht direkt aufgestellt. Dies bedeutet in Termen der Matrix eine Approximation ganzer Matrixblöcke durch Matrizen von niedrigem Rang. Diese Vorgehensweise wurde im Konzept der hierarchischen Matrizen [GT, HA, HAS] zu einem sehr allgemeinen und flexiblen Werkzeug formuliert.

2.3.1 Teilaufgabe Biorthogonale Waveletbasen für BEM

Wavelet- und Multilevelverfahren [BCR, BL, DPS3, HS] stellen eine Alternative dar, die inhaltlich den obigen Verfahren sehr nahe kommt, aber die besonderen Eigenschaften spezieller Wavelet- oder Multislevelbasen ausnutzt. Diese Methoden besitzen den Vorteil sich mit der effizienten Darstellung der Lösung verbinden zu lassen [CDD1, CDD2]. Hierbei wird die Anzahl der erforderlichen Matrixkoeffizienten drastisch reduziert. Diese *Matrixkompressionsmethoden* wurden in den vergangenen Jahren untersucht und sind mittlerweile gut verstanden. Dabei erwies sich der Einsatz der Matrixkompressionstechnik für Randintegralgleichungen als schwierig, da sich weder die ursprünglichen Konzepte der Waveletbasen noch Standardtechniken der Randelementmethoden wie das Panelverfahren einfach auf die neue Situation anwenden ließen.

Nach Wissen des Antragstellers ist die Arbeitsgruppe in Chemnitz eine der wenigen Gruppen, die mittlerweile Randintegralgleichungen effizient mit Hilfe von Waveletbasen zu lösen versteht. Sie ist vermutlich die einzige Gruppe, die die vielfältigsten Randintegralgleichungen in 3D, d.h. sowohl erster als auch zweiter Art, auch hypersinguläre Integraloperatoren, effizient mittels Wavelets behandeln kann. Die Arbeitsgruppe von C. Schwab (ETH Zürich) hat ebenfalls eine Implementierung von Waveletverfahren zur Lösung von Randintegralgleichungen vorzuweisen [LS, LSB, SCS]. Deren Realisierungen basieren auf unstetigen *Multiwavelets* [PSS] und beschränken sich aus diesem Grund auf Gleichungen zweiter Art. A. Rathsfeld betrachtet bei seinen konkreten Berechnungen ein geodätisches Problem [RA1, RA2] und behandelt daher nur ein rechteckiges Gebiet oder eine Kugel. Neuere Arbeiten von K. Amaratunga [AMA] basieren auf dem *Lifting Scheme* [SW] bzw. der *Stable completion* [CDP]. Dies wurde in [DPS3, S] vorgeschlagen. Erste Implementierungen dieser Idee wurden in einer Diplomarbeit [WES] durchgeführt mit vergleichbaren Ergebnissen. In der Arbeitsgruppe M. Griebel (Uni Bonn) liegen bezüglich der Waveletmatrixkompression Erfahrungen mit Geometrien vor, die den Tensorproduktansatz unterstützen. Dies sind in der Regel rechtwinklige Gebiete [GOS, KK].

In enger Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe von W. Dahmen (RWTH Aachen) wurden vom Antragsteller biorthogonale Waveletbasen auf Gebieten und Mannigfaltigkeiten [DS1] entwickelt, gegebenenfalls unter Einbeziehung homogener Randbedingungen [DS2], die es erlauben Waveletmethoden für Randintegralgleichungen in 3D als auch für Randwertprobleme und Anfangsrandwertprobleme anzuwenden. Diese Waveletbasen können global stetig gewählt werden und erfüllen die Erfordernisse der Theorie, vgl. Abbildung 2.1. Ähnliche Konstruktionen wurden etwa zeitgleich von [CTU, CM] zur Behandlung von elliptischen Differentialgleichungen vorgelegt. Wavelets optimaler Regularität auf Mannigfaltigkeiten wurden in [DSI] vorgeschlagen, allerdings ist hierbei der Aufwand der praktischen Realisierung beträchtlich.

Geradezu komplementär zu den bisherigen Methoden ist ein neuartiger Zugang von J. Tausch und J. White [TW], der sehr vielversprechend erscheint. Die Hierarchie der Funktionenräume wurde bislang durch Verfeinerung einer groben Ausgangstriangulierung definiert. Dagegen liegt in [TW] eine übliche feine Diskretisierung zugrunde. Die Hierarchie der Funktionenräume wird durch Vergröbern oder Agglomeration generiert. Diese Methode scheint nach unseren Erfahrungen und Vorstellungen sehr erfolgversprechend. So lassen sich mit dieser Methode die Vorteile der Waveletapproximation mit denen der Fast Multipole Methode verbinden. Der Fortsetzungsantrag zum Teilprojekt A7 basiert in wesentlichen Teilen auf dieser Konstruktion.

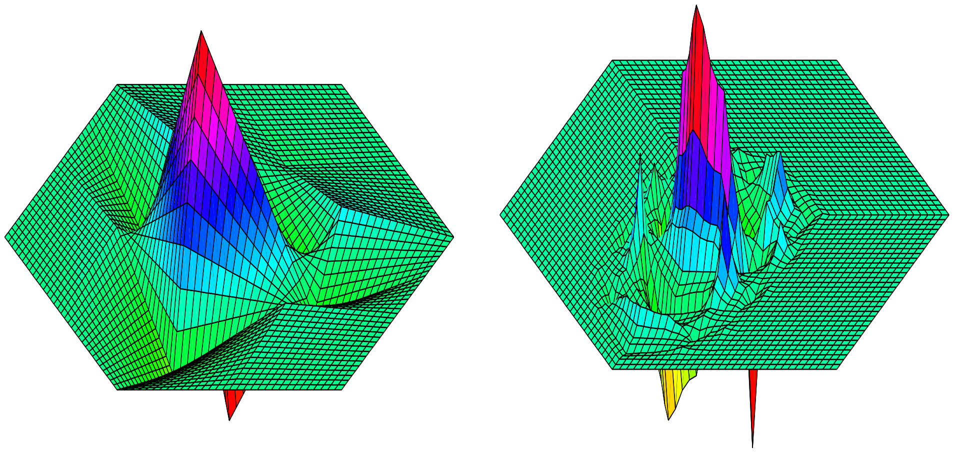


Abbildung 2.1: Global stetige lineare Wavelets nahe einer degenerierten Ecke.

2.3.2 Teilaufgabe Volldiskrete Wavelet-Galerkin-Verfahren

Zur Kompression wurde in mehreren Arbeiten eine Strategie entworfen, die die Konvergenzordnung, beispielsweise des Galerkin-Verfahrens, nicht beeinträchtigt [DPS2, DPS3, DSII, PS, PSS, S]. Die Kriterien nach denen entschieden wird, ob ein Matrixkoeffizient benötigt wird oder nicht, hängen lediglich von den Waveletindizes bzw. der räumlichen Position der Wavelets ab [DPS3, S]. Die Berechnung der relevanten Matrixkoeffizienten erfordert geeignete numerische Integrationsmethoden, da eine analytische Berechnung der auftretenden Integrale i.a. nicht möglich ist. Effiziente Berechnungen dieser Matrixkoeffizienten basieren zumeist auf adaptiven Zerlegungen des Integrationsgebietes und analytischen Integranden. Die ersten Vorschläge finden sich in [S, PS2] und basieren auf den zusammengesetzten Quadraturmethoden von [SWA] für die fast singulären Integrale und Techniken von S. Sauter für die singulären Integrale [SAT, SAS]. Die ersten Implementierungen erwiesen sich als langsam, sind aber mittlerweile deutlich verbessert worden [KDIS, HDIS]. Für das Kollokationsverfahren wurden in [ER] Produktintegrationsformeln entwickelt, die mit einer beschränkten Glattheit auskommen. Insgesamt erweist sich das Berechnen der Koeffizienten im Verhältnis zum Lösen des Gleichungssystems als relativ teuer. Erfahrungen von S. Schwab und C. Lage [LS, LSB] belegen, dass sich die Rechenzeiten des Wavelet-Galerkin-Verfahren im Vergleich zum Panel Clustering bezüglich der Kompression günstiger, aber bezüglich der Quadratur der erforderlichen Integrale ungünstiger verhalten. In der Arbeitsgruppe des Antragstellers wurden verschiedene Lösungen erarbeitet, die den Aufwand zum Generieren der komprimierten Matrix reduzieren [KDIS, HDIS, RS, KRS].

2.3.3 Teilaufgabe Kopplung der Waveletmatrixkompression mit Finiten Elementen

Die Einsatzmöglichkeiten von Randintegralgleichungsmethoden beschränken sich in der Regel auf lineare Randwertprobleme. Nichtlineare Phänomene sind im allgemeinen lokaler Natur, d.h. auf Teilgebiete begrenzt, während außerhalb dieser

Teilgebiete eine einfache (lineare) Modellierung zulässig bleibt. In dieser Situation lassen sich Finite-Elemente-Methoden zur Behandlung der nichtlinearen Gleichungen und Integralgleichungsmethoden im Restgebiet koppeln [CS, CKL, GS, HAN], wodurch die Vorteile beider Methoden verbunden werden. Diese Methodik ist mittlerweile weiterentwickelt worden und findet vielfach Einsatz [CKL].

In der letzten Antragsperiode wurde die Kopplung zwischen Finite-Elemente-Methoden und Randelementmethoden untersucht, obwohl dies ursprünglich erst später vorgesehen war. Die bislang entwickelten Waveletkonzepte bieten sich hervorragend zum Einsatz für die Kopplung von FEM und BEM an, denn der Koppelrand wird künstlich gewählt. Dabei will man sich nicht nur auf einfache Standardgeometrien, wie die Sphäre oder eine Würfeloberfläche, beschränken. Doch kann der Koppelrand so gewählt werden, dass die geometrische Komplexität die in den numerischen Beispielen behandelten Modellgeometrien nicht nennenswert übersteigt, vgl. Abbildung 2.2.

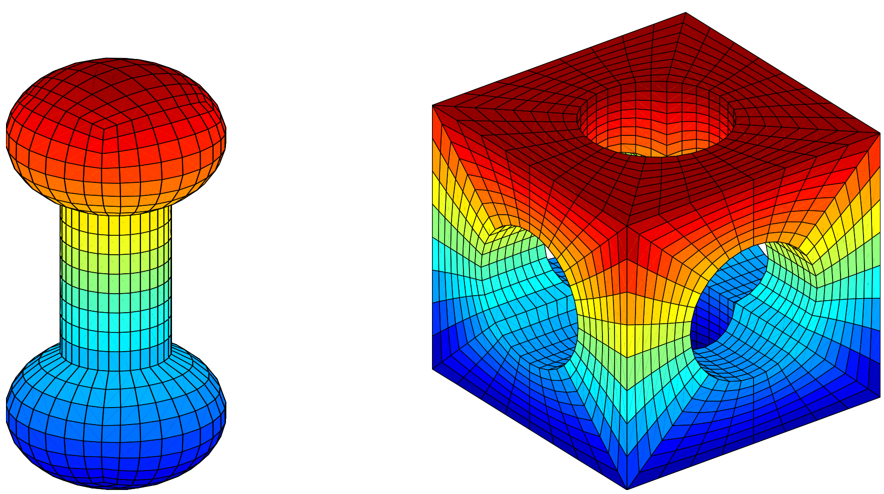


Abbildung 2.2: Gerechnete Modellgeometrien, dargestellt mit 14 bzw. 48 Patches.

Mit der Kopplung sollten darüberhinaus Schnittstellen geschaffen werden, die eine Basis für eine enge Zusammenarbeit mit der Gruppe um A. Meyer liefern soll. Die Kopplung von Wavelets zur Behandlung von Randintegralgeichungen und Multilevelverfahren für Finite Elemente wurden vorher lediglich von S. Zaprianov in seiner Dissertation [ZAP] behandelt. Allerdings stand dort vornehmlich die Vorkonditionierung der gekoppelten Systemmatrizen im Vordergrund. Die Kopplung von *komprimierten* Waveletverfahren mit Finite-Elemente-Methoden wurde in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Im Gegenzug trat die Behandlung der *adpativen Approximation* auf Basis der *Nichtlinearen Approximation* [DELU, DEV] etwas zurück. Auf diesem Gebiet wurden von A. Cohen, W. Dahmen und R. deVore unlängst fundamentale Fortschritte erzielt [CDD1, CDD2].

Literaturverzeichnis zu 2.3 (eigene Vorarbeiten und Fremdliteratur)

[AMA] K. Amaratunga, A wavelet based approach for the compression of kernel data in large scale simulations of 3D integral problems, *IEEE Comput. Sci. Enging.*, **2**, 34–45, (2000).

[BDD] A. Barinka, T. Barsch, P. Charton, A. Cohen, S. Dahlke, W. Dahmen, K. Urban, Adaptive Wavelet Schemes for Elliptic Problems – Implementation and Numerical Experiments, *IGPM RWTH Aachen Preprint*, Nr. 173, (1999), erscheint in *SIAM J. Sci. Comput.*.

[BCR] G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin, The fast wavelet transform and numerical algorithms, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**, 141–183, (1991).

[BL] A. Brandt, A.A. Lubrecht, Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations, *J. Comp. Phys.*, **90**, 348 – 370, (1991).

[CTU] C. Canuto, A. Tabacco, K. Urban, The wavelet element method, part I: Construction and analysis, *Appl. Comp. Harm. Anal.*, bf 6, 1–52, (1999).

[CDP] J.M. Carnicer, W. Dahmen, J.M. Peña, Local decomposition of refinable spaces, *Appl. Comp. Harm. Anal.*, **3**, 127–153, (1996).

[CKL] C. Carstensen, M. Kuhn, U. Langer, Fast parallel solvers for symmetric boundary element domain decomposition methods, *Num. Math.*, **79**, 321–347, (1998).

[CDD1] A. Cohen, W. Dahmen, R. DeVore, Adaptive wavelet schemes for elliptic operator equations – Convergence rates, *Math. Comp.*, **70**, 27–75, (2001).

[CDD2] A. Cohen, W. Dahmen, R. DeVore, Adaptive Wavelet Methods II - Beyond the Elliptic Case, *IGPM RWTH Aachen Preprint*, Nr. 199, (2000).

[CDF] A. Cohen, I. Daubechies, J.-C. Feauveau, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, **45**, 485–560, (1992).

[CM] A. Cohen, R. Masson, Wavelet adaptive method for second order elliptic problems – boundary conditions and domain decomposition, *Num. Math.*, **86**, 193–238, (2000).

[CS] M. Costabel, E.P. Stephan, Coupling of finite element and boundary element methods for an pseudo-plastic interface problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **27**, 1212–1226, (1988).

[DPS1] W. Dahmen, S. Prössdorf, R. Schneider, Wavelet approximation methods for periodic pseudodifferential equations. Part 1 - Convergence analysis, *Math. Zeitschrift*, **215**, 583–620, (1994).

[DPS2] W. Dahmen, S. Prössdorf, R. Schneider, Wavelet approximation methods for periodic pseudodifferential equations. Part 2 - Fast solution and matrix compression, *Advances in Computational Mathematics*, **1**, 259–335, (1993).

[DPS3] W. Dahmen, S. Prössdorf, R. Schneider, Multiscale methods for pseudodifferential equations on smooth manifolds, in: *Proceedings of the International Conference on Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications,* C.K. Chui, L.

Montefusco, L. Puccio (eds.), *Wavelet Analysis and Applications*, **5**, Academic Press, 385–424, (1994).

[DS1] W. Dahmen, R. Schneider, Composite wavelet bases for operator equations, *Math. Comp.*, **68**, 1533–1567, (1999).

[DS2] W. Dahmen, R. Schneider, Wavelets with complementary boundary conditions, Function spaces on the cube, *Result. Math.*, **34**, 255–293, (1998).

[DSI] W. Dahmen, R. Schneider, Wavelets on manifolds I. Construction and domain decomposition, *SIAM J. Math. Anal.*, **31**, 184–230, (1999).

[DSX] W. Dahmen, R. Schneider, Y. Xu, Nonlinear functionals of wavelet expansions – Adaptive reconstruction and fast evaluation, *Numer. Math.*, **86**, 40–101, (2000).

[DELU] R. DeVore, B.J. Lucier, Wavelets, *Acta Numerica*, **1**, 1–56, (1991).

[DEV] R. DeVore, Nonlinear Approximation, *Acta Numerica*, **7**, 51–150, (1998).

[ER] S. Ehrich, A. Rathsfeld, Piecewise linear wavelet collocation on triangular grids, Approximation of the boundary manifold and quadrature, *WIAS Preprint*, Nr. 434, Berlin, (1998).

[GS] G. Gatica, G. Hsiao, On the coupled BEM and FEM for a nonlinear exterior Dirichlet problem in $\mathbb{R}^2$, *Numer. Math.*, **61**, 171–214, (1992)

[GG] T. Gerstner, M. Griebel, Numerical Integration using Sparse Grids, *Numer. Algorithms*, **18**, 209–232, (1998).

[GI] K. Giebermann, Multilevel representation of boundary integral operators, *SFB 256 Preprint*, Uni Bonn, Nr. 637, (2000).

[GT] S.A. Goreinov, E.E. Tyrtischnikov, A.Y. Yeremin, Matrix-free iterative solution strategies for large dense linear systems, *Numer. Linear Algebra Appl.*, **4**, 273–294, (1997).

[GR] L. Greengard, V. Rokhlin, A fast algorithm for particle simulation, *J. Comput. Phys.*, **73**, 325–348, (1987).

[GK] M. Griebel, S. Knapek, Optimized tensor-product approximation spaces, *Constructive Approximation*, **16**, 525–540, (2000).

[GO] M. Griebel, P. Oswald, Remarks on the abstract theory of additive and multiplicative Schwarz algorithms, *Numer. Math.*, **70**, 163–180, (1995).

[GOS] M. Griebel, P. Oswald, T. Schiekofer, Sparse grids for boundary integral equations, *Numer. Math.*, **83**, 279–312, (1999).

[HA] W. Hackbusch A sparse matrix arithmetic based on $\mathcal{H}$-matrices, Part I: Introduction to $\mathcal{H}$-matrices, *Computing*, **62**, 89–108, (1999).

[HAK] W. Hackbusch, B. Khoromskij, Towards $\mathcal{H}$-matrix approximation of linear complexity, *MPI Leipzig Preprint*, Nr.15, (2000).

[HAS] W. Hackbusch, B. Khoromskij, S.A. Sauter, On $\mathcal{H}^2$ matrices, in: *Lectures on Applied Mathematics*, Eds. H.-J. Bungartz, R.H.W. Hoppe, C. Zenger, 9–30, Springer-Verlag, Heidelberg (2000).

[HANO] W. Hackbusch, Z.P. Nowak, On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering, *Numer. Math.*, **54**, 463–491, (1989).

[HAN] H.Han, A new class of variational formulation for the coupling of finite and boundary element methods, *J. Comput. Math.*, **8** (3), 223–232, (1990).

[KK] S. Knapek, F. Koster, Integral operators on sparse grids, erscheint in *SIAM J. Numer. Anal.*

[LS] C. Lage, C. Schwab, Advanced boundary element algorithms, *The mathematics of finite elements and applications X, MAFELAP 1999*, J.R. Whiteman (ed.), Proceedings of the 10th conference, Brunel Univ., Uxbridge, Middlesex, GB, June 22–25, 1999. Amsterdam: Elsevier, 283-306 (2000).

[LSB] C. Lage, C. Schwab, Wavelet Galerkin algorithms for boundary integral equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, **20**, 2195–2222, (1999).

[LA] U. Langer, Parallel iterative solution of symmetric coupled FE/BE-equations via domain decomposition, *Contempary Mathematics*, 335–344, (1994).

[PS1] T. von Petersdorff, C. Schwab, Wavelet approximation of first kind integral equations in a polygon, *Numer. Math.*, **74**, 479–516, (1996).

[PS2] T. von Petersdorff, C. Schwab, Fully discretized Multiscale Galerkin BEM, erscheint in *Multiscale Methods: Wavelet Analysis and Applications*, W. Dahmen, A. Kurdila, P. Oswald (eds.), Academic Press.

[PSS] T. von Petersdorff, R. Schneider, C. Schwab, Multiwavelets for second kind integral equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**, 2212–2227, (1997).

[RA1] A. Rathsfeld, A wavelet algorithm for the boundary element solution of the geodetic boundary value problem, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **157**, 267–287, (1998).

[RA2] A. Rathsfeld, A wavelet algorithm for the solution of a singular integral equation over a smooth two-dimensional manifold, *Journal of Integral Equations and Applications*, **10**, 445–501, (1998).

[RO] V. Rokhlin, Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comp. Phys.*, **60**, (1985).

[SAT] S. Sauter, Über die effiziente Verwendung des Galerkin-Verfahrens zur Lösung Fredholmscher Integralgleichungen, *Dissertation*, Christian-Albrecht-Unviersität, Kiel, (1992).

[SAS] S. Sauter, C. Schwab, Quadrature for *hp*-Galerkin BEM in $\mathbf{R}^3$. *Numer. Math.*, **78**, 211–258, (1997).

[SCS] G. Schmidlin, C. Schwab, Wavelet Galerkin BEM on unstructured meshes by aggregation, *SAM Preprint ETH Zürich*, Nr. 15, (2000).

[S] R. Schneider, Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme, Habilitationsschrift, TH Darmstadt, (1995), *Advances in Numerical Mathematics*, Teubner Stuttgart, (1998).

[SWA] C. Schwab, Variable order composite quadrature of singular and nearly singular integrals, *Computing*, **53**, 173–194, (1994).

[SW] W. Sweldens, The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **3**, 186-200, (1996).

[TW] J. Tausch, J. White, Multiscale bases for the sparse representation of boundary integral operators on complex geometry, *Preprint SMNU*, (1999).

[TYR] E.E. Tyrtyshnikov, Mosaic sceleton approximation, *Calcolo*, **33**, 47–57, (1996).

[WES] F. Wessollek, Berechnung elektrostatischer Felder mittels Waveletmethoden *Diplomarbeit*, FB Mathematik, TU Darmstadt, (1997).

[ZAP] S. Zaprianov, Wavelet-Präkonditionierer für schwach- und hypersinguläre Integralgleichungen sowie Kopplungsprobleme, *Dissertation*, Universität Hannover, (1997).

2.4 Ergebnisse

2.4.1 Teilaufgabe Waveletbasen für 3D BEM

Seit Beginn der Arbeit im SFB 393 konzentrierten sich die Anstrengungen im Teilprojekt A7 auf die Entwicklung und Realisierung geeigneter Waveletbasen. Basierend auf den Arbeiten [DPS3, S, DSII] wurden entsprechende Waveletapproximationsverfahren entwickelt. Dabei muss betont werden, dass in der Arbeit [DS1] ein allgemeines Konstruktionsprinzip vorgestellt wurde, das eine Reihe von Freiheiten hinsichtlich der konkreten Realisierung lässt. Wie die numerischen Beispiele belegen, weist das zugehörige Wavelet-Galerkin-Verfahren ein asymptotisch optimales oder fast optimales Verhalten auf. Allerdings kann die generische Konstante, die sich in den asymptotischen Abschätzungen findet, sehr unterschiedlich ausfallen. Auch die Anzahl der Freiheitsgrade, ab der sich das erwartete asymptotische Verhalten konstatieren lässt, differiert sehr mit der Wahl der jeweiligen Waveletbasen obwohl die Multiresolutionsräume unverändert bleiben. Wesentliche Eigenschaften, die auf die Effizienz Einfluss haben, sind die Größe des Trägers der Wavelets und die Kondition der entstehenden Gleichungssysteme. Über die ersten Implementierungen hinaus sind vielfältige Modifikationen, Versuche und Ideen eingeflossen um die Verfahren weiter zu verbessern. Dies erforderte viel Zeit und Aufwand. Die Ergebnisse sind in die beiden Dissertationen von H. Harbrecht und M. Konik eingeflossen, die augenblicklich fertiggestellt werden. Beide Arbeiten sollen Anfang April eingereicht werden.

H. Harbrecht hat die in [DS1] vorgeschlagene Basiskonstruktion realisiert. Ihm gelang es eine direkte Darstellung der Waveletbasen an den Patchrändern und

Ecken zu finden. Aufbauend auf diesem neuen Ergebnis hat er eine Vielzahl biorthogonaler Waveletbasen auf Oberflächen konstruiert und die einzelnen Konstruktionen optimiert um die Lösung von Randintegralgleichungen zu beschleunigen. Die Ansatzfunktionen sind jeweils stückweise konstant oder linear und im letzteren Fall sogar global stetig. Damit gelang ihm erstmals die Realisierung des hypersingulären Operators mit stetigen und stabilen Wavelets auf Oberflächen im $\mathbb{R}^3$, vgl. Tabelle 2.1. Diese Waveletbasen werden in ähnlicher Form auch in der Gruppe von W. Dahmen zur adaptiven Lösung partieller Differentialgleichungen eingesetzt [BDD]. Hinsichtlich der Auswahl und Konstruktion der Basisfunktionen hat H. Harbrecht mehrfach Verbesserungen durchgeführt [HDIS], die eine Beschleunigung von ein bis zwei Grössenordnungen gegenüber den ersten Resultaten brachten. Er hat den Träger der Waveletbasen wesentlich verkleinert und das Konditionsverhalten der entstehenden Matrizen immens verbessert.

Unbekannte		Skalierungsfunktionen $\phi^{(2)}$			Wavelets $\psi^{(2,2)}$		
J	N_J	abs. Fehler	Red.	Zeit (s)	abs. Fehler	Red.	Zeit (s)
1	48	6.1	—	2.1	7.6	—	0.44
2	192	4.2	1.4	9.8	4.2	1.8	12
3	768	1.3	3.6	611	1.2	3.5	213
4	3072	2.0e-1	6.3	6327	1.9e-1	6.2	2795
5	12288	(2.5e-2)	($\leq$8.0)	(101220)	1.4e-2	14	30311
6	49152	(3.1e-3)	($\leq$8.0)	(1619600)	4.9e-4	29	159990

Tabelle 2.1: Absolute Fehler und Rechenzeiten zur Bestimmung der Lösung eines inneren Neumann-Problems bezüglich der linken Modellgeometrie in Abbildung 2.2. Hierbei wurde der hypersingulären Operator mittels global stetigen linearen Ansatzfunktionen diskretisiert. Die Kompressionsraten des Wavelet-Galerkin-Verfahrens sind in Abbildung 2.3 zu finden.

Zusammenfassend darf gesagt werden, dass die in den Arbeiten des Antragstellers [DPS3, S, DS1] schon früher entwickelten Waveletverfahren das erwartete Verhalten zeigen. Ab ca. 1000 Gleichungen sind sie den traditionellen Verfahren überlegen. Bei ca. 10^6 Gleichungen liegen die Kompressionsraten zwischen 200 und 1000 und der Rechenzeitgewinn liegt bei einem Faktor von 20 bis 100. Wie ähnliche Experimente in [LS, TW] zeigen, sind die Waveletverfahren bei solchen Beispielsgeometrien den anderen schnellen Verfahren zumindest ebenbürtig. Für diese Modellbeispiele sind im Durchschnitt etwa 100 Einträge pro Zeile (bzw. Spalte) ausreichend um die erforderliche Genauigkeit zu erzielen, siehe Abbildung 2.3. Konkret wird die Genauigkeit des vollen Galerkin-Verfahrens nicht verletzt und in der Tat ist die Lösung des komprimierten Systems mitunter sogar etwas genauer. Im Rahmen dieses Konzeptes ist die Parallelisierung recht einfach [KDIS]. Hinsichtlich der Komplexität der Geometrie sind der Methode Grenzen gesetzt, da die Basen auf stückweise parametrisch definierten Oberflächendarstellungen beruhen. Für die künstlich definierten Interfaces, die man zur Kopplung von Finiten Elementen mit Randelementen benutzt, sind die entwickelten Basen allerdings hervorragend geeignet [PS, HPPS1, HPPS2].

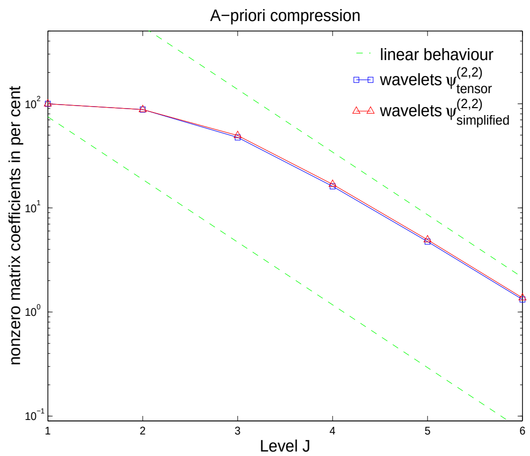


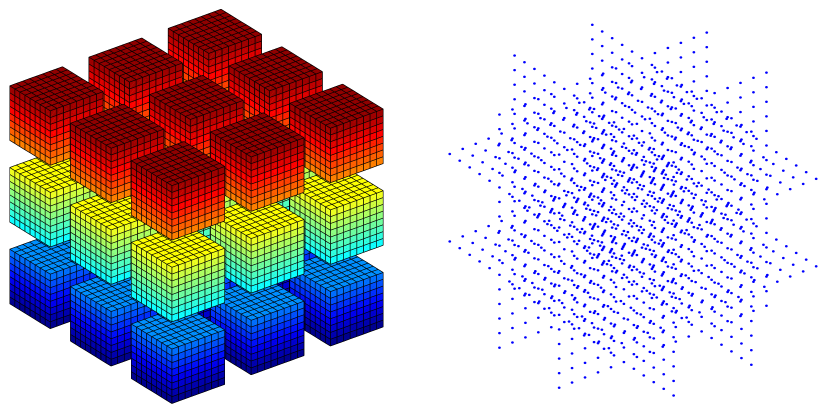
Abbildung 2.3: Kompressionsraten der a-priori und a-posteriori Kompression bezüglich des hypersingulären Operators definiert auf der linken Modellgeometrie in Abbildung 2.2.

2.4.2 Teilaufgabe Volldiskrete Wavelet-Galerkin-Verfahren

Die direkte Berechnung der komprimierten Matrix basiert auf geeigneten Methoden zur numerischen Integration, da die auftretenden Integrale nicht analytisch berechenbar sind. Die Thematik volldiskreter Wavelet-Galerkin-Verfahren wurde zuerst im DFG-Einzelprojekt *Numerische Quadraturverfahren für Wavelet und Multiskalenmethoden zur effizienten Behandlung von Randintegralgleichungen* (SCHN 530/2-2) von M. Konik und H. Harbrecht bearbeitet. Durch diese Vorarbeiten waren erste Realisierungen zu Beginn des Antragszeitraumes bereits implementiert. Im Berichtszeitraum wurden diese Ansätze wesentlich verbessert. Dabei stellt das Aufstellen der Matrix immer noch den Bottleneck der gesamten Berechnung dar. Dieser Entwicklung lag das Manuskript [DSII] zugrunde, wobei mittlerweile viele Einzelergebnisse und Verbesserungen hinzugekommen sind, die in die Dissertationen von M. Konik und H. Harbrecht einfliessen werden [KDIS, HDIS]. Hier sind zu erwähnen:

1. Basisbasierte Quadraturformeln und Quasiinterpolation [BDK1, BDK2, DSX].
2. Sigmoidale Transformationen um periodische Integranden zu erzeugen [KDIS],
3. Smolyak oder Blended Quadraturformeln [GG, KDIS, RHA, KRS],
4. geschicktes Wiederverwenden (*Recyclen*) berechneter Integrale [HDIS],
5. Ausnutzen spezieller Eigenschaften der Integraloperatoren des Doppelschichtpotentials [HDIS], vgl. Abbildung 2.4,
6. Beschränkung der Glattheitvoraussetzungen [RHA, RS, KDIS, KRS].

Von M. Konik und H. Harbrecht wurden die Abschätzungen in [S, DSII] bezüglich der Quadratur eingehender untersucht und verschärft. Dadurch konnte der Quadraturgrad gesenkt und viele Ausdrücke und Integrale zur Berechnung

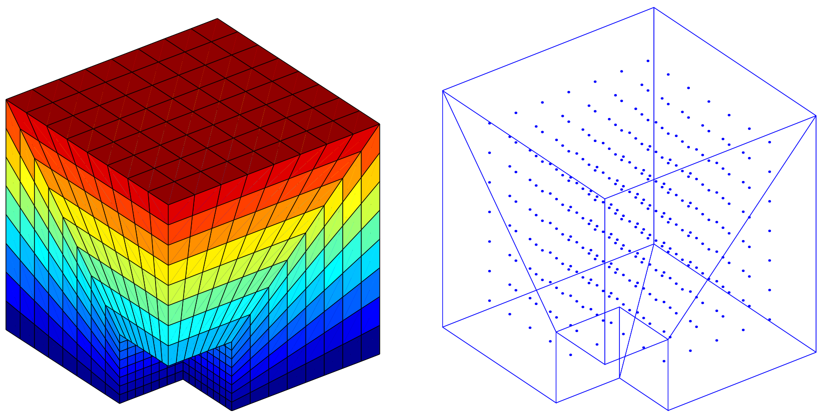


Unbekannte		Skalierungsfunktionen $\phi^{(1)}$			Wavelets $\psi^{(1,3)}$			
J	N_J	abs. Fehler	Red.	Zeit (s)	abs. Fehler	Red.	Zeit (s)	nnz (%)
1	648	4.8e-1	—	4.7	1.3	—	3.1	19.7
2	2592	5.5e-2	8.7	84	8.2e-2	16	22	4.63
3	10368	(1.4e-2)	(4.0)	(1338)	1.5e-2	5.6	178	1.39
4	41472	(3.4e-3)	(4.0)	(21414)	3.4e-3	4.3	795	0.32
5	165888	(8.6e-4)	(4.0)	(342630)	8.1e-4	4.2	5290	0.07

Abbildung 2.4: Numerische Ergebnisse zur Berechnung der Lösung eines äußeren Neumann-Problems bezüglich obigen Gebiets mittels stw. konstanten Funktionen und adjungiertem Doppelschichtoperator. Das Potential ist in den gezeigten Punkten in den Zwischenräumen der Würfel ausgewertet worden.

verschiedener Matrixelemente wiederverwendet werden. Ein solches Vorgehen ist algorithmisch nicht einfach zu realisieren und verlangt eine sorgfältige Implementierung, ist aber sehr wirksam [HDIS]. Insgesamt wurden im Laufe der Entwicklung die Rechenzeiten zum Aufstellen der Matrix um Größenordnungen verbessert. Das Aufstellen der komprimierten Matrix in der Standardform ist zeitlich immer noch der aufwendigste Teil. Es dauert deutlich länger als das eigentliche Lösen des Gleichungssystems. Im Vergleich zur Kompressionsrate ist der zeitliche Beschleunigungsfaktor um eine Größenordnung schlechter, wobei Cache-Effekte eine vielleicht nicht ganz unerhebliche Rolle spielen, vgl. Abbildung 2.5. Während die Parallelisierung des klassichen Verfahrens einfach ist und im wesentlichen optimal mit der Anzahl der Prozessoren skaliert, ist die Parallelisierung des Aufstellens der komprimierten Matrix nicht immer ganz optimal. Dennoch verbessert sich die Situation durch die Parallelisierung.

Zu ergänzen bleibt die Arbeit [DSX], obwohl sie eine vollkommen andere Problematik behandelt, nämlich die effiziente Auswertung von nichtlinearen Funktionen von Waveletentwicklungen. Hierin ist das wesentliche Herzstück ein numerisches Integrationsverfahren basierend auf der Quasiinterpolation. Man kann die vorgeschlagene effiziente algorithmische Auswertung als eine Art nichtuniforme Quadratur auffassen. Solche Quadraturen eignen sich auch zur numerischen Integration der singulären Kerne in der Nähe der Singularität. Zur Zeit liegt in der Arbeitsgruppe noch keine Realisierung eines solchen Verfahrens vor, jedoch werden diese Ansätze in Zusammenhang mit adaptiven Verfahren zur Zeit in der Arbeitsgruppe von W. Dahmen realisiert und weiterentwickelt.



Unbekannte		Skalierungsfunktionen $\phi^{(1)}$			Wavelets $\psi^{(1,3)}$			
J	N_J	abs.Fehler	Red.	Zeit (s)	abs.Fehler	Red.	Zeit (s)	nnz (%)
1	48	8.1e-1	—	0.13	1.0	—	0.11	99.48
2	192	1.2e-1	6.8	0.72	1.2e-1	8.6	2.0	55.27
3	768	5.7e-2	2.1	42	5.8e-2	2.1	37	30.21
4	3072	9.7e-3	5.9	477	9.5e-3	6.1	418	11.04
5	12288	(1.2e-3)	($\leq$ 8.0)	(7640)	1.5e-3	6.2	2239	3.37
6	49152	(1.5e-4)	($\leq$ 8.0)	(122240)	3.0e-4	5.2	16876	0.92

Abbildung 2.5: Numerische Ergebnisse zur Berechnung der Lösung eines inneren Dirichlet-Problems bezüglich der Fichera-Ecke mittels stw. konstanten Funktionen und Einfachschichtoperator. Das Potential ist in den gezeigten Punkten ausgewertet worden.

Wesentliche Fortschritte wurden durch Zusammenarbeit mit A. Rathsfeld hinsichtlich der Berechnung der Matrixkoeffizienten erzielt. Setzten die bisherigen Untersuchungen immer voraus, dass die Oberfläche stückweise analytisch ist und dadurch der Quadraturgrad beliebig hoch gesteigert werden kann, kommt man nun mit einer fixen Quadraturordnung und einer endlichen Glattheit aus. In der Arbeit [RS] wurde ein Verfahren für das Kollokationsverfahren entwickelt und untersucht, wobei sich hier die Situation infolge des Fehlens der doppelten Integration wesentlich einfacher gestaltet. Die grundlegende Idee, die zur *2. Kompression* in [S] führte, bildete dabei den Ausgangspunkt dieser Entwicklung. Die Behandlung des Galerkin-Verfahrens [RHA, KRS] erforderte deutlich mehr Anstrengungen. Zum einem wurde die Idee der Blended Integration zwingend. Vorher musste aber eine Variablentransformation durchgeführt werden und in eine Variablenrichtung benötigt man ein graduiertes Gitter.

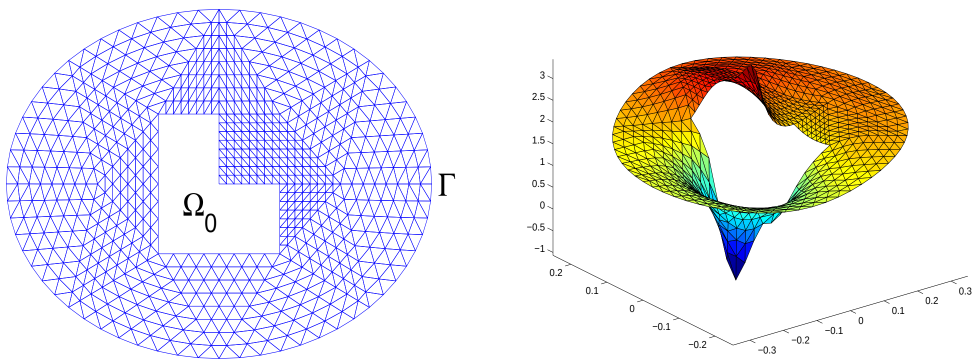
2.4.3 Teilaufgabe Kopplung FEM-BEM

Durch den Gastaufenthalt von C. Pérez wurde die Kopplung von FEM und BEM, die im nächsten Antrag als weitere Persepktive und zukünftiges Projekt behandelt werden sollte, vorgezogen. Ausgangspunkt waren ein Gastaufenthalt des Antragstellers an der Universidad de Concepcion (Chile) und ein dreimonatiges DAAD-Kurzzeitstipendium für einen Aufenthalt von C. Pérez in Chemnitz. Es folgten ein wechselseitiger Aufenthalt von H. Harbrecht in Concepcion und C. Pérez in Chemnitz. Bei dieser Teilaufgabe ging es vornehmlich darum, das entwickelte Kompressionskonzept auf ein System von Integralgleichungen anzuwenden und dies mit Finite Elementen zu koppeln. Dabei zeigte sich, dass sich die Argumentation aus [S] nicht direkt übertragen ließ, sondern an einigen Stellen geschickte Modifaktionen notwendig waren [PS, HPPS1]. Die Ergebnisse dieser Arbeiten beinhalten auch die Theorie der Matrixkompression für Randintegralgleichungen zu gemischten Randwertproblemen, da nun die einzelnen Bestandteile des Calderón Projektors in den korrekten Räumen untersucht wurden. Eine weitere Problematik bestand darin, dass die Finite-Elemente-Diskretisierung in der traditionellen Basis erfolgte, während die Integralgleichungen in einer Waveletbasis diskretisiert werden sollten. Von allen Verfahren zur iterativen Lösung erwies sich das Bramble-Pasciak-CG, das auch von der Gruppe um U. Langer (Linz) [CKL, LA] verwendet wird, als besonders effizient. Praktisch vorteilhaft war es die Nebenbedingung an die Neumann-Daten explizit zu formulieren, wodurch die theoretische Behandlung eines multiskalenbasierten Vorkonditionierers erschwert wurde. Die technischen Details finden sich in der Arbeit [HPPS2].

Während seines Aufenthaltes in Chile hatte der Antragsteller begonnen Least-Squares-Verfahren unter dem Aspekt der Waveletbasen und Normäquivalenzen zu studieren. Daraus entstand die gemeinsame Arbeit [DKS] sowie [GS].

2.4.4 Teilaufgabe Spezielle Randintegralgleichungen und weitere Probleme

Es ist bekannt, dass sich Randintegraloperatoren zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung wie elliptische Operatoren in anisotropen Sobolevräumen verhalten. Für C. Bourgeois war dies Ausgangspunkt zum Einsatz von Wavelets für die effiziente Behandlung dieser Gleichung. Da die Zeit als weitere Variable hinzukommt, verschärft sich die Problematik der Komplexität, und damit die Frage nach einem schnellen Lösen dieser Gleichungen. Das Problem konnte auf eine verblüffend einfache Art und Weise gelöst werden; man berücksichtigt, dass die Orts- und Zeitvariablen unterschiedlich skalieren. Durch diese Modifikation kann die Kompressionsstrategie und ihre Analysis auf den zeitabhängigen Fall übertragen werden. Allerdings ist in der Zeitvariable eine homogene Anfangsbedingung gegeben, weshalb man Wavelets benötigt, die dieser Bedingung genügen. Die von dem Antragsteller gemeinsam mit W. Dahmen entwickelten biorthogonalen Wavelets mit komplementären Randbedingungen erfüllen gerade diese Anforderungen [DS2]. Gemeinsam mit C. Bourgeois wurde erstmalig die der Wärmeleitungsgleichung entsprechende Gleichung erster Art betrachtet [BS]. Eine Implementierung die-



N_J^Ω	N_J^Γ	$\|u-u_\psi\|_{L^2(\Omega)}$	$\|\lambda-\lambda_\psi\|_{L^2(\Gamma)}$	Kompr. **K**	Kompr. **V**
188	32	9.3063e-03	5.9980e-02	100	95
696	64	3.7929e-03	1.6402e-02	86	68
2672	128	7.7040e-04	4.6409e-03	59	44
10464	256	1.3317e-04	1.3907e-03	37	27
41408	512	3.9051e-05	4.2303e-04	22	16
164736	1024	8.6512e-06	1.4341e-04	13	8.9
657152	2048	2.0487e-06	7.5080e-05	7.1	5.0

Tabelle 2.2: Kopplung von FEM und BEM mit dem Koppelrand Γ zur Behandlung eines äußeren Randwertproblems bzgl. des Gebietes Ω_0 (oben links) mit der exakten Lösung u (oben rechts). In der Tabelle sind sowohl die Kompressionsraten (in %) für die Matrix des Doppelschichtoperators **K** und die des Einfachschichtoperators **V** als auch die L^2-Fehler der numerischen Approximation zur Lösung im Gebiet (u) und auf dem Rand ($\lambda := \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}$) angegeben.

ser Methoden wurde begonnen. Bei der Behandlung der Wärmeleitungsgleichung sind zur Berechnung vieler Matrixeinträge die zugehörigen Integranden glatt. Die Realisierung und Programmierung wurde von C. Bourgeois und M. Konik aufbauend auf den Arbeiten [KDIS, BS] begonnen, ist aber noch nicht abgeschlossen.

C. Bourgeois arbeitete zuerst als Post-Doktorand gefördert vom TMR Netzwerk *Wavelets in Numerical Simulation*. In dieser Zeit wurde begonnen, die *Dual Reprocity Methode* zu analysieren. Diese Methode wird von Ingenieuren benutzt um nichtlineare Differentialgleichungen mit Integralgleichungsmethoden zu behandeln. Diese Fragestellungen gehen über den Rahmen des Teilprojektes TP A7 hinaus und sind noch nicht abgeschlossen. Ähnliches gilt für die Zusammenarbeit mit H.-J. Flad (MIS Leipzig) zur *Elektronenstrukturberechnung*. Dabei ist ein direkter Zusammenhang mit dem hiesigen Projekt durch den Einsatz von Wavelets zur effizienten Darstellung nichtlokaler Operatoren gegeben.

Integralgleichungen erster Art sind im Grunde *schlecht gestellte Probleme*. Im Bereich der Randelementmethoden ist dieser Aspekt zumeist nicht von Bedeutung. In Fällen aber, in denen die rechte Seite durch ein Rauschen gestört ist, muss man dieser Problematik Rechnung tragen. In einer aktuellen Arbeit mit S. Pereverzev

[PES] wurden schlecht gestellte Probleme betrachtet bei denen man die Glattheit der exakten Lösung nicht kennt. Durch eine Multilevelstrategie wird eine Sequenz von Diskretisierungen betrachtet, aus der dann diejenige Lösung ausgewählt wird, die sich genausogut wie die optimale Lösung mit bekannter Glattheit verhält. Hierbei gehen entscheidend die bekannten Normäquivalenzen der Waveletbasen ein. Es wäre außerordentlich lohnenswert die Konzepte der Rauschunterdrückung mittels Wavelets, wie sie in der Signalverabeitung erfolgreich angewandt werden, auf die Situation schlecht gestellter Operatorgleichungen zu übertragen, denn es gibt eine Vielzahl von Zusammenhängen zwischen Approximation und Regularisierung.

Es folgt die Sammlung neuentstandener Publikationen.

Neuentstandene Literatur

Referierte Literatur

[BDK1] A. Barinka, T. Barsch, S. Dahlke, M. Konik, Some Remarks on Quadrature Formuals for Refinable Functions and Wavelets, *SFB 393 Preprint 00-15*, TU Chemnitz (2000), erscheint in *ZAMM*.

[BDK2] A. Barinka, T. Barsch, S. Dahlke, M. Konik, M. Mommer, Quadrature Formulas for Refinable Functions and Wavelets II: Error Analysis, *SFB 393 Preprint 00-15*, TU Chemnitz (2000), erscheint in *Journal of Computational Analysis and Applications*.

[DS1] W. Dahmen, R. Schneider, Composite wavelet bases for operator equations, *Math. Comp.*, **68**, 1533–1567, (1999).

[DS2] W. Dahmen, R. Schneider, Wavelets with complementary boundary conditions, Function spaces on the cube, *Result. Math.*, **34**, 255–293, (1998).

[DSI] W. Dahmen, R. Schneider, Wavelets on manifolds I. Construction and domain decomposition, *SIAM J. Math. Anal.*, **31**, 184–230, (1999).

[DSX] W. Dahmen, R. Schneider, Y. Xu, Nonlinear functionals of wavelet expansions – Adaptive reconstruction and fast evaluation, *Numer. Math.*, **86**, 40–101, (2000).

[HS] H. Harbrecht, R. Schneider, Wavelet Galerkin Schemes for 2D BEM, *Operator Theory Advances and Applications*, **121**, 221–260, (2001).

[HPPS1] H. Harbrecht, F. Paiva, C. Pérez, R. Schneider, Biorthogonal wavelet approximation for the coupling of FEM-BEM, *Preprint SFB393/99-32*, (1999), erscheint in *Numer. Math.*

[LSS] P.L. Levin, R. Schneider, M. Spasojevic, Creation of sparse boundary element matrices for 2-D and axi-symmetric electrostatic problems using the bi-orthogonal wavelets, *IEEE Transaction on Dielectrics and Electric Insulation*, **5**, 469–486, (1998).

[PDIS] C. Pérez, Métodos de Ondelettes para Ecuaciones Integrales de Frontera, *Dissertation*, Universidad de Concepcion/Chile, (2000).

[RHA] A. Rathsfeld, Über Waveletalgorithmen für die Randelementmethode, *Habilitationsschrift*, TU Chemnitz, (2000).

[S] R. Schneider, Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme, Habilitationsschrift, TH Darmstadt, (1995), *Advances in Numerical Mathematics*, Teubner Stuttgart, (1998).

Sonstige Literatur

[BS] C. Bourgeois, R. Schneider, Biorthogonal wavelets for the direct integral formulation of the heat equation, *Preprint SFB393/00-14*, TU Chemnitz (2000).

[DKS] W. Dahmen, A. Kunoth, R. Schneider, Wavelet least squares methods for boundary value problems, *IGPM Bericht Nr. 175*, RWTH Aachen, (1999), eingereicht bei *SIAM J. Num. Math.*

[HPPS2] H. Harbrecht, F. Paiva, C. Pérez, R. Schneider, Multiscale preconditioning for the coupling of FEM-BEM, *Preprint SFB393/00-07*, (2000), eingereicht bei *Numerical Linear Algebra with Applications*.

[KS] M. Konik, R. Schneider, Object-oriented implementation of multiscale methods for boundary integral equations, *SFB-Preprint 98-14*, TU Chemnitz, (1998).

[PS] C. Pérez, R. Schneider, Wavelet Galerkin methods for boundary integral equations and the coupling with FEM, *Preprint SFB393/99-33*, (1999).

[RS] A. Rathsfeld, R. Schneider, On a quadrature algorithm for the piecewise linear collocation applied to boundary integral equations, *Preprint SFB393/00-15*, TU Chemnitz, (2000).

In Vorbereitung befindliche Literatur

[DSII] W. Dahmen, H. Harbrecht, M. Konik, R. Schneider, Wavelets on manifolds II: Application to Boundary Element Methods and pseudodifferential equations, (Manuskript).

[HDIS] H. Harbrecht, Wavelet Galerkin Schemes for 3D BEM, *Dissertation*, TU Chemnitz, (2001).

[KDIS] M. Konik, A fully discrete wavelet Galerkin boundary element method in three dimensions, *Dissertation*, TU Chemnitz, (2001).

[KRS] M. Konik, A. Rathsfeld, R. Schneider, A Quadrature Algorithm for Wavelet Galerkin Methods, (Manuskript).

[PES] S. Pereverzev, R. Schneider, An adaptive regularization by projection for noisy pseudodifferential operators of negative order, (Manuskript).

2.5 Offene Fragen/Ausblick

Die vorgeschlagenen Waveletbasen und die Matrixkompressionsmethoden haben die theoretischen Erwartungen erfüllt. Es ist hiermit gezeigt, dass diese Verfahren überaus effizient sind und bei ca. 50.000 Gleichungen eine Verbesserung um 1-2 Größenordnungen gegeüber den traditionellen Verfahren zeigen und in diesem Bereich schon (fast) linear skalieren, dies sogar im wesentlichen unabhängig von der Geometrie. Ein solches Verhalten ist zu erwarten, falls mit N Unbekannten zur Diskretisierung die Oberfläche mit höchstens etwa $\sqrt{N}$ verschiedenen Patches dargestellt werden kann. In diesem Rahmen eignen sich die entwickelten Methoden auf alle Fälle zu einer hochgenauen Diskretisierung von Randintegralgleichungen. Die hiermit behandelbaren Geometrien sind noch nicht extrem kompliziert.

In der Ingenieur-Praxis kann man oftmals solche Geometrien mit traditionellen Verfahren in Verbindung mit relativ wenig Unbekannten aufgrund geringer Genauigkeitsanforderungen zufriedenstellend rechnen. Die zwingende Notwendigkeit schnelle Verfahren einzusetzen wird zwingend, wenn die Geometrien äußerst kompliziert werden oder im Falle der Helmholtz-Gleichung in hohen Frequenzbereichen die Diskretisierung eine sehr große Zahl von Freiheitsgraden benötigt. Dies sind die Bereiche in denen augenblicklich noch ein großer Handlungsbedarf herrscht.

Dies sind Anwendungsbereiche in denen augenblicklich ein großer Forschungsbedarf herrscht. Beide Situationen liegen außerhalb der Möglichkeiten von den hier angegeben Methoden. Zwar stimmen asymptotisch die Aussagen, aber im Grenzbereich, den man überhaupt erst einmal rechnen möchte, ist diese Asymptotik noch nicht wirksam. Hierbei liegen Die Gitterweiten in der Größenordnung der Gebietsparameter oder der Wellenlänge.