

2.1 Teilprojekt A4

Parallele Algorithmen für große Gleichungssysteme, basierend auf algebraischen Zerlegungsmethoden

2.1.1 Antragsteller

Prof. Dr. Volker Mehrmann
Fachbereich 3 / Mathematik
Sektretariat MA 4-5
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136
D-10623 Berlin

Tel. (030) 314-25736 (21264)
FAX (030) 314-79706
email: mehrmann@math.tu-berlin.de

2.1.2 Projektbearbeiter

Projektbearbeiter (Ergänzungsausstattung):
Dipl.-Math. U. Elsner (Lehrstuhl Numerische Algebra)
Dipl.-Ing. P.N. Prochkov (Lehrstuhl Numerische Algebra)

Mitarbeiter (Grundausrüstung):
Dr. M. Bollhöfer (Lehrstuhl Numerische Algebra)
Dr. U. Schrader (Lehrstuhl Numerische Algebra)

2.2 Zwischenbericht

Ein ausführlicher Bericht wird bis zum 30.09.2001 vorgelegt. Es folgt ein Zwischenbericht.

Ziel des Projekts war die Entwicklung neuer numerischer Methoden zur Lösung von großen, dünn besetzten, unsymmetrischen Gleichungssystemen. Dabei sollten insbesondere allgemeine Prädiktionierungs- und Konvergenzbeschleunigungstechniken entwickelt werden, die selbststeuernd adaptiv arbeiten. Im Gegensatz zu den üblichen Ansätzen für diskretisierte partielle Differentialgleichungen sollten alle Methoden und Ansätze zur Parallelisierung auf rein algebraischen und graphentheoretischen Grundlagen entstehen. Grundlage dafür ist das nested-divide-and-conquer Verfahren (NDC), welches in [3, 5] entwickelt wurde. Weiter sollten diese neuen Methoden auf Parallelrechnern implementiert werden und der Zusammenhang dieser neuen Methoden zu algebraischen Mehrgittermethoden und Gebietszerlegungsmethoden untersucht werden. Weiterhin sollten Graphenzerlegungsmethoden zur statischen und dynamischen Lastverteilung bei der Speicherung und

Lösung von allgemeinen linearen Gleichungssystemen entwickelt werden. Insbesondere dabei die parallele Lösung dieser Zerlegungsmethoden mittels Multilevelmethoden.

Weiterhin wurde bei der Begutachtung angeregt die Behandlung von grossen Eigenwertproblemen (eigentlich Teilprojekt A10) im Rahmen von A4 durchzuführen. Die gesteckten Ziele des Projekts sind im wesentlichen erreicht bzw. stehen kurz vor der Fertigstellung.

Es wurde ein neuer Zugang zu algebraischen Mehrgittermethoden entwickelt bei dem der Vergrößerungsprozess auf sparsen approximativen Inversen basiert. Diese Methode wurde implementiert und an Hand von zahlreichen Testbeispielen getestet [6, 7].

Es wurden weiterhin neue Präkonditionierer basierend auf stabilisierend faktorisierten approximativen Inversen entwickelt, [8, 9], sowie eine robuste ILU-Zerlegung auf der Basis der Kontrolle der Wachstumsfaktoren [4]. Kern dieser Untersuchungen stellten dabei die Beziehungen und Äquivalenzen zwischen unvollständigen Dreieckszerlegungen und faktorisierten schwach besetzten approximativen Inversen dar [8]. Aus diesen Beziehungen konnte zum einen durch Übertragung von Pivottisierungstechniken eine stabilisierte faktorisierte approximative Inverse entwickelt werden [9]. Zum anderen konnten die theoretischen Beziehungen aus [8] auch in die andere Richtung genutzt werden. D.h. aus der Beobachtung, dass bei vielen Problemen approximative Inverse weniger empfindlich auf die Wahl der Parameter reagieren als unvollständige Dreieckszerlegungen [9], konnte eine neue unvollständige Dreieckszerlegung konstruiert werden, bei welcher das Wachstum der Dreiecksfaktoren direkt mit dem Weglassen betragsmäßig kleiner Einträge gekoppelt ist. Der hieraus resultierende Vorkonditionierer hat sich in numerischen Tests als extrem robust erwiesen [4].

Für die Lastbalancierungsmethoden sind parallele dynamische Multilevelmethoden entwickelt worden. Die Dissertation [10] steht kurz vor dem Abschluss.

Ebenfalls im Rahmen des Projekts wurde die Dissertation von Herrn Schrader abgeschlossen [17] bei der monotonieerhaltende Diskretisierungsmethoden und deren numerische Umsetzung untersucht wurden.

Im Rahmen der Behandlung von Eigenwertproblemen sind verschiedene Untersuchungen durchgeführt worden und auch zahlreiche Fortschritte gemacht worden.

So wurde ein intensiver Vergleich verschiedener Techniken, wie sie in den Teilprojekten C1, C2, C6 genutzt werden gemacht der zeigt, dass moderne Eigenwertverfahren im Moment keine echt Alternative zum klassischen unsymmetrischen Lanczos-Verfahren darstellen [11].

Weiterhin wurde ein Eigenwertproblem, welches bei der Behandlung von Elastizitätsproblemen für anisotrope Materialien auftritt untersucht und strukturerhaltende schnelle implizit-gestartete Arnoldi-Methoden entwickelt, [16]. Im Rahmen dieser Methoden werden schnelle Faktorisierung für schiefssymmetrische Matrizen benötigt. Dafür wurde eine neue Faktorisierung entwickelt und analysiert [2].

Weiterhin wurden inverse Eigenwertprobleme studiert und neue Ergebnisse zur Lösung des rekursiven inversen Eigenwertproblems erarbeitet [1] und kanonische Formen für mehrfach strukturierte Eigenwertprobleme entwickelt [14].

Ferner wurden normale Matrizen in indefiniten Produkten näher untersucht, um dadurch eine verallgemeinerte Theorie verschiedener strukturierter Eigenwertprobleme zu erhalten [12], [13], [15].

Einige weitere Untersuchungen zu Eigenwertproblemen und Gleichungssystemen stehen kurz vor dem Abschluss.

Zusammenarbeit mit A3, C1.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Arav, D. Hershkowitz, V. Mehrmann und H. Schneider, ‘The Recursive Inverse Eigenvalue Problem’, *Preprint SFB393/99-09, Sonderforschungsbereich 393, ‘Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern’*, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz, *SIAM Journal Matrix Analysis and Applications*, 22:392–412, 2000.
- [2] P. Benner, R. Byers, H. Faßbender, V. Mehrmann und D. Watkins, ‘Cholesky-like factorizations of skew-symmetric matrices’, *Preprint SFB393/00-35, Sonderforschungsbereich 393, ‘Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern’*, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz,) *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 11:85–93, 2000.
- [3] M. Bollhöfer. *Algebraic Domain Decomposition*. PhD thesis, TU Chemnitz, Fak. f. Mathematik, March 1998.
- [4] M. Bollhöfer. A robust ILU based on monitoring the growth of the inverse factors. Preprint SFB393/00–31, TU Chemnitz, Fak. f. Mathematik, July 2000. Submitted to Lin. Alg. App.
- [5] M. Bollhöfer and V. Mehrmann. Nested divide & conquer methods for the solution of large sparse linear systems. Preprint SFB393/98_05, TU Chemnitz, Fak. f. Mathematik, 1998.
- [6] M. Bollhöfer and V. Mehrmann. A new approach to algebraic multilevel methods based on sparse approximate inverses. Preprint SFB393/99–22, TU Chemnitz, Fak. f. Mathematik, August 1999.
- [7] M. Bollhöfer and V. Mehrmann. Algebraic multilevel methods and sparse approximate inverses. Preprint, TU Chemnitz, Fak. f. Mathematik, Oct. 1999. Submitted SIAM Matrix. Anal. App.
- [8] M. Bollhöfer and Y. Saad. *ILUs* and factorized approximate inverses are strongly related. Part I: Overview of results. Technical Report umsi–2000-39, Minnesota Supercomputer Institute, University of Minnesota, 2000. Submitted to SIAM Matrix. Anal. App.
- [9] M. Bollhöfer and Y. Saad. *ILUs* and factorized approximate inverses are strongly related. Part II: Applications to stabilization. Technical Report umsi–2000-70, University of Minnesota at Minneapolis, Dep. of Computer Science and Engineering, 2000. Submitted to SIAM Matrix. Anal. App.
- [10] U. Elsner,
Dissertation, Fak. f. Mathematik, TU Chemnitz, in Vorbereitung.

- [11] U. Elsner, V. Mehrmann, F. Milde, R.A. Römer, M. Schreiber, ‘The Anderson Model of Localization: A Challenge for Modern Eigenvalue Methods’, *SIAM Journal Scientific Computing*, 20:2089–2102, 1999.
- [12] B. Lins, P. Meade, C. Mehl, L. Rodman, ‘Normal matrices and polar decompositions in indefinite inner products’, *Preprint SFB393/00-12, Sonderforschungsbereich 393, ‘Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern’*, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz,) erscheint in *Linear und Multilinear Algebra*.
- [13] B. Lins, P. Meade, C. Mehl, L. Rodman, ‘Polar decompositions of indecomposable normal matrices in indefinite inner products: Explicit formulas and open problems’, *Preprint 2000-9, Fakultt fr Mathematik, Technische Universitt Chemnitz, 2000*.
- [14] C. Mehl, V. Mehrmann und H. Xu, ‘Canonical forms for doubly structured matrices and pencils’, *Preprint SFB393/00-27, Sonderforschungsbereich 393, ‘Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern’*, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz,) *Electronic Journal on Linear Algebra*, 7:112–151, 2000.
- [15] C. Mehl, L. Rodman, ‘Classes of normal matrices in indefinite inner products’, erscheint in *Linear Algebra Appl.*
- [16] V. Mehrmann und D. Watkins. ‘Structure-preserving Methods for Computing Eigenpairs of Large Sparse Skew-Hamiltonian/Hamiltonian Pencils’, *Preprint SFB393/00-02, Sonderforschungsbereich 393, ‘Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern’*, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz, erscheint in *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2001.
- [17] U. Schrader, Invers–isotone Diskretisierungsmethoden für invers–isotone lineare und quasilineare Zwei–Punkt–Randwertaufgaben. *Dissertation, Fak. f. Mathematik, TU Chemnitz*, Januar 2001