Technische Universität Chemnitz-Zwickau

DFG-Forschergruppe "SPC" · Fakultät für Mathematik

Gerd Kunert

Ein Residuenfehlerschätzer für anisotrope Tetraedernetze und Dreiecksnetze in der Finite-Elemente-Methode

Adresse des Autors:

Gerd Kunert
TU Chemnitz-Zwickau
Fakultät Mathematik
09107 Chemnitz

Germany

Email: *gerd.kunert@mathematik.tu-chemnitz.de*
Telefon: +49 - 0371 - 531 - 2603

Preprint-Reihe der Chemnitzer DFG-Forschergruppe
"Scientific Parallel Computing"

SPC 95_10 **März 1995**

Zusammenfassung

Some boundary value problems yield anisotropic solutions, e.g. solutions with boundary layers. If such problems are to be solved with the finite element method (FEM), anisotropically refined meshes can be advantageous. In order to construct these meshes or to control the error one aims at reliable error estimators.

For isotropic meshes such estimators are known but they fail when applied to anisotropic meshes. Rectangular (or cuboidal) anisotropic meshes were already investigated. In this paper an error estimator is presented for tetrahedral or triangular meshes which offer a much greater geometrical flexibility.

Gewisse Randwertprobleme besitzen anisotrope Lösungen, z.B. Lösungen mit Randschichten. Wird die Finite Elemente Methode (FEM) zum Lösen verwendet, so bieten sich anisotrop gestreckte Netze an. Zur Konstruktion solcher Netze oder zum Beurteilen der Güte der Näherungslösung sind Fehlerschätzer gewünscht.

Für isotrope Netze werden solche Fehlerschätzer schon länger genutzt, sie liefern bei anisotropen Netzen aber nicht die erhofften Resultate. Anisotrope Rechtecknetze (bzw. kubische Netze) wurden bereits untersucht. (Anisotrope) Tetraeder- oder Dreiecksgitter besitzen aber eine viel größere geometrische Flexibilität. In dieser Arbeit wird ein Fehlerschätzer dafür vorgestellt.

Keywords: finite elements, error estimator, anisotropic solution, stretched elements, tetrahedral mesh, triangular mesh

AMS(MOS): 65N30, 65N15

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In dieser Arbeit betrachten wir die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \Gamma_D = \partial\Omega \qquad . \end{aligned}$$

Wir beschränken uns hier auf polygonal berandete Gebiete Ω des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$. Alle Überlegungen sind für $n = 3$ dargelegt; die erforderlichen Modifikationen für $n = 2$ sind offensichtlich. Es wurde versucht, eine für beide Fälle gültige Notation zu benutzen. Eine Liste der verwendeten Bezeichnungen befindet sich am Ende dieser Einleitung.

Sei $H^1_o(\Omega)$ der übliche Sobolevraum von Funktionen mit homogenen Randbedingungen. Die schwache Formulierung zu obigem Problem ist

$$\text{Finde } u \in H^1_o(\Omega): \qquad (\nabla u, \nabla v) = (f, v) \qquad \forall\, v \in H^1_o(\Omega) \tag{1}$$

bei gegebenem $f \in L_2(\Omega)$.

Um die Finite-Elemente-Methode (FEM) zur Lösung solcher Probleme anzuwenden, wird Ω triangularisiert. V_h sei der Raum der stetigen, stückweise linearen Funktionen über der Triangularisierung $\mathcal{T}$. Sei $V_{o,h} := V_h \cap H^1_o(\Omega)$ der entsprechende Raum mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Eine Näherungslösung u_h erhält man, indem man die Variationsgleichung auf den endlichdimensionalen Unterraum $V_{o,h}$ einschränkt:

$$\text{Finde } u_h \in V_{o,h}: \qquad (\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \qquad \forall\, v_h \in V_{o,h} \qquad . \tag{2}$$

In der klassischen FEM-Theorie wird gefordert, daß das Verhältnis Umkugel- zu Inkugelradius der finiten Elemente T (z.B. Quader, Tetraeder oder Rechtecke) beschränkt ist. Für bestimmte Probleme wurden lokale Residuenfehlerschätzer für ein Tetraeder T hergeleitet (siehe z.B. [6]):

$$\eta_T(u_h) := \left(h_T^2 \cdot \|f\|_T^2 + \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma_D} h_T \cdot \|r_E(u_h)\|_E^2 \right)^{1/2} \qquad .$$

Hier ist h_T der Durchmesser von T und $r_E(u_h)$ der Gradientensprung von u_h über die Fläche E. Dann gilt

$$\|\nabla(u - u_h)\|^2 \le c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2(u_h) \qquad .$$

Die Konstante c ist unabhängig von der Funktion u, einem Tetraeder T und der Triangularisierung $\mathcal{T}$. Das gilt auch für alle weiteren Konstanten c in dieser Arbeit.

Bei speziellen Randwertproblemen treten jedoch anisotrope Lösungen auf, die sich in einer Raumrichtung stark ändern, in einer anderen Richtung aber kaum. Beispiele dafür sind Lösungen mit Randschichten oder inneren Schichten. Dort bieten sich Netze mit finiten Elementen an, deren Seitenverhältnisse sehr groß werden können (oder sogar unbeschränkt bei zunehmender Verfeinerung), s.a. [2]. Diese Eigenschaft führt dazu, daß der obige Fehlerschätzer nicht mehr die gewünschten Ergebnisse liefert. Insbesondere hängt die Konstante c von der Triangularisierung $\mathcal{T}$ ab, s.a. [1].

Um diese Abhängigkeit zu beseitigen, wurden ein Fehlerschätzer für anisotrope kubische Gitter (z.B. Quadergitter) von Siebert [5] hergeleitet. Dieser anisotrope Fehlerschätzer hat die Form

$$\eta_T(u_h) := \left(h_{min,T}^2 \cdot \|f\|_T^2 + \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma_D} h_E \cdot \|r_E(u_h)\|_E^2 \right)^{1/2} \quad .$$

d.h. die Faktoren vor den Normen wurden durch die kleinste Elementseitenlänge $h_{min,T}$ bzw. durch die Höhe h_E über einer Fläche E ersetzt.

Bei realen Problemen sind kubische Gitter zur Diskretisierung eines Gebietes Ω nicht immer geeignet, da ihre geometrische Flexibilität gering ist. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit ein Fehlerschätzer für anisotrope Tetraeder- bzw. Dreiecksgitter untersucht, wobei ein analoges Resultat erzielt wird. Die Beweise sind schwieriger, da Tetraeder im Gegensatz zu Quadern keine drei ausgezeichnete Raumrichtungen besitzen. Die Herleitung lehnt sich an die Arbeiten von Siebert [5], Clément [4] und Verfürth [6] an und besitzt folgende Grobgliederung:

- Definition der Bezeichnungen, der Transformation, der Ableitung $\tilde{D}_i$ und der Räume $H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$ bzw. $H^1_{o,\mathcal{T}}(\Omega)$ der angepaßten Funktionen; Netzvoraussetzungen und grundlegende Beziehungen,
- Definition einer lokalen L_2-Projektion und Angabe entsprechender Abschätzungen,
- Definition eines globalen Interpolationsoperators $R : H^1_{\mathcal{T}}(\Omega) \mapsto V_h$ sowie Beweis entsprechender Abschätzungen; Berücksichtigung der homogenen Randbedingungen liefert den Interpolationsoperator $R_o : H^1_{o,\mathcal{T}}(\Omega) \mapsto V_{o,h}$,
- Definition und Abschätzung des Fehlerschätzers.

Außerdem enthält der Anhang eine Zusammenfassung der wichtigsten Ungleichungen, die zum Nachvollziehen der Beweise sicher nützlich ist.

Es soll hier betont werden, daß in dieser Arbeit nur eine untere Schranke des Fehlerschätzers hergeleitet wird. Weitere wichtige Aspekte müssen noch betrachtet werden:

- Eine obere Schranke des Fehlerschätzers soll abgeleitet werden.
- Numerische Beispiele müssen die Berechtigung dieses anisotropen Fehlerschätzers bestätigen.
- Die Erweiterung auf höherdimensionale Ansatzfunktionen sollte versucht werden.
- Geeignete anisotrope Verfeinerungsstrategien müssen gefunden werden.

Liste der verwendeten Symbole

Einige Bezeichnungen haben im $\mathbb{R}^3$ bzw. im $\mathbb{R}^2$ unterschiedliche Bedeutung (zum Beispiel ist T entweder ein Tetraeder oder ein Dreieck).

Ω	polygonal berandetes Gebiet des $\mathbb{R}^3$ (bzw. des $\mathbb{R}^2$)
$\Gamma_D = \partial\Omega$	Dirichlet-Rand von Ω
L_2, H^1, H^1_o	übliche Sobolevräume über Ω
$H^1_{\mathcal{T}}(\Omega), H^1_{o,\mathcal{T}}(\Omega)$	Räume angepaßter Funktionen
$(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_\omega$	$L_2(\Omega)$-Skalarprodukt bzw. $L_2(\omega)$-Skalarprodukt
$\|\cdot\|$	L_2-Norm über Ω
$\|\cdot\|_\omega$, $\|\cdot\|_E$	L_2-Norm über Gebiet ω bzw. über Fläche E
$\|\cdot\|_2$	Spektralnorm einer Matrix
$\mathcal{T}$	Triangularisierung von Ω
$V_h, V_{o,h}$	FEM-Raum über $\mathcal{T}$ (z.B. lineare Ansatzfunktionen)
$T \in \mathcal{T}$	Tetraeder (oder Dreieck)
$\|T\|$	Volumen (oder Flächeninhalt) meas(T) von T
$\mathbf{p}_i$	spezielle Vektoren von T, $i = 1 \ldots n$ (siehe Definition)
$h_i = h_{i,T}$	Länge $\|\mathbf{p}_i\|$ des Vektors $\mathbf{p}_i$
$h_{min,T}$	$:= \min\{h_{i,T}\}$
$h_i(\mathbf{x})$	globale Funktion, die über T den Wert $h_{i,T}$ annimmt
F_A	affin lineare Abbildung vom Einheitstetraeder $\bar{T}$ auf T
F_C	affin lineare Abbildung vom Referenztetraeder $\hat{T}$ auf T
A_T, C_T	die linearen Transformationsmatrizen der Abbildungen F_A bzw. F_C
$\tilde{D}_i$	(normierte) Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{p}_i$
E	beliebige Fläche von T (bzw. Kante eines Dreiecks T)
$\|E\|$	Flächeninhalt (bzw. Länge) meas(E) von E
h_E	Länge der Höhe über E
$r_E(v_h)$	Gradientensprung einer Funktion $v_h \in V_h$ an der Fläche E
a_j	Knoten der Triangularisierung
M_j	Makroelement, $M_j := \bigcup_{T \ni a_j} T$
$\|M_j\|$	Volumen (oder Flächeninhalt) meas(M_j) von M_j
$P = P_j$	L_2-Projektor über M_j
I	spezieller Integralmittel-Operator
φ_j	lineare Ansatzfunktion zum Knoten a_j, $\varphi_j(a_i) = \delta_i^j$ (Kronecker-Symbol)
N_I, N_T	Menge der inneren Knoten bzw. Menge der Knoten $a_j \in T$

2 Bezeichnungen

Gegeben sei eine Triangularisierung $\mathcal{T}$ und ein beliebiges Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ daraus. Für dieses Tetraeder wird folgende Notation eingeführt.

2.1 Tetraederbezeichnungen

Die Bezeichnung der vier Eckpunkte mit $P_0, \ldots, P_3$ sei eindeutig durch folgende Bedingungen gegeben:

- P_0P_1 sei die längste Seite von T.
- $\triangle P_0P_1P_2$ sei das Dreieck mit größtem Flächeninhalt unter den beiden, die die Seite P_0P_1 enthalten.
- P_0P_2 sei die kürzeste Seite des Dreiecks $\triangle P_0P_1P_2$. Damit wird festgelegt, welcher Eckpunkt P_0 bzw. P_1 ist. P_3 sei der letzte Eckpunkt.

Weiterhin werden drei Vektoren definiert:

- $\mathbf{p}_1 := \overrightarrow{P_0P_1}$.
- $\mathbf{p}_2$ sei der Vektor, der vom Lotfußpunkt von P_2 auf P_0P_1 nach P_2 zeigt.
- $\mathbf{p}_3$ sei der Vektor, der vom Lotfußpunkt von P_3 auf das Dreieck $\triangle P_0P_1P_2$ nach P_3 zeigt.

Abbildung 1 möge diese Notation verdeutlichen.

Die Länge der Vektoren $\mathbf{p}_i$ werde mit $h_i = h_{i,T} := |\mathbf{p}_i|$ bezeichnet, $i = 1, 2, 3$. Aus der Bezeichnung der Eckpunkte P_i folgt sofort $h_1 > h_2 \geq h_3$. Damit wir für den $\mathbb{R}^3$ und den $\mathbb{R}^2$ eine einheitliche Schreibweise nutzen können, setzen wir außerdem

$$h_{min,T} := \min_{i=1\ldots n} \{h_{i,T}\} \qquad .$$

Im $\mathbb{R}^3$ gilt folglich $h_{min,T} = h_{3,T}$. Weiterhin wird für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ die stückweise konstante Funktion $h_i(\mathbf{x})$ definiert gemäß

$$h_i(\mathbf{x}) := h_{i,T} \qquad \text{für } \mathbf{x} \in T\,,\ i = 1 \ldots n.$$

Analog wird $h_{min}(\mathbf{x})$ definiert.

2.2 Transformationsbezeichnungen

Wir werden hauptsächlich mit zwei affin linearen Abbildungen F_A und F_C arbeiten. Zu deren Definition sind einige Vorbereitungen nötig.

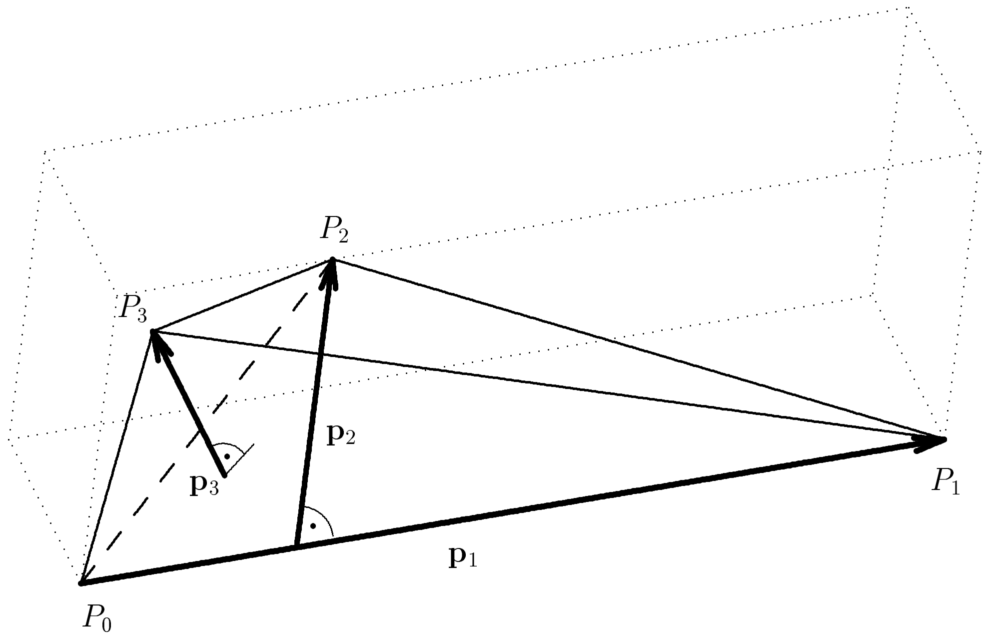


Abbildung 1: Bezeichnungen im Tetraeder T

Sei $\vec{P_0}$ der Spaltenvektor vom Koordinatenursprung nach P_0, seien $\overrightarrow{P_0P_i}$ die Spaltenvektoren von P_0 nach P_i, $i = 1, 2, 3$. Die Matrizen $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ seien definiert durch

$$A = A_T := \left(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} \right) \qquad \text{und} \qquad C = C_T := \left(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\right) \quad . \tag{3}$$

Die affin linearen Abbildungen seien

$$\begin{aligned} &F_A : \bar{T} \mapsto T & &\text{und} & &F_C : \hat{T} \mapsto T \\ &F_A : \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = A_T \cdot \boldsymbol{\lambda} + \vec{P_0} & & & &F_C : \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = C_T \cdot \boldsymbol{\lambda} + \vec{P_0} \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$. Offensichtlich ist $\bar{T}$ das Einheitstetraeder mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)^T$, $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 1)^T$.

Das Referenztetraeder $\hat{T}$ wird implizit durch die Abbildung F_C definiert, d.h. es gilt $\hat{T} = F_C^{-1}(T)$. Wegen der Definition von F_C hat $\hat{T}$ die Eckpunkte $\hat{P}_0 = (0, 0, 0)^T$, $\hat{P}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\hat{P}_2 = (\hat{x}_2, 1, 0)^T$ und $\hat{P}_3 = (\hat{x}_3, \hat{y}_3, 1)^T$. Aufgrund der Bedingungen an die Eckpunkte P_i gilt $0 < \hat{x}_2, \hat{x}_3 < 1$ und $-1 < \hat{y}_3 < 1$. Abbildungen 1 und 2 mögen dies verdeutlichen, wobei die „umschriebenen“ Quader von T und $\hat{T}$ die Visualisierung erleichtern sollen.

Größen, die sich auf das Einheitstetraeder $\bar{T}$ bzw. das Referenztetraeder $\hat{T}$ beziehen, sollen mit einem Balken bzw. einem Dach bezeichnet werden (z.B. $\bar{\nabla}$, $\hat{v}$).

Für die Funktionaldeterminanten der beiden Abbildungen gilt

$$|\det(A_T)| = |\det(C_T)| = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 = 6 \cdot |T| \qquad .$$

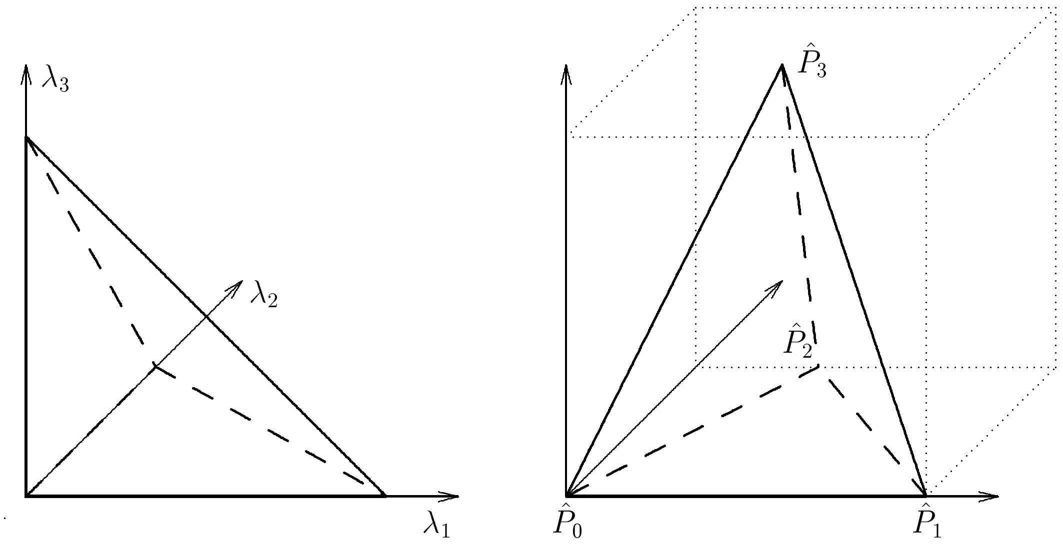


Abbildung 2: Einheitstetraeder $\bar{T}$ und Referenztetraeder $\hat{T}$

Die transformierten Ableitungen erfüllen die Gleichungen

$$\bar{\nabla}\bar{v} = A_T^T \nabla v \qquad \text{und} \qquad \hat{\nabla}\hat{v} = C_T^T \nabla v \qquad .$$

Die Abschätzung der Norm einer Transformationsmatrix wird durch folgendes einfache Lemma (siehe auch Ciarlet [3]) erleichtert.

Lemma 1 (Normabschätzung einer Transformationsmatrix) *Sei A eine lineare Transformation, die das abgeschlossene Gebiet $\hat{G} \subset \mathbb{R}^n$ in G überführt. Dann gilt für die zugehörige Transformationsmatrix*

$$\|A\|_2 \leq d(G)/\varrho(\hat{G})$$

mit $d(G) := \max_{x,y \in G} \|x-y\|$ *und* $\varrho(\hat{G}) :=$ *Radius der größten Kugel* $S \subset \hat{G}$.

Sei $T - \vec{P}_0$ das um $-\vec{P}_0$ verschobene Tetraeder T. Für die Abbildungen A_T, C_T^{-1} bzw. $C_T^{-1}A_T$ gilt nach Definition

$$\begin{array}{ccccc} \bar{T} & \overset{A_T}{\longmapsto} & (T - \vec{P}_0) & \overset{C_T^{-1}}{\longmapsto} & \hat{T}, \\ & \bar{T} & \overset{C_T^{-1}A_T}{\longmapsto} & \hat{T} & \end{array}$$

d.h. die Abbildung $C_T^{-1}A_T$ überführt das Einheitstetraeder $\bar{T}$ in das Referenztetraeder $\hat{T}$. Mit obigem Lemma erhält man jetzt sofort

$$\left\|A_T^T C_T^{-T}\right\|_2 = \left\|C_T^{-1} A_T\right\|_2 \leq c \tag{4}$$

$$\text{und analog} \qquad \left\|C_T^T A_T^{-T}\right\|_2 = \left\|A_T^{-1} C_T\right\|_2 \leq c \qquad . \tag{5}$$

2.3 Die Ableitung $\tilde{D}_i$

Gegeben sei die Matrix $H_T := \operatorname{diag}(h_1, h_2, h_3)$. Für eine Funktion $v \in H^1(T)$ führen wir die Ableitungen $\tilde{D}_{i,T}$ ein durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{D}_{1,T}\, v \\ \tilde{D}_{2,T}\, v \\ \tilde{D}_{3,T}\, v \end{pmatrix} := H_T^{-1} C_T^T \cdot \nabla v \qquad , v \in H^1(T). \tag{6}$$

In Komponentenschreibweise bedeutet das

$$\tilde{D}_{i,T} v = h_i^{-1} \cdot (\mathbf{p}_i, \nabla v) = \frac{1}{|\mathbf{p}_i|} \cdot \frac{\partial v}{\partial \mathbf{p}_i} \qquad i = 1 \dots n$$

d.h. $\tilde{D}_{i,T}$ ist die (normierte) Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{p}_i$. Aus der Orthogonalität der Vektoren $\mathbf{p}_i$ und der Definition $h_i = |\mathbf{p}_i|$ folgt, daß $H_T^{-1} C_T^T$ eine Orthogonalmatrix ist. Deshalb gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (\tilde{D}_{i,T} v)^2 = |\nabla v|^2 \tag{7}$$

$$\text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} h_{i,T}^2 (\tilde{D}_{i,T} v)^2 = |C_T^T \nabla v|^2 \qquad . \tag{8}$$

Die Ableitung $\tilde{D}_{i,T}$ ist zunächst nur für ein Tetraeder T erklärt. Deshalb wird eine globale Ableitung $\tilde{D}_i$ eingeführt, die für fast alle $\mathbf{x} \in \Omega$ definiert ist und in einem Tetraeder T gerade $\tilde{D}_{i,T}$ entspricht:

$$\tilde{D}_i\, v(\mathbf{x}) := \tilde{D}_{i,T}\, v(\mathbf{x}) \qquad \text{für } \mathbf{x} \in T \qquad .$$

Die Ableitung $\tilde{D}_i$ ist also abhängig von der Triangularisierung $\mathcal{T}$ und auf jedem Tetraeder T anders definiert. Für $\tilde{D}_i$ gelten die gleichen Beziehungen (7) und (8).

3 Voraussetzungen an das Netz

Seien $a_1, \dots, a_N$ die Knoten der Triangularisierung $\mathcal{T}$. Zusätzlich zu den üblichen Voraussetzungen an das Netz (vgl. Ciarlet [3], Kap. 2) werden folgende Bedingungen gestellt.

1. Die Anzahl der Tetraeder, die den Knoten a_j enthalten, ist beschränkt.

2. Die Tetraederdimensionen von benachbarten Tetraedern dürfen sich nicht rapide ändern, d.h. es gibt positive Konstanten c_1, c_2 mit

$$c_1 \cdot h_{i,T'} \le h_{i,T} \le c_2 \cdot h_{i,T'} \quad \forall\, T, T' \text{ mit } T \cap T' \neq \emptyset\,,\; i = 1 \dots n \quad .$$

In den folgenden Beweisen wird oft ein sogenanntes Makroelement M_j zu einem Knoten a_j benutzt. Dieses ist definiert als

$$M_j := \bigcup_{T \ni a_j} T \qquad .$$

Sei $T' \subset M_j$ ein fixiertes Tetraeder. Dann definieren wir für dieses Makroelement die Größen

$$h_{i,M_j} := h_{i,T'} \qquad i = 1 \ldots n.$$

Mit obiger Voraussetzung 2 gilt dann

$$c \cdot h_{i,T} \le h_{i,M_j} \le C \cdot h_{i,T} \qquad \forall\, T \subset M_j\, ,\; i = 1 \ldots n \qquad .$$

Falls in einer Ungleichung also die Terme h_{i,M_j} oder $h_{i,T}$ auftreten, so können sie wechselseitig ausgetauscht werden, ohne daß die entsprechenden Konstanten der Ungleichung dadurch von T oder $\mathcal{T}$ abhängen.

4 Grundlegende Beziehungen

4.1 Transformation der Norm

Sei $v \in L_2(T)$ mit $T \subset \mathbb{R}^3$. Mit der Abbildung $F_A(\boldsymbol{\lambda}) = A_T \cdot \boldsymbol{\lambda} + \vec{P_0}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_T v^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\bar{T}} \bar{v}^2(\boldsymbol{\lambda}) \cdot |\det\, A_T|\, d\boldsymbol{\lambda} = 6|T| \cdot \int_{\bar{T}} \bar{v}^2(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \\ \|v\|_T &= \sqrt{6|T|} \cdot \|\bar{v}\|_{\bar{T}} \qquad . \end{aligned} \tag{9}$$

4.2 Der anisotrope Spursatz

Für das Einheitstetraeder $\bar{T}$, für $\bar{v} \in H^1(\bar{T})$ und für eine Fläche $\bar{E}$ von $\bar{T}$ gilt der Spursatz

$$\|\bar{v}\|^2_{\bar{E}} \le c_{\bar{T}} \cdot \|\bar{v}\|^2_{H^1(\bar{T})} = c \cdot \left(\|\bar{v}\|^2_{\bar{T}} + \|\bar{\nabla} \bar{v}\|^2_{\bar{T}} \right) \qquad .$$

Über die Transformation in das Ausgangstetraeder T erhält man

$$\frac{1}{|E|} \cdot \|v\|^2_E \le c \cdot \frac{1}{|T|} \left(\|v\|^2_T + \|A_T^T \nabla v\|^2_T \right) \qquad .$$

Nach (4) und (8) ergibt sich

$$\|A_T^T \nabla v\|_T = \|A_T^T C_T^{-T} \cdot C_T^T \nabla v\|_T \le \|A_T^T C_T^{-T}\|_2 \cdot \|C_T^T \nabla v\|_T \le c \cdot \sum_{i=1}^n h_i\, \|\tilde{D}_i v\|_T \qquad .$$

Sei h_E die Länge der Höhe über E. Aus $6\,|T| = |E| \cdot h_E$ folgt der anisotrope Spursatz

$$\|v\|^2_E \le c \cdot \frac{1}{h_E} \left(\|v\|^2_T + \sum_{i=1}^n h^2_{i,T}\, \|\tilde{D}_i v\|^2_T \right) \qquad \forall v \in H^1(T) \qquad . \tag{10}$$

4.3 Die Inversen Ungleichungen

Die Beweise erfolgen wieder mittels der Transformationstechnik. Auf dem Einheitstetraeder $\bar{T}$ gilt die folgende Normabschätzung, da die Normen über dem endlichdimensionalen Raum $V_h(\bar{T})$ wirken:

$$\|\bar{\nabla}\bar{v}_h\|_{\bar{T}} \leq c \cdot \|\bar{v}_h\|_{\bar{T}} \qquad \forall\, \bar{v}_h \in V_h(\bar{T}) \qquad .$$

Durch Rücktransformation mittels A_T folgt daraus für beliebiges $v_h \in V_h$

$$\|A_T^T \nabla v_h\|_T \leq c \cdot \|v_h\|_T \qquad .$$

Nach (5) gilt

$$\|C_T^T \nabla v_h\|_T = \|C_T^T A_T^{-T} \cdot A_T^T \nabla v_h\|_T \leq \|C_T^T A_T^{-T}\|_2 \cdot \|A_T^T \nabla v_h\|_T \leq c \cdot \|A_T^T \nabla v_h\|_T \qquad .$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} \|C_T^T \nabla v_h\|_T^2 &= \sum_{i=1}^{n} h_{i,T}^2 \, \|\tilde{D}_i v_h\|_T^2 \leq c \cdot \|v_h\|_T \\ \text{und speziell} \qquad \|\tilde{D}_i v_h\|_T &\leq c \cdot h_{i,T}^{-1} \cdot \|v_h\|_T \qquad i = 1 \dots n. \end{aligned} \tag{11}$$

Vermöge

$$\|\tilde{D}_i v_h\|_{M_j}^2 = \sum_{T \subset M_j} \|\tilde{D}_i v_h\|_T^2 \leq c \cdot h_{i,M_j}^{-2} \cdot \|v_h\|_{M_j}^2$$

gilt diese Ungleichung auch für ein Gebiet M_j.

Die beiden nächsten Ungleichungen lassen sich ähnlich herleiten.

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{\infty,T}^2 &= \|\bar{v}_h\|_{\infty,\bar{T}}^2 \leq c \cdot \|\bar{v}_h\|_{\bar{T}}^2 = c \cdot |\det A_T|^{-1} \cdot \|v_h\|_T^2 \\ \|v_h\|_{\infty,T} &\leq c \cdot |T|^{-1/2} \cdot \|v_h\|_T \end{aligned} \tag{12}$$

Ganz analog ergibt sich für eine Fläche E

$$\|v_h\|_{\infty,E} \leq c \cdot |E|^{-1/2} \cdot \|v_h\|_E \qquad . \tag{13}$$

■

4.4 Der Raum $H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$ der angepaßten Funktionen

Aus technischen Gründen ist es bei den Beweisen nötig, Terme der Form $\dfrac{h_{i,T}}{h_{min,T}} \|\tilde{D}_i v\|_T$ abzuschätzen, obwohl das Seitenverhältnis $h_{i,T}/h_{min,T}$ beliebig groß sein kann. Deshalb wird der Raum $H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$ eingeführt.

Definition 1 *Seien $c_* > 1$ und $c_a > 0$ feste Konstanten. Für ein Tetraeder T seien die Indexmengen*

$$S_T := \{i : h_{i,T} \leq c_* \cdot h_{min,T}\} \quad bzw. \quad L_T := \{i : h_{i,T} > c_* \cdot h_{min,T}\}$$

definiert. (Wegen $3 \in S_T$ ist S_T stets nichtleer.)
Wie in [5] heißt v angepaßt *bzw. $v \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$, wenn*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{i \in L_T} \frac{h^2_{i,T}}{h^2_{min,T}} \cdot \|\tilde{D}_i v\|^2_T \leq c_a \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{i \in S_T} \|\tilde{D}_i v\|^2_T \quad . \tag{14}$$

Wir sagen auch, daß das Netz (bzw. die Triangularisierung $\mathcal{T}$) an die Funktion v angepaßt ist.

Weiterhin sei $H^1_{o,\mathcal{T}}(\Omega) := H^1_{\mathcal{T}}(\Omega) \cap H^1_o(\Omega)$ der entsprechende Raum mit homogenen Randbedingungen.

Bemerkung: Im Falle $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vereinfacht sich der Faktor in der linken Doppelsumme zu $h^2_{1,T}/h^2_{2,T}$.

5 Die lokale L_2-Projektion

In den folgenden Ausführungen wird ein Interpolationsoperator konstruiert, der auf einer Idee von Clément [4] beruht. Anders als die Lagrange-Interpolation ist dieser Interpolationsoperator auch für Funktionen $v \in H^1$ definiert. In diesem Abschnitt werden ein Knoten a_j und das Makroelement M_j betrachtet. Der Übersichtlichkeit halber wird der Index j weggelassen.

Sei a ein Knoten von $\mathcal{T}$ und M das zugehörige Makroelement. Sei $V_h(M)$ der auf M eingeschränkte Raum V_h. Die lokale L_2-Projektion $P : H^1(M) \mapsto V_h(M)$ sei definiert durch

$$\int_M (v - Pv) \cdot \varphi = 0 \qquad \forall\, \varphi \in V_h(M) \quad .$$

Dann gilt folgendes Lemma.

Lemma 2

$$\|v - Pv\|_M \;\leq\; c \cdot \sum_{k=1}^{n} h_{k,M} \|\tilde{D}_k v\|_M \tag{15}$$

$$\|\tilde{D}_i(v - Pv)\|_M \;\leq\; c \cdot h^{-1}_{i,M} \cdot \sum_{k=1}^{n} h_{k,M} \|\tilde{D}_k v\|_M \qquad i = 1 \ldots n \tag{16}$$

Beweis: Zum Beweis wird eine stetige Abbildung F_B benötigt, die ein Referenzgebiet $\check{M} \in \mathcal{M}$ in das Makroelement M überführt. Die Menge $\mathcal{M}$ von Referenzgebieten soll dabei endlich sein. Wir werden uns zuerst der Konstruktion der Referenzgebiete $\check{M}$ widmen.

Das Makroelement sei die Vereinigung von K Tetraedern $T_1 \ldots T_K$. Die Knoten von M (außer Knoten a) seien $a_1 \ldots a_L$, wobei L beschränkt ist. Zwei Makroelemente M und M' mögen zur selben *Klasse* gehören, wenn

- sie aus der gleichen Anzahl von Tetraedern bestehen, also $K = K'$ ist.
- die Tetraeder und die Knoten so numeriert werden können, daß für alle $i = 1 \dots K$ gilt: Wenn das Tetraeder T_i die Eckpunkte $a, a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}$ hat, so besitzt das Tetraeder T_i' die Eckpunkte $a', a'_{j_1}, a'_{j_2}, a'_{j_3}$.

Diese Bedingungen bedeuten, daß die Vernetzungen beider Makroelemente in Tetraeder topologisch äquivalent sind. Die Anzahl solcher Topologien ist beschränkt, da K beschränkt ist. Deshalb ist auch die Anzahl der Klassen von Makroelementen beschränkt. Aus jeder dieser Klassen wird ein beliebiges Makroelement gewählt, dessen Knoten a im Koordinatenursprung liegt. Dieses Makroelement sei das Referenzgebiet $\check{M}$ der repräsentierten Klasse. Alle (endlich vielen) Referenzgebiete bilden die Menge $\mathcal{M}$.

Sei nun M ein Makroelement und $\check{M}$ das zugehörige Referenzgebiet. Nach der Konstruktion der Referenzgebiete gibt es eine stetige, stückweise affin lineare Abbildung F_B, die folgende Bedingungen genügt:

$$\begin{array}{rrcl} & F_B & : & \check{M} \mapsto M \\ & F_B & = & F_i = B_i \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{a} \quad \text{auf } \check{T}_i, \quad B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \\ \text{mit} & F_i & : & \check{T}_i \mapsto T_i \quad \text{affin linear}, \ i = 1 \dots K, \end{array}$$

wobei $\check{T}_i$ bzw. T_i die i-ten Tetraeder von $\check{M}$ bzw. M seien. Sei $\mathbf{a}$ der Vektor zum Knoten a. Größen, die sich auf das Referenzgebiet beziehen, seien mit einem Haken ˇ bezeichnet.

Für das Gebiet $\check{M}$ gilt die Poincaré-Ungleichung. Da es nur endlich viele Referenzgebiete $\check{M} \in \mathcal{M}$ gibt, kann die auftretende Konstante von $\check{M}$ unabhängig gewählt werden, und es gilt für $\check{u} \in H^1(\check{M})$

$$\int_{\check{M}} |\check{u}|^2 \leq c \cdot \left(\left| \int_{\check{M}} \check{u} \right|^2 + \int_{\check{M}} |\check{\nabla} \check{u}|^2 \right) \qquad .$$

Für eine beliebige Funktion $v \in H^1(M)$ definieren wir den Mitteloperator I durch

$$Iv := |\check{M}|^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{K} \int_{T_i} v \cdot |\det B_i|^{-1} \ = \ const.$$

F_B überführe eine Funktion $\check{v} \in H^1(\check{M})$ in $v \in H^1(M)$. Mit der Definition von I gilt

$$\int_{\check{M}} \breve{Iv} = |\check{M}| \cdot Iv = \sum_{i=1}^{K} \int_{T_i} v \cdot |\det B_i|^{-1} = \int_M v \cdot |\det B|^{-1} = \int_{\check{M}} \check{v}$$

sowie

$$\check{\nabla}(\breve{Iv}) = 0 \qquad .$$

Setzt man jetzt $\check{u} := \check{v} - \breve{Iv}$ in die Poincaré-Ungleichung ein, so ergibt sich

$$\int_{\check{M}} |\check{v} - \breve{Iv}|^2 \leq c \cdot \int_{\check{M}} |\check{\nabla} \check{v}|^2 \qquad .$$

Da es nur endlich viele Referenzgebiete $\check{M}$ mit endlich vielen Tetraedern $\check{T}_i$ gibt, gilt sofort $c_1 \le |\check{T}_i| \le c_2$ und damit

$$c_1 \cdot h_{1,T_i}\, h_{2,T_i}\, h_{3,T_i} \;\le\; |\det B_i| = |T_i|/|\check{T}_i| \;\le\; c_2 \cdot h_{1,T_i}\, h_{2,T_i}\, h_{3,T_i}$$

mit Konstanten c_1 und c_2, die nicht von T_i abhängen. Nach den Voraussetzungen an die Größen $h_{i,T}$ folgt daraus

$$c_1 \cdot |\det B_j| \le |\det B_i| \le c_2 \cdot |\det B_j| \qquad \forall\, T_i, T_j \subset M \qquad .$$

Mit der Transformation auf das Gebiet M erhält man nun

$$\begin{aligned}
\int_M (v - Iv)^2 \;&=\; \sum_{i=1}^{K} \int_{T_i} (v - Iv)^2 = \sum_{i=1}^{K} \int_{\check{T}_i} (\check{v} - \check{Iv})^2 \cdot |\det B_i| \\
&\le\; c \cdot \max_{i=1\ldots K} \{|\det B_i|\} \cdot \int_{\check{M}} (\check{v} - \check{Iv})^2 \\
&\le\; c \cdot \max_{i=1\ldots K} \{|\det B_i|\} \cdot \int_{\check{M}} |\check{\nabla} \check{v}|^2 \\
&\le\; c \cdot \sum_{i=1}^{K} \int_{\check{T}_i} |\check{\nabla} \check{v}|^2 \cdot |\det B_i| \\
&=\; c \cdot \sum_{i=1}^{K} \int_{T_i} |B_i^T \nabla v|^2 = c \cdot \sum_{i=1}^{K} \int_{T_i} \left| B_i^T C_{T_i}^{-T} \cdot C_{T_i}^T \nabla v \right|^2 \\
&\le\; c \cdot \sum_{i=1}^{K} \left\| B_i^T C_{T_i}^{-T} \right\|_2^2 \cdot \int_{T_i} \left| C_{T_i}^T \nabla v \right|^2 \qquad .
\end{aligned}$$

Zur Abschätzung der Norm von $B_i^T C_{T_i}^{-T}$ wird Lemma 1 benutzt. Sei $T_i - \mathbf{a}$ das um $-\mathbf{a}$ verschobene Tetraeder T_i. Für die Abbildungen B_i und $C_{T_i}^{-1}$ gilt nach Definition

$$\begin{array}{ccccc}
\check{T}_i & \xmapsto{B_i} & (T_i - \mathbf{a}) & \xmapsto{C_{T_i}^{-1}} & \hat{T}_i, \\
& \check{T}_i & \xmapsto{C_{T_i}^{-1} B_i} & \hat{T}_i & .
\end{array}$$

Da es nur endlich viele Tetraeder $\check{T}_j \subset \check{M}$ gibt, gilt für den Inkugelradius des Tetraeders $\check{T}_i$ natürlich $\varrho(\check{T}_i) \ge c$. Nach der Definition der Abbildung C_{T_i} ist die längste Seite des Tetraeders $\hat{T}_i$ durch $\sqrt{6}$ beschränkt. Lemma 1 liefert nun sofort

$$\left\| B_i^T C_{T_i}^{-T} \right\|_2 \;=\; \left\| C_{T_i}^{-1} B_i \right\|_2 \;\le\; d(\hat{T}_i) \,/\, \varrho(\check{T}_i) \;\le\; c$$

und daraus weiter

$$\begin{aligned}
\int_M (v - Iv)^2 \;&\le\; c \cdot \sum_{i=1}^{K} \int_{T_i} \left| C_{T_i}^T \nabla v \right|^2 \;=\; c \cdot \sum_{i=1}^{K} \int_{T_i} \sum_{k=1}^{n} h_{k,T_i}^2 \cdot (\tilde{D}_k v)^2 \\
&\le\; c \cdot \sum_{k=1}^{n} h_{k,M}^2 \cdot \|\tilde{D}_k v\|_M^2
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung 2 an das Netz und der Definition von $\tilde{D}_k$. Mit dieser Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|v - Pv\|_M^2 &= \int_M (v - Pv)(v - Pv) \\
&= \int_M (v - Pv)(v - Iv) \qquad \text{da } Pv - Iv \in V_h \\
&\leq \|v - Pv\|_M \cdot \|v - Iv\|_M \\
\|v - Pv\|_M &\leq c \cdot \sum_{k=1}^{n} h_{k,M} \cdot \|\tilde{D}_k v\|_M \qquad .
\end{aligned}$$

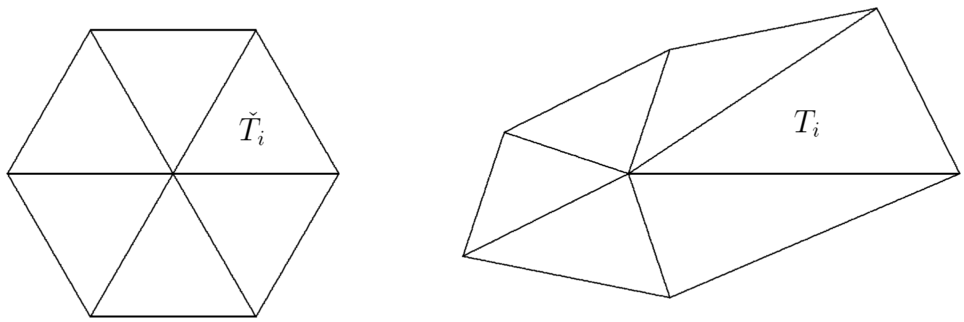
Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Zum Beweis der zweiten Ungleichung des Lemmas wird die inverse Ungleichung (11) benutzt, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\tilde{D}_i(v - Pv)\|_M &\leq \|\tilde{D}_i v\|_M + \|\tilde{D}_i P(v - Iv)\|_M \\
&\leq \|\tilde{D}_i v\|_M + c \cdot h_{i,M}^{-1} \|P(v - Iv)\|_M \\
&\leq c \cdot \left(\|\tilde{D}_i v\|_M + h_{i,M}^{-1} \sum_{k=1}^{n} h_{k,M} \|\tilde{D}_k v\|_M \right) \qquad .
\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. ■

Bemerkung: Im Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ lassen sich die Referenzgebiete einfach und anschaulich wählen. Das Makroelement bestehe aus K Dreiecken. Wenn a ein innerer Knoten ist, so sei $\check{M}$ das regelmäßige Einheits-K-Eck mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Abbildung 3 möge dies verdeutlichen.



$$\check{M} \xmapsto{F_B} M$$
$$\check{T}_i \xmapsto{F_i} T_i$$

Abbildung 3: Stetige, stückweise affin lineare Abbildung F_B für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Falls a ein Randknoten ist, so sei $\check{M}$ die Vereinigung der K kongruenten Dreiecke, deren Eckpunkte die Polarkoordinaten $(0,0)$, $(1,(i-1)\pi/2K)$ und $(1,i\pi/2K)$ haben, $i = 1 \dots K$.

6 Der H^1-Interpolationsoperator

Satz 3 *Es gibt einen Interpolationsoperator $R : H^1_{\mathcal{T}}(\Omega) \mapsto V_h$, so daß für alle $v \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$ gilt*

$$\|h_{min}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (v - Rv)\| \;:=\; \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} h_{min,T}^{-2} \|v - Rv\|_T^2\right)^{1/2} \leq c \cdot \|\nabla v\| \tag{17}$$

$$\left\|\frac{h_i(\mathbf{x})}{h_{min}(\mathbf{x})}\, \tilde{D}_i(v - Rv)\right\| \;:=\; \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} \frac{h_{i,T}^2}{h_{min,T}^2} \|\tilde{D}_i(v - Rv)\|_T^2\right)^{1/2} \leq c \cdot \|\nabla v\| \tag{18}$$

Beweis: Sei P_j die oben definierte lokale L_2-Projektion auf dem Makroelement M_j eines Knotens a_j. Wir definieren den Interpolationsoperator R als

$$Rv := \sum_{j=1}^{N} (P_j v)(a_j) \cdot \varphi_j$$

wobei φ_j die zum Knoten a_j gehörige lineare Ansatzfunktion sei. Sei T ein beliebiges Tetraeder und N_T die Menge seiner Knoten. Sei a_k ein beliebiger, aber fester Knoten daraus. Dann kann R auf T ausgedrückt werden als

$$Rv\Big|_T = \sum_{a_j\in N_T} (P_j v)(a_j) \cdot \varphi_j\Big|_T = P_k v\Big|_T + \sum_{a_j\in N_T} (P_j v - P_k v)(a_j) \cdot \varphi_j\Big|_T,$$

$$\text{da} \qquad P_k v\Big|_T = \sum_{a_j\in N_T} (P_k v)(a_j) \cdot \varphi_j\Big|_T \qquad .$$

Es gilt nach der inversen Ungleichung (12) und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |(P_j v - P_k v)(a_j)| &\leq \|P_j v - P_k v\|_{\infty,T} \\ &\leq c \cdot |T|^{-1/2} \cdot \|P_j v - P_k v\|_T \\ &\leq c \cdot |T|^{-1/2} \cdot \Big(\|v - P_j v\|_T + \|v - P_k v\|_T\Big) \qquad . \end{aligned}$$

Mit $\|\varphi_j\|_T \leq c \cdot |T|^{1/2}$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \|(P_j v - P_k v)(a_j) \cdot \varphi_j\|_T &= |(P_j v - P_k v)(a_j)| \cdot \|\varphi_j\|_T \\ &\leq c \cdot \Big(\|v - P_j v\|_T + \|v - P_k v\|_T\Big) \qquad . \end{aligned}$$

Wird diese Ungleichung in die Repräsentation von R eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \|v - Rv\|_T &\leq \|v - P_k v\|_T + \Big\|\sum_{a_j\in N_T} (P_j v - P_k v)(a_j) \cdot \varphi_j\Big\|_T \\ &\leq \|v - P_k v\|_T + \sum_{a_j\in N_T} c \cdot \Big(\|v - P_j v\|_T + \|v - P_k v\|_T\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \quad c \cdot \sum_{a_j \in N_T} \|v - P_j v\|_T \;\le\; c \cdot \sum_{a_j \in N_T} \|v - P_j v\|_{M_j} \\
&\overset{(15)}{\le} \quad c \cdot \sum_{a_j \in N_T} \sum_{k=1}^{n} h_{k,M_j} \|\tilde{D}_k v\|_{M_j} \\
&\le \quad c \cdot \sum_{T' \subset M(T)} \sum_{k=1}^{n} h_{k,T'} \|\tilde{D}_k v\|_{T'}
\end{aligned}
$$

mit $M(T) := \bigcup_{a_j \in N_T} M_j$. Dies gilt, da jedes Tetraeder T' in maximal 4 Makroelementen M_j enthalten ist, und da sich $h_{k,T'}$ für $T' \subset M(T)$ nicht rapide ändert:

$$
c \cdot h_{k,T} \le h_{k,T'} \le C \cdot h_{k,T} \qquad \forall\, T' \subset M(T) \qquad .
$$

Schließlich folgt

$$
\begin{aligned}
\|h_{min}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (v - Rv)\|^2 \quad &= \quad \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{1}{h_{min,T}^2} \|v - Rv\|_T^2 \\
&\le \quad \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{1}{h_{min,T}^2} \cdot c \sum_{T' \subset M(T)} \sum_{k=1}^{n} h_{k,T'}^2 \|\tilde{D}_k v\|_{T'}^2 \\
&\le \quad c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{k=1}^{n} \frac{h_{k,T}^2}{h_{min,T}^2} \|\tilde{D}_k v\|_T^2
\end{aligned}
$$

da jedes Tetraeder nur in einer beschränkten Anzahl in der Doppelsumme auftritt, und da sich $h_{k,T'}$ für $T' \subset M(T)$ nicht rapide ändert.

Um die verbleibende Summe abschätzen zu können, wurde $v \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$ vorausgesetzt. Mit den entsprechenden Konstanten aus der Definition dieses Raumes (vgl. (14)) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\|h_{min}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (v - Rv)\|^2 \quad &\le \quad c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{k=1}^{n} \frac{h_{k,T}^2}{h_{min,T}^2} \|\tilde{D}_k v\|_T^2 \\
&\le \quad c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{k \in L_T} \frac{h_{k,T}^2}{h_{min,T}^2} \|\tilde{D}_k v\|_T^2 \;+\; c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{k \in S_T} \frac{h_{k,T}^2}{h_{min,T}^2} \|\tilde{D}_k v\|_T^2 \\
&\overset{(14)}{\le} \quad c \cdot c_a \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{k \in S_T} \|\tilde{D}_k v\|_T^2 \;+\; c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{k \in S_T} c_*^2 \|\tilde{D}_k v\|_T^2 \\
&\le \quad c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{k=1}^{n} \|\tilde{D}_k v\|_T^2 \;\overset{(7)}{\le}\; c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \|\nabla v\|_T^2 \;=\; c \cdot \|\nabla v\|^2
\end{aligned}
$$

und damit das erste Resultat.

Der Beweis für den zweiten Teil des Satzes verläuft analog, so daß hier nur die wichtigsten Schritte wiederholt werden. Wie zuvor ist

$$
\tilde{D}_i Rv\Big|_T = \tilde{D}_i P_k v\Big|_T + \sum_{a_j \in N_T} (P_j v - P_k v)(a_j) \cdot \tilde{D}_i \varphi_j\Big|_T \qquad .
$$

Vermöge der inversen Ungleichung (11)

$$\left\|\tilde{D}_i\varphi_j\right\|_T \leq c \cdot h_{i,T}^{-1} \cdot \|\varphi_j\|_T \leq c \cdot h_{i,T}^{-1} \cdot |T|^{1/2}$$

folgt analog zu oben

$$\begin{aligned}\left\|(P_j v - P_k v)(a_j) \cdot \tilde{D}_i\varphi_j\right\|_T &= |(P_j v - P_k v)(a_j)| \cdot \left\|\tilde{D}_i\varphi_j\right\|_T \\ &\leq c \cdot h_{i,T}^{-1}\left(\|v - P_j v\|_T + \|v - P_k v\|_T\right) \qquad .\end{aligned}$$

Die weiteren Schritte sind wie im ersten Teil, also

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{D}_i(v - Rv)\right\|_T &\leq \left\|\tilde{D}_i(v - P_k v)\right\|_T + \left\|\sum_{a_j \in N_T}(P_j v - P_k v)(a_j) \cdot \tilde{D}_i\varphi_j\right\|_T \\ &\leq \left\|\tilde{D}_i(v - P_k v)\right\|_T + c \cdot h_{i,T}^{-1} \sum_{T' \subset M(T)} \sum_{l=1}^{n} h_{l,T'} \left\|\tilde{D}_l v\right\|_{T'} \\ &\overset{(16)}{\leq} c \cdot \sum_{l=1}^{n} \frac{h_{l,M_k}}{h_{i,M_k}} \left\|\tilde{D}_l v\right\|_{M_k} + c \cdot \sum_{T' \subset M(T)} \sum_{l=1}^{n} \frac{h_{l,T'}}{h_{i,T}} \left\|\tilde{D}_l v\right\|_{T'} \\ &\leq c \cdot h_{i,T}^{-1} \sum_{T' \subset M(T)} \sum_{l=1}^{n} h_{l,T'} \left\|\tilde{D}_l v\right\|_{T'}\end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned}\sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{h_{i,T}^2}{h_{min,T}^2} \left\|\tilde{D}_i(v - Rv)\right\|_T^2 &\leq c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} h_{min,T}^{-2} \sum_{T' \subset M(T)} \sum_{l=1}^{n} h_{l,T'}^2 \left\|\tilde{D}_l v\right\|_{T'}^2 \\ &\leq c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{l=1}^{n} \frac{h_{l,T}^2}{h_{min,T}^2} \left\|\tilde{D}_l v\right\|_T^2 \qquad .\end{aligned}$$

Wegen $v \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$ erhält man mit der gleichen Begründung wie oben

$$\left\|\frac{h_i(\mathbf{x})}{h_{min}(\mathbf{x})}\tilde{D}_i(v - Rv)\right\| \leq c \cdot \|\nabla v\| \qquad .$$

∎

7 Der H_o^1-Interpolationsoperator

Satz 4 *Es gibt einen Interpolationsoperator $R_o : H^1_{o,\mathcal{T}}(\Omega) \mapsto V_{o,h}$, so daß für alle $v \in H^1_{o,\mathcal{T}}(\Omega)$ gilt*

$$\begin{aligned}\|h_{min}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (v - R_o v)\| &\leq c \cdot \|\nabla v\| && (19) \\ \left\|\frac{h_i(\mathbf{x})}{h_{min}(\mathbf{x})}\tilde{D}_i\,(v - R_o v)\right\| &\leq c \cdot \|\nabla v\| \qquad . && (20)\end{aligned}$$

Beweis: Wird der oben definierte Interpolationsoperator R auf eine Funktion $v \in H^1_{o,\mathcal{T}}(\Omega)$ mit homogenen Randbedingungen angewendet, so bleiben diese im allgemeinen nicht erhalten. Um das zu garantieren, definieren wir den Interpolationsoperator R_o wie folgt.

Sei N_I die Menge der inneren Knoten. Dann sei

$$R_o v := \sum_{a_j \in N_I} (P_j v)(a_j) \cdot \varphi_j = Rv - \sum_{a_j \in \Gamma_D} (P_j v)(a_j) \cdot \varphi_j \qquad .$$

Unter Ausnutzung des vorherigen Satzes reicht es, für Randknoten $a_j \in \Gamma_D$ die Terme $\|(P_j v)(a_j) \cdot \varphi_j\|_T$ und $\|(P_j v)(a_j) \cdot \tilde{D}_i \varphi_j\|_T$ abzuschätzen.

Sei also $a_j \in \Gamma_D$ fixiert. Sei $T \subset M_j$ ein beliebiges Tetraeder mit einer Randfläche $E \ni a_j$. Dann kann die inverse Ungleichung (13) sowie der Spursatz angewendet werden, und man erhält

$$\begin{aligned}
|(P_j v)(a_j)| &\leq \|P_j v\|_{\infty,E} \leq c \cdot |E|^{-1/2} \, \|P_j v\|_E \\
&= c \cdot |E|^{-1/2} \, \|v - P_j v\|_E \qquad\qquad \text{da } v = 0 \text{ auf } E \\
&\leq c \cdot |T|^{-1/2} \Big(\|v - P_j v\|_T + \sum_{i=1}^{n} h_{i,T} \, \|\tilde{D}_i (v - P_j v)\|_T \Big) \qquad .
\end{aligned}$$

Wendet man jetzt die Ungleichungen (15) und (16) der lokalen L_2-Projektion an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|v - P_j v\|_{M_j} &\leq c \cdot \sum_{k=1}^{n} h_{k,M_j} \|\tilde{D}_k v\|_{M_j} \\
\sum_{i=1}^{n} h_{i,T} \, \|\tilde{D}_i (v - P_j v)\|_T &\overset{(16)}{\leq} c \cdot \sum_{i=1}^{n} h_{i,T} \sum_{k=1}^{n} \frac{h_{k,M_j}}{h_{i,M_j}} \, \|\tilde{D}_k v\|_{M_j} \\
&\leq c \cdot \sum_{k=1}^{n} h_{k,M_j} \, \|\tilde{D}_k v\|_{M_j} \qquad .
\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$|(P_j v)(a_j)| \leq c \cdot |T|^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} h_{k,M_j} \, \|\tilde{D}_k v\|_{M_j} \qquad .$$

Mit $\|\varphi_j\|_{T'} \leq c \cdot |T'|^{1/2} \leq c \cdot |T|^{1/2}$ für alle $T' \subset M_j$ gilt folglich

$$\|(P_j v)(a_j) \cdot \varphi_j\|_{T'} \leq c \cdot \sum_{k=1}^{n} h_{k,M_j} \, \|\tilde{D}_k v\|_{M_j} \qquad \forall \, T' \subset M_j \qquad .$$

Unter Ausnutzung dieser Beziehung erhält man

$$\begin{aligned}
\Big\| h_{min}^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{a_j \in \Gamma_D} (P_j v)(a_j) \cdot \varphi_j \Big\|^2 &= \sum_{T \cap \Gamma_D \neq \emptyset} h_{min,T}^{-2} \, \Big\| \sum_{a_j \in T \cap \Gamma_D} (P_j v)(a_j) \cdot \varphi_j \Big\|_T^2 \\
&\leq 4 \sum_{a_j \in \Gamma_D} \sum_{T \subset M_j} h_{min,T}^{-2} \, \|(P_j v)(a_j) \cdot \varphi_j\|_T^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\ c \cdot \sum_{a_j \in \Gamma_D} h_{min,M_j}^{-2} \sum_{k=1}^{n} h_{k,M_j}^2 \,\|\tilde{D}_k v\|_{M_j}^2 \\
&\leq\ c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} h_{min,T}^{-2} \sum_{k=1}^{n} h_{k,T}^2 \,\|\tilde{D}_k v\|_T^2 \\
&\leq\ c \cdot \|\nabla v\|^2
\end{aligned}
$$

mit den selben Argumenten wie im vorigen Satz. Daraus folgt schließlich die erste Behauptung

$$
\begin{aligned}
\|h_{min}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (v - R_o v)\| \ &\leq\ \|h_{min}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (v - Rv)\| \ + \\
&\quad + \left\| h_{min}^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{a_j \in \Gamma_D} (P_j v)(a_j) \cdot \varphi_j \right\| \\
&\leq\ c \cdot \|\nabla v\| \qquad .
\end{aligned}
$$

Der zweite Teil des Beweises verläuft ganz analog zu obigen Ausführungen und dem letzten Satz. Wegen

$$
\left\| \tilde{D}_i \varphi_j \right\|_T \leq c \cdot h_i^{-1} \cdot \|\varphi_j\|_T \leq c \cdot h_i^{-1} \cdot |T|^{1/2}
$$

gilt

$$
\frac{h_{i,T}}{h_{min,T}} \left\| (P_j v)(a_j) \cdot \tilde{D}_i \,\varphi_j \right\|_T \leq c \cdot h_{min,T}^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} h_{k,M_j} \,\|\tilde{D}_k v\|_{M_j}
$$

für ein Randtetraeder T. Die restlichen Überlegungen sind die selben und werden deshalb hier weggelassen. ■

8 Der Fehlerschätzer

Für $v_h \in V_{o,h}$ definieren wir den Gradientensprung senkrecht zu einer (inneren) Fläche E als

$$
r_E(v_h)(x) := \lim_{t \to +0} \left[\frac{\partial}{\partial n_E} v_h(x + t n_E) \ - \ \frac{\partial}{\partial n_E} v_h(x - t n_E) \right]
$$

mit dem Einheitsvektor $n_E \perp E$ und $x \in E$. Weiterhin sei das Elementresiduum über einem Tetraeder T definiert als

$$
r_T(v_h) := P_T f \ + \ \Delta v_h
$$

wobei P_T der L_2-Projektor von $L_2(\Omega)$ in den Raum der stückweise konstanten Funktionen ist. (Bei linearen Ansatzfunktionen ist $r_T(v_h) = P_T f$.) Der lokale Fehlerschätzer für ein Tetraeder T sei definiert durch

$$
\eta_T(u_h) := \left(h_{min}^2(\mathbf{x}) \|r_T(u_h)\|_T^2 \ + \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma_D} h_E \cdot \|r_E(u_h)\|_E^2 \right)^{1/2} \qquad . \tag{21}
$$

Dann gilt folgender Satz.

Satz 5 (Untere Schranke des Fehlerschätzers) *Sei $u \in H_o^1(\Omega)$ die exakte Lösung und $u_h \in V_{o,h}$ die Näherungslösung. Das Netz sei an den Fehler $u - u_h$ angepaßt, also $u - u_h \in H^1_{o,\mathcal{T}}(\Omega)$. Dann gilt die* a-posteriori *Abschätzung*

$$\|\nabla(u-u_h)\| \leq c \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} \eta_T^2(u_h) \ + \ \sum_{T\in\mathcal{T}} h^2_{min,T}\|f - P_T f\|_T^2 \right)^{1/2} \quad . \tag{22}$$

Beweis: Aus der Orthogonalität des Fehlers

$$(\nabla(u-u_h), \nabla v_h) = 0 \qquad \forall\, v_h \in V_{o,h}$$

folgt für alle $v \in H^1_{o,\mathcal{T}}(\Omega)$ durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
(\nabla(u-u_h), \nabla v) &= (\nabla(u-u_h), \nabla(v - R_o v)) \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}} (f + \Delta u_h, v - R_o v)_T \ + \ \sum_{E\in\Omega} (r_E(u_h), v - R_o v)_E \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}} \Big[(f - P_T f + P_T f + \Delta u_h, v - R_o v)_T \ + \\
&\qquad + \frac{1}{2} \sum_{E\in\partial T\setminus\Gamma_D} (r_E(u_h), v - R_o v)_E \Big] \\
&\leq \sum_{T\in\mathcal{T}} \Big[(\|r_T(u_h)\|_T + \|f - P_T f\|_T) \cdot \|v - R_o v\|_T \ + \\
&\qquad + \frac{1}{2} \sum_{E\in\partial T\setminus\Gamma_D} \|r_E(u_h)\|_E \cdot \|v - R_o v\|_E \Big] \\
&\leq \sum_{T\in\mathcal{T}} \Big[h_{min,T}\Big(\|r_T(u_h)\|_T + \|f - P_T f\|_T\Big) \cdot h^{-1}_{min,T}\|v - R_o v\|_T \\
&\qquad + \frac{1}{2} \sum_{E\in\partial T\setminus\Gamma_D} h^{1/2}_{E,T}\|r_E(u_h)\|_E \cdot h^{-1/2}_{E,T}\|v - R_o v\|_E \Big].
\end{aligned}$$

Vermöge der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man weiter

$$\begin{aligned}
&(\nabla(u-u_h), \nabla v) \leq \\
&\quad \leq \ 2 \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} h^2_{min,T}\Big(\|r_T(u_h)\|_T^2 + \|f - P_T f\|_T^2\Big) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} h^{-2}_{min,T}\|v - R_o v\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + \frac{1}{2} \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} \sum_{E\in\partial T\setminus\Gamma_D} h_{E,T}\|r_E(u_h)\|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} \sum_{E\in\partial T\setminus\Gamma_D} h^{-1}_{E,T}\|v - R_o v\|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Der zweite Wurzelausdruck kann nach Satz 4 sofort abgeschätzt werden als

$$\|h^{-1}_{min}(\mathbf{x}) \cdot (v - R_o v)\| = \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} h^{-2}_{2,T}\|v - R_o v\|_T^2 \right)^{1/2} \leq c \cdot \|\nabla v\| \qquad .$$

Für den letzten Wurzelausdruck gilt nach dem Spursatz zunächst

$$\|v - R_o v\|_E^2 \leq c \cdot h_E^{-1} \left(\|v - R_o v\|_T^2 + \sum_{i=1}^{n} h_{i,T}^2 \, \|\tilde{D}_i(v - R_o v)\|_T^2 \right)$$

und wegen $h_{E,T} \geq h_{min,T}/2$ weiter

$$\sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma_D} h_{E,T}^{-1} \|v - R_o v\|_E^2 \leq c \cdot h_{min,T}^{-2} \left(\|v - R_o v\|_T^2 + \sum_{i=1}^{n} h_{i,T}^2 \, \|\tilde{D}_i(v - R_o v)\|_T^2 \right).$$

Nach dem H_o^1-Interpolationssatz 4 ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma_D} h_{E,T}^{-1} \|v - R_o v\|_E^2 \quad &\leq \quad c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} h_{min,T}^{-2} \, \|v - R_o v\|_T^2 \; + \\
&\quad + c \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{h_{i,T}^2}{h_{min,T}^2} \, \|\tilde{D}_i(v - R_o v)\|_T^2 \\
&\leq \quad c \cdot \|\nabla v\|^2 \qquad .
\end{aligned}$$

Faßt man diese Resultate zusammen, so folgt

$$\begin{aligned}
(\nabla(u - u_h), \nabla v) \quad \leq \quad c \cdot \Bigg(\sum_{T \in \mathcal{T}} \Big[h_{2,T}^2 \Big(\|r_T(u_h)\|_T^2 + \|f - P_T f\|_T^2 \Big) \; + \\
+ \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma_D} h_{E,T} \|r_E(u_h)\|_E^2 \Big] \Bigg)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\nabla v\| \qquad .
\end{aligned}$$

Mit $v := u - u_h \in H_{o,\mathcal{T}}^1(\Omega)$ ergibt sich schließlich die Behauptung. ∎

Bemerkung: Sowohl im Elementresiduum $r_T(u_h)$ als auch in der Abschätzung (22) des Fehlers taucht der Term $P_T f$ auf. Bei näherer Betrachtung des Beweises fällt auf, daß dort eine beliebige Funktion aus $L_2(\Omega)$ stehen kann. Insbesondere würde mit f statt $P_T f$ gelten

$$\|\nabla(u - u_h)\|^2 \leq c \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2(u_h)$$

mit $r_T(u_h) := f\big|_T$. Oft jedoch kann oder will man die Integrale über f, die hinter der Norm $\|r_T\|$ stehen, nicht exakt ausrechnen, und wendet deshalb Näherungsformeln an. Der Term $P_T f$ ermöglicht es, auch diese Fälle mit dem Fehlerschätzer zu erfassen.

A Die wichtigsten Beziehungen auf einen Blick

1. Die Poincaré-Ungleichung
$$\int_\omega |v|^2 \le c_\omega \cdot \left(\left| \int_\omega v \right|^2 + \int_\omega |\nabla v|^2 \right) \qquad \forall v \in H^1(\omega)$$
Die Konstante c_ω hängt ab vom Gebiet ω.

2. Die Transformation: Mit der Transformation $F_A : \bar{T} \mapsto T \subset \mathbb{R}^3$ gilt
$$\|v\|_T = \sqrt{6|T|} \cdot \|\bar{v}\|_{\bar{T}} \qquad \forall v \in L_2(T) \qquad . \tag{9}$$

3. Der Spursatz: Für eine Fläche $E \subset \partial T$ gilt
$$\|v\|_E^2 \le c \cdot \frac{1}{h_E} \left(\|v\|_T^2 + \sum_{i=1}^n h_{i,T}^2 \, \|\tilde{D}_i v\|_T^2 \right) \qquad \forall v \in H^1(T) \qquad . \tag{10}$$

4. Inverse Ungleichungen. Für $v_h \in V_h$ gelten
$$\begin{aligned} \|\tilde{D}_i v_h\|_T &\le c \cdot h_{i,T}^{-1} \cdot \|v_h\|_T \qquad i = 1 \ldots n & (11)\\ \|v_h\|_{\infty,T} &\le c \cdot |T|^{-1/2} \cdot \|v_h\|_T & (12)\\ \|v_h\|_{\infty,E} &\le c \cdot |E|^{-1/2} \cdot \|v_h\|_E \qquad . & (13) \end{aligned}$$
Ungleichung (11) gilt auch für ein Gebiet M_j statt des Gebietes T.

5. Der angepaßte Raum $H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$.
Seien $c_* > 1, c_a > 0$. Für ein finites Element T seien die Indexmengen
$$S_T := \{i : h_{i,T} \le c_* \cdot h_{min,T}\} \quad \text{bzw.} \quad L_T := \{i : h_{i,T} > c_* \cdot h_{min,T}\}.$$
definiert. Dann heißt v *angepaßt* bzw. $v \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$, wenn
$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{i \in L_T} \frac{h_{i,T}^2}{h_{min,T}^2} \cdot \|\tilde{D}_i v\|_T^2 \le c_a \cdot \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{i \in S_T} \|\tilde{D}_i v\|_T^2 \qquad . \tag{14}$$
Weiterhin sei $H^1_{o,\mathcal{T}}(\Omega) := H^1_{\mathcal{T}}(\Omega) \cap H^1_o(\Omega)$ der entsprechende Raum mit homogenen Randbedingungen.

6. Lokale L_2-Projektion. Es gilt
$$\begin{aligned} \|v - P_j v\|_{M_j} &\le c \cdot \sum_{k=1}^n h_{k,M_j} \|\tilde{D}_k v\|_{M_j} & (15)\\ \|\tilde{D}_i (v - Pv)\|_{M_j} &\le c \cdot h_{i,M}^{-1} \cdot \sum_{k=1}^n h_{k,M_j} \|\tilde{D}_k v\|_{M_j} \quad i = 1 \ldots n \quad . & (16) \end{aligned}$$

7. Der H^1-Interpolationsoperator R. Für alle $v \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$ gilt

$$\|h_{min}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (v - Rv)\| \;:=\; \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} h_{min,T}^{-2} \|v - Rv\|_T^2\right)^{1/2} \leq c \cdot \|\nabla v\| \tag{17}$$

$$\left\|\frac{h_i(\mathbf{x})}{h_{min}(\mathbf{x})}\,\tilde{D}_i(v - Rv)\right\| \;:=\; \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} \frac{h_{i,T}^2}{h_{min,T}^2}\,\|\tilde{D}_i(v - Rv)\|_T^2\right)^{1/2} \leq c \cdot \|\nabla v\| \tag{18}$$

8. Der $\mathring{H}^1$-Interpolationsoperator R_o.
   Es gelten die gleichen Ungleichungen wie für den Operator R.

Literatur

[1] T. Apel, R. Mücke, and J. R. Whiteman. An adaptive finite element technique with a-priori mesh grading. Technical Report 9, BICOM Institute of Computational Mathematics, 1993.

[2] T. Apel and S. Nicaise. Elliptic problems in domains with edges: anisotropic regularity and anisotropic finite element meshes. Preprint SPC94_16, TU Chemnitz-Zwickau, 1994. Submitted to SIAM J. Numer. Anal.

[3] P. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.

[4] P. Clement. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Anal. Numer.*, 2:77–84, 1975.

[5] K. Siebert. An a posteriori error estimator for anisotropic refinement. Preprint 313, Universität Bonn, SFB 256, 1993.

[6] R. Verfürth. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques. Report, Inst. f. Angew. Mathem., Univ. Zürich, 1993.

Other titles in the SPC series:

93_1 G. Haase, T. Hommel, A. Meyer and M. Pester. Bibliotheken zur Entwicklung paralleler Algorithmen. May 1993.

93_2 M. Pester and S. Rjasanow. A parallel version of the preconditioned conjugate gradient method for boundary element equations. June 1993.

93_3 G. Globisch. PARMESH – a parallel mesh generator. June 1993.

94_1 J. Weickert and T. Steidten. Efficient time step parallelization of full-multigrid techniques. January 1994.

94_2 U. Groh. Lokale Realisierung von Vektoroperationen auf Parallelrechnern. March 1994.

94_3 A. Meyer. Preconditoning the Pseudo-Laplacian for Finite Element simulation of incompressible flow. February 1994.

94_4 M. Pester. Bibliotheken zur Entwicklung paralleler Algorithmen. (aktualisierte Fassung). March 1994.

94_5 U. Groh, Chr. Israel, St. Meinel and A. Meyer. On the numerical simulation of coupled transient problems on MIMD parallel systems. April 1994.

94_6 G. Globisch. On an automatically parallel generation technique for tetrahedral meshes. April 1994.

94_7 K. Bernert. Tauextrapolation – theoretische Grundlagen, numerische Experimente und Anwendungen auf die Navier-Stokes-Gleichungen. June 1994.

94_8 G. Haase, U. Langer, A. Meyer and S. V. Nepomnyaschikh. Hierarchical extension and local multigrid methods in domain decomposition preconditoners. June 1994.

94_9 G. Kunert. On the choice of the basis transformation for the definition of DD Dirichlet preconditioners. June 1994.

94_10 M. Pester and T. Steidten. Parallel implementation of the Fourier Finite Element Method. June 1994.

94_11 M. Jung and U. Rüde. Implicit Extrapolation Methods for Multilevel Finite Element Computations: Theory and Applications. June 1994.

94_12 A. Meyer and M. Pester. Verarbeitung von Sparse-Matrizen in Kompaktspeicherform (KLZ/KZU). June 1994.

94_13 B. Heinrich and B. Weber. Singularities of the solution of axisymmetric elliptic interface problems. June 1994.

94_14 K. Gürlebeck, A. Hommel and T. Steidten. The method of lumped masses in cylindrical coordinates. July 1994.

94_15 Th. Apel and F. Milde. Realization and comparison of various mesh refinement strategies near edges. August 1994.

94_16 Th. Apel and S. Nicaise. Elliptic problems in domains with edges: anisotropic regularity and anisotropic finite element meshes. August 1994.

94_17 B. Heinrich. The Fourier-finite-element method for Poisson's equation in axisymmetric domains with edges. August 1994.

94_18 M. Pester and S. Rjasanow. A parallel preconditioned iterative realization of the panel method in 3D. September 1994.

94_19 A. Meyer. Preconditoning the Pseudo-Laplacian for Finite Element simulation of incompressible flow. October 1994.

94_20 V. Mehrmann. A step towards a unified treatment of continous and discrete time control problems. October 1994.

94_21 C. He, V. Mehrmann. Stabilization of large linear systems. October 1994.

94_22 B. Heinrich and B. Weber. The Fourier-finite-element method for three-dimensional elliptic problems with axisymmetric interfaces. November 1994.

94_23 M. Pester. On-line visualization in parallel computations. November 1994.

94_24 M. Pester. Grafik-Ausgabe vom Parallelrechner für 2D-Gebiete. November 1994.

94_25 R. Byers, C. He, V. Mehrmann. The Matrix Sign Function Method and the Computation of Invariant Subspaces. November 1994.

94_26 T. Apel, G. Lube. Local inequalities for anisotropic finite elements and their application to convection-diffusion problems. Dezember 1994.

94_27 P. Kunkel, V. Mehrmann. Analysis und Numerik linearer differentiell-algebraischer Gleichungen. Dezember 1994.

95_1 T. Apel, G. Lube. Anisotropic mesh refinement in stabilized Galerkin methods Januar 1995.

95_2 M. Meisel, A. Meyer. Implementierung eines parallelen vorkonditionierten Schur-Komplement CG-Verfahrens in das Programmpaket FEAP. Januar 1995.

95_3 S. V. Nepomnyaschikh. Optimal multilevel extension operators. January 1995

95_4 M. Meyer. Grafik-Ausgabe vom Parallelrechner für 3D-Gebiete. Januar 1995

95_5 T. Apel, G. Haase, A. Meyer, M. Pester. Parallel solution of finite element equation systems: efficient inter-processor communication. Februar 1995

95_7 M. Bollhöfer, C. He, V. Mehrmann. Modified block Jacobi preconditioners for the conjugate gradient method. Part I: The positive definit case. January 1995

95_11 M. Bollhöfer. Algebraic Domain Decomposition. March 1995

Some papers can be accessed via anonymous ftp from server `ftp.tu-chemnitz.de`, directory `pub/Local/mathematik/SPC`. (Note the capital L in Local!)