Technische Universität Chemnitz

Sonderforschungsbereich 393

Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern

Detlef Michael

Notizen zu einer geometrisch motivierten Plastizitätstheorie

Preprint SFB393/99-05

Preprint-Reihe des Chemnitzer SFB 393

SFB393/99-05 **Februar 1999**

Inhaltsverzeichnis

Author's addresses:

Detlef Michael
TU Bergakademie Freiberg
Institut für Mechanik und Maschinenelemente
D-09596 Freiberg

`http://www.tu-chemnitz.de/sfb393/`

Zusammenfassung

Spätestens seit dem Buch „*Mathematical Foundations of Elasticity*“ von J.E. Marsden, T.J.R. Hughes [MH83] ist allgemein anerkannt, daß es hilfreich ist bei der Betrachtung mechanischer Deformationsvorgänge eine geometrische Betrachtungsweise heranzuziehen. Interessant ist z.B., daß aus der Erfüllung *Kompatibilitätsbedingung* nach *Saint-Venant* folgt, daß die Ausgangskonfikuration ausgestattet mit der Metrik $\boldsymbol{C}^\flat$ eine *flache, torsionsfreie Riemann'sche Mannigfaltigkeit* darstellt. Bei der Modellierung plastischer Deformationsprozesse wird üblicherweise eine inkompatible *Zwischenkonfiguration* eingeführt. Offen bleibt die Frage, wie eine *inkompatible Konfiguration* geometrisch zu charakterisieren ist. Es soll gezeigt werden, daß aus dem Verzicht der Annahme der *Torsionsfreiheit* und der *Flachheit* ein Modell entsteht, das reich genug ist, um viele der derzeit noch kontrovers diskutierten Zugänge zur Behandlung großer elastisch-plastischer Deformationen in sich zu vereinen.

1 Vorbemerkungen

Eine allgemeine Theorie der Elasto–Plastizität bei Annahme großer Deformationen ist derzeit noch Gegenstand einer breiten kontroversen Diskussion. Neben Modellen, die auf phänomenologischen *ad hoc* Annahmen basieren, finden auch Formulierungen die durch ein gut verstandenes mikromechanisches Bild der Einkristallplastizität motiviert sind [SH98] breite Anwendung. Ein wesentlicher Aspekt dieser mikromechanischen Beschreibung ist die Einführung einer *lokalen Zwischenkonfiguration* $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ bezüglich derer das *elastische* Verhalten des Materials beschrieben wird. Von einem phänomenologischen Standpunkt aus führt diese Vorgehensweise zu einer lokalen *multiplikativen Aufspaltung* des *Deformationsgradienten* $\boldsymbol{F}$ der Form

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t) = \overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X},t) \circ \overset{\mathrm{p}}{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X},t) \tag{1.1}$$

für jeden Punkt $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ der *Ausgangskonfiguration* $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subset \boldsymbol{\mathcal{S}}$ des betrachteten Festkörpers gelegen im *physikalischen Raum* $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Die Inverse $\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{F}}{}^{-1}$ des „*elastischen*“ *Deformationsgradienten* wird üblicherweise als eine lokale Deformation interpretiert, die eine Umgebung $\boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ eines Punktes $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ in der *Momentankonfiguration* $\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ entlastet. Die *Zwischenkonfiguration* $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ wird folglich implizit als spannungsfrei angenommen. Die so durch $\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{F}}{}^{-1}$ definierte *Zwischenkonfiguration* $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ wird als *inkompatibel* bezeichnet.

Wirft man einen Blick in ein Standardlehrbuch der Plastizitätstheorie bei kleinen Deformationen, so findet man obige Argumente wieder. In diesem Licht betrachtet, kann die lokale *multiplikative Aufspaltung* des *Deformationsgradienten* als einfachste Annahme beim Übergang zu geometrisch nichtlinearen Problemen angesehen werden. Desweiteren folgt (1.1), beschreibt man einen physikalischen Körper als eine *n–dimensionale* C^k *Mannigfaltigkeit* [Zei97] $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, aus der bei geeigneter Wahl von $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ immer möglichen Aufspaltung der Bewegung $\boldsymbol{\Phi}_t : \boldsymbol{\mathcal{B}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{S}}$ von $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ im physikalischen Raum $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ in eine Abbildung $\overset{\mathrm{p}}{\boldsymbol{\Phi}}_t : \boldsymbol{\mathcal{B}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{I}}$ und in eine Abbildung $\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{\Phi}}_t : \boldsymbol{\mathcal{I}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{S}}$ mit

$$\boldsymbol{\Phi}_t := \overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{\Phi}}_t \circ \overset{\mathrm{p}}{\boldsymbol{\Phi}}_t .$$

unmittelbar aus den Eigenschaften der *Tangentialabbildung*[1] $\mathbf{\Phi}_t' : T_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\mathcal{B}} \mapsto T_{\mathbf{\Phi}_t(\boldsymbol{X})}\boldsymbol{\mathcal{S}}$ mit $\mathbf{\Phi}_t' = \overset{\mathrm{e}}{\mathbf{\Phi}}{}_t' \circ \overset{\mathrm{p}}{\mathbf{\Phi}}{}_t'$. Wobei zu beachten ist, daß falls $\mathbf{\Phi}_t$ als *Bewegung* oder *Deformation* verstanden wird, $\mathbf{\Phi}_t'$ mit $\boldsymbol{F}$ zu identifizieren ist. Da die Abbildungen $\overset{\mathrm{e}}{\mathbf{\Phi}}_t$, $\overset{\mathrm{p}}{\mathbf{\Phi}}_t$ für eine bekannte Bewegung $\mathbf{\Phi}_t$ nicht eindeutig definiert sind, bestehen bei der Beschreibung der *Zwischenkonfiguration* $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ gewisse Freiheiten.

Bereits in weiter zurückliegenden Arbeiten [Ko55a, Ko55b, Bi60, Kr70] gibt es Ansätze die *Zwischenkonfiguration* als *nicht Riemann'sche Mannigfaltigkeit* zu beschreiben. Insbesondere der Zusammenhang zwischen den geometrischen und mikromechanischen Größen:

$$\begin{array}{rcl} \textit{Torsiontensor} & \Longleftrightarrow & \text{Versetzungsdichte} \\ \textit{Riemann'scher Krümmungstensor} & \Longleftrightarrow & \text{Dichte von Punktdefekten} \end{array}$$

konnte dort gezeigt werden. Die genannten Arbeiten bauen auf der im folgenden angegebenen „kontinuumsmechanischen“ Deutung der *Inkompatibilität*[2] auf, der mit der Annahme einer nicht differenzierbaren Abbildung $\overset{\mathrm{e}}{\mathbf{\Phi}}_t$ einher geht. Hiermit ist verbunden, daß $\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{F}}$ nicht existiert, so daß dieser Zugang die Betrachtung auf die *Zwischenkonfiguration* $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ einengt und Aussagen bezüglich der *Momentan*– bzw. der *Ausgangskonfiguration* extrem erschwert, wenn nicht sogar unmöglich macht.

Im weiteren soll gezeigt werden, daß unter der Annahme, daß die *Zwischenkonfiguration* als *affine Riemann'sche Mannigfaltigkeit* beschrieben werden kann, es möglich ist, aus den inneren geometrischen Eigenschaften von $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ Aussagen über daraus resultierende Eigenschaften der *Momentan*– bzw. der *Ausgangskonfiguration* abzuleiten.

2 Riemann'sche Mannigfaltigkeiten

Eine zentrale Rolle der weiteren Betrachtungen spielt die Annahme, daß neben der *Ausgangskonfiguration* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ und der *Momentankonfiguration* $\mathbf{\Phi}_t(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ auch die *Zwischenkonfiguration* $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ als *n–dimensionale Mannigfaltigkeiten* betrachtet werden können. Zur Definition von *Mannigfaltigkeiten* gibt es verschiedene mögliche Zugänge. Oft wird eine *Mannigfaltigkeit* als *Haussdorff Raum* ausgestattet mit einem C^∞ *Atlas* definiert [Lee97][Sha97][MM98]. Ein anderer in [Zei97] angegebener Weg geht von einer offenen Menge $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ aus, die ausgestattet mit einem *abstrakten C^k Atlas* zu einer *Mannigfaltigkeit* wird (siehe Kapitel 5.2). Das Vorhandensein eines solchen *Atlanten* impliziert dann in natürlicher Weise die Existenz einer *Topologie* auf $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Die Forderung der *C^k–Kompatibilität* macht $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ dann zu einem *Haussdorff Raum*.

Da es bei den vorliegenden Betrachtungen vorrangig darum geht, die inneren Eigenschaften von *Riemann'schen Mannigfaltigkeiten* zu charakterisieren und daraus Aussagen über mögliche Eigenschaften der *Zwischenkonfiguration* abzuleiten, erscheint es nicht als

[1]vergleiche Satz 5.3.1
[2]vergleiche Kapitel 3.1

hilfreich eine *Riemann'sche Mannigfaltigkeit* als eine in dem *Euklidischen Raum* $\boldsymbol{R}^n$ *eingebettete Mannigfaltigkeit* zu betrachten, wie es modernen Zugängen zur Geometrie entspricht.

Ein geeignetes Werkzeug zur Charakterisierung der inneren Eigenschaften von *Riemann'sche Mannigfaltigkeiten* sind *Kurven* in $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ und insbesondere die *Geodätischen* (*Kurven* die zwei Punkte in einer *Mannigfaltigkeit* auf dem „kürzesten" Weg verbinden), Beispiele dafür sind Geraden im *Euklidischen Raum* $\boldsymbol{R}^n$ und *Großkreise* auf Kugeln. Für jeden Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$ kann der *Tangentialraum* $T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ dann als Menge von Äquivalenzklassen[3] von *Kurven* $\boldsymbol{c}(t)$ durch $\boldsymbol{x}$ in irgendeiner Parametrisierung $t \in [a, b] \subset \boldsymbol{\mathcal{R}}$ mit einer geeigneten *Äquivalenzrelation* charakterisiert werden. Mit anderen Worten, *Vektoren* sind „Geschwindigkeiten" $\dot{\boldsymbol{c}}$.

2.1 Einführung eines Abstandsbegriffs – Riemannsche Metrik

Der Abstand $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ zweier Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$ kann auf einer *Mannigfaltigkeit* $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ definiert werden als

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \min_{\boldsymbol{c}(\cdot)} \int_s^t \|\dot{\boldsymbol{c}}\| d\xi, \ \forall \boldsymbol{c}(\cdot) \in \boldsymbol{\mathcal{M}} \text{ mit } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}(s), \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}(t); \ \ \dot{\boldsymbol{c}}(\cdot) \in T_{\boldsymbol{c}(\cdot)}\boldsymbol{\mathcal{M}}$$

d.h. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ist definiert als Länge der *Geodätischen* zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$. Führt man eine Norm $\|\dot{\boldsymbol{c}}\| = \sqrt{\boldsymbol{g}(\dot{\boldsymbol{c}}, \dot{\boldsymbol{c}})}$ ein mit

$$\begin{array}{lcll} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) & = & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}); & \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) & > & 0; & \forall \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{u} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \end{array}$$

(d.h. $\boldsymbol{g}$ sei positive definite und folglich invertierbar) wird $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ zu einer *Riemann'schen Mannigfaltigkeit* $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{g})$, falls $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ ein *kovariantes Tensorfeld* vom Typ $\binom{0}{2}$ ist

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) : T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \times T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{R}}; \ \ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}.$$

Weitere Verallgemeinerungen sind möglich [Lee97], erscheinen im vorliegenden Zusammenhang aber nicht als erforderlich.

Mit $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ verfügt $T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ über ein *inneres Produkt*. Wie im *Euklidischen Raum* ist die Länge oder Norm eines *Tangentenvektors* $\boldsymbol{u} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ dann definiert durch $\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$ und der Winkel θ zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ durch $\cos\theta := \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|}$.

2.2 Affine Konnexion und Richtungableitungen

Bei der Definition des Abstandes zweier Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$ wurde der Begriff der *Geodätischen* als *Kurve*, die den Abstand zumindest zweier benachbarter Punkte minimiert verwendet. Somit kann eine *Geodätische* als Verallgemeinerung des Geradenbegriffs im *Euklidischen Raum* verstanden werden. Eine Gerade $\boldsymbol{c}(t)$ ist bekanntlich dadurch charakterisiert,

[3] siehe Definition 5.3.3

daß ihre „Beschleunigung" $\ddot{\boldsymbol{c}}$ verschwindet. Diese Eigenschaft kann zur Beschreibung der Eigenschaften einer *Geodätischen* in einer *Riemann'schen Mannigfaltigkeit* herangezogen werden.

Zur Berechnung von $\ddot{\boldsymbol{c}}$ auf einer *Riemann'schen Mannigfaltigkeit* $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{g})$ kann der Differenzenquotient[4] von $\dot{\boldsymbol{c}}(t+h) \in T_{\boldsymbol{c}(t+h)}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ und $\dot{\boldsymbol{c}}(t) \in T_{\boldsymbol{c}(t)}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ nicht herangezogen werden, da beide verschiedenen *Tangentenräumen* angehören. Um diese Frage klären zu können ist es erforderlich ein Konzept zu entwickeln, um Vektorfelder an benachbarten Punkten miteinander vergleichen bzw. Vektoren längs von *Kurven* „transportieren" zu können. Dieser Zusammenhang (auch als *Konnexion* bezeichnet) zwischen *Tangentenräumen* ist dann folglich eine zusätzliche Eigenschaft $\boldsymbol{\nabla}$ der betrachteten *Mannigfaltigkeit* $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, die nicht notwendig mit einer *Metrik* verbunden sein muß und $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ zu einer *affinen Mannigfaltigkeit* $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{\nabla})$ macht. Eine solche *Riemann'sche Mannigfaltigkeit* soll als *affine Riemann'sche Mannigfaltigkeit* $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\nabla})$ bezeichnet werden.

Richtungsableitung skalarer Funktionen

Gemäß dem im Satz 5.3.1 enthaltenen Spezialfall $\mu : \boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{R}}$ existiert eine lineare stetige Abbildung $\mu' : T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{R}}$, folglich ist μ' ein *Kovektor* $\mu' \in T^*_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$. $\mu' \cdot \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ heißt *Richtungsableitung* $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\mu$ *von* μ *in Richtung* $\boldsymbol{v}$. Es ist auch üblich die Bezeichnung $\boldsymbol{\nabla}\mu$ zu verwenden, mit $\boldsymbol{\nabla}\mu := \mu'$.

Es kann auch wie folgt vorgegangen werden:

Sei $\boldsymbol{c}(\cdot)$ eine *Kurve* in $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ mit dem *Tangentenvektor* $\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{v}$ im Punkt $\boldsymbol{c}(t)$, dann kann die Ableitung einer skalaren Funktion $\mu(\boldsymbol{c}(t))$ längs der *Kurve* $\boldsymbol{c}(\cdot)$ definiert werden als

$$\boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{c}}}\mu := \lim_{h \to 0} \frac{\mu(\boldsymbol{c}(t+h)) - \mu(\boldsymbol{c}(t))}{h} = \boldsymbol{\nabla}\mu \cdot \boldsymbol{v} \tag{2.1}$$

Lie Ableitung

Auf einer C^k–*Mannigfaltigkeit* $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ existiert ohne zusätzliche Einschränkungen eine *Tangentialabbildung* $\boldsymbol{\Psi}'_{t,t+h}$ im folgenden Sinne:

Sei $\boldsymbol{\Psi}_{t,s}$ eine C^r–Abbildung in $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ $\boldsymbol{\Psi}_{t,s} : \boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{M}}$ in dem Sinne, daß für eine *Kurve* $\boldsymbol{c}(\cdot)$ in $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ gilt $\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{\Psi}_{t,s}(\boldsymbol{c}(s))$ mit $\boldsymbol{\Psi}_{t,r} \circ \boldsymbol{\Psi}_{r,s} = \boldsymbol{\Psi}_{t,s}$ und $\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{\Psi}_{t,t}(\boldsymbol{c}(t))$, so heißt $\boldsymbol{\Psi}_{t,s}$ ein *Fluß*. Die Abbildung $\boldsymbol{\Psi}'_{t,s}$ transportiert dann einen Vektor $\boldsymbol{w}_s \in T_{\boldsymbol{c}(s)}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ nach $\boldsymbol{w}_t \in T_{\boldsymbol{c}(t)}\boldsymbol{\mathcal{M}}$[5] $\boldsymbol{\Psi}'_{t,s} : T_{\boldsymbol{c}(s)}\boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto T_{\boldsymbol{c}(t)}\boldsymbol{\mathcal{M}}$.

Auf Grundlage dieser Abbildung kann die Ableitung eines Vektors längs der *Kurve* $\boldsymbol{c}(\cdot)$ definiert werden als

$$\mathcal{L}_{\dot{\boldsymbol{c}}}\boldsymbol{w} := \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{\Psi}'_{t,t+h}\boldsymbol{w}_{t+h} - \boldsymbol{w}_t}{h} = \left(\frac{d}{ds}\boldsymbol{\Psi}'_{t,s}\boldsymbol{w}_s \right)_{|s=t}$$

[4]verstanden im Sinne der *Frechet Ableitung* Definition 5.1.6
[5]vergleiche Satz 5.3.1

Wählt man $\boldsymbol{c}(t)$ zugehörig zu einen Vektor $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ergibt sich die *Lie Ableitung* von $\boldsymbol{w} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ in Richtung $\boldsymbol{v}$ folglich zu

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} := \left(\frac{d}{ds}\boldsymbol{\Psi}'_{t,s}\boldsymbol{w}_s\right)_{|s\,=\,t} \tag{2.2}$$

Wie aus einer kurzen Rechnung folgt, gilt:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} := \left(\frac{d}{ds}\boldsymbol{\Psi}'_{t,s}\boldsymbol{w}_s\right)_{|s\,=\,t} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\boldsymbol{w} =: [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] \tag{2.3}$$

Der Ausdruck $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] := \boldsymbol{w}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\boldsymbol{w}$ wird auch als *Lie Klammer* bezeichnet.

Mit $\mathcal{L}_{\dot{\boldsymbol{c}}}\dot{\boldsymbol{c}} \equiv \boldsymbol{0}$ besteht allerdings keine Möglichkeit ein Kriterium zur Auffindung einer *Kurve* zwischen zwei benachbarten Punkten mit minimale Länge zu finden.

Kovariante Ableitung

Eine weitere interessante Frage ist der „Paralleltransport" von Vektoren entlang von *Kurven*. Diese Problematik ist mit einer Abbildung genannt *Shifter* im folgenden Sinne verbunden:

Sei $\boldsymbol{c}(t)$ eine *Kurve* in $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ und $\boldsymbol{S}_{t,s} : T_{\boldsymbol{c}(s)}\boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto T_{\boldsymbol{c}(t)}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften $\boldsymbol{S}_{t,r} \circ \boldsymbol{S}_{r,s} = \boldsymbol{S}_{t,s}$, $\boldsymbol{S}^{-1}_{t,s} = \boldsymbol{S}_{s,t}$ und sei $\boldsymbol{S}_{t,t}$ die *identische Abbildung*. $\boldsymbol{S}_{t,s}$ heißt dann *Shifter* wenn er einen Vektor „parallel" längs $\boldsymbol{c}(\cdot)$ transportiert, d.h. wenn es eine Operation $\boldsymbol{\nabla}: T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \times T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ gibt mit $\boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{c}}}\boldsymbol{S}_{t,s}\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{0}\ \forall \boldsymbol{w}_s \in T_{\boldsymbol{c}(s)}\boldsymbol{\mathcal{M}}$.

Auf Grundlage dieser Abbildung kann die Ableitung eines Vektors längs der *Kurve* $\boldsymbol{c}(\cdot)$ definiert werden als

$$\boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{c}}}\boldsymbol{w} := \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{S}_{t,t+h}\boldsymbol{w}_{t+h} - \boldsymbol{w}_t}{h} = \left(\frac{d}{ds}\boldsymbol{S}_{t,s}\boldsymbol{w}_s\right)_{|s\,=\,t} .$$

Wählt man $\boldsymbol{c}(t)$ zugehörig zu einen Vektor $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ergibt sich die *Kovariante Ableitung* von $\boldsymbol{w} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ in Richtung $\boldsymbol{v}$ folglich zu

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} := \left(\frac{d}{ds}\boldsymbol{S}_{t,s}\boldsymbol{w}_s\right)_{|s\,=\,t} \tag{2.4}$$

Wie aus einer kurzen Rechnung folgt, gilt:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} := \left(\frac{d}{ds}\boldsymbol{S}_{t,s}\boldsymbol{w}_s\right)_{|s\,=\,t} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \tag{2.5}$$

mit $\boldsymbol{\Gamma} := \left(\boldsymbol{S}'_{t,s}\right)_{|s=t}$, bzw. mit $\boldsymbol{w} := \dot{\boldsymbol{c}}$

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{c}}}\dot{\boldsymbol{c}} = \ddot{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{\Gamma}(\dot{\boldsymbol{c}}, \dot{\boldsymbol{c}}) \tag{2.6}$$

womit eine Differentialgleichung zur Bestimmung der *Geodätischen* zur Verfügung steht, eine Analyse der Eigenschaften kann z.B. in [Lee97] gefunden werden.

Die in (2.4) definierte Operation $\boldsymbol{\nabla}: T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \times T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ wird als *affine Konnexion* bezeichnet. Wie aus (2.5) entnommen werden kann, besitzt sie die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_{\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} &= \lambda\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} + \mu\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{w}) &= \lambda\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\lambda\,\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\mu\,\boldsymbol{w} \end{aligned}$$

$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}};\ \lambda, \mu : \boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{R}})$. Eine *Mannigfaltigkeit* $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ausgestattet mit einer *affinen Konnexion* $\boldsymbol{\nabla}$ heißt *affine Mannigfaltigkeit* $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{\nabla})$.

Richtungsableitung eines inneren Produktes

Auf einer *affinen Riemann'schen Mannigfaltigkeit* $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\nabla})$ kann die *Richtungsableitung* von $\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ analog zu (2.1) zu

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \lim_{h\to 0}\frac{\langle\boldsymbol{u}_{t+h}, \boldsymbol{v}_{t+h}\rangle - \langle\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{v}_t\rangle}{h}$$

definiert werden. Analog zu (2.4) kann man unter Beachtung von Definition 5.1.6 schreiben

$$\boldsymbol{S}_{t,t+h}\boldsymbol{u}_{t+h} - \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{H}_{t,t+h}h + \boldsymbol{\varepsilon}(h)|h| \text{ mit } \boldsymbol{H}_{t,t+h} := \left(\frac{d}{ds}\boldsymbol{S}_{t,s}\boldsymbol{w}_s\right)_{|s=t+h}$$

folglich gilt

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}\rangle \tag{2.7}$$

Gilt (2.7), so heißt die *affine Konnexion* $\boldsymbol{\nabla}$ verträglich mit der *Metrik* $\boldsymbol{g}$.

Torsion

Unter Beachtung von 2.5 gilt auch

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{u}'\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}'\boldsymbol{w}\rangle + \langle\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}\rangle + \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\rangle$$

mit $\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\rangle = \langle\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle$ kann man auch schreiben

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{u}'\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}'\boldsymbol{w}\rangle + \langle\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle.$$

Nach Abänderung von $\boldsymbol{\Gamma}$ zu $\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{T}$ durch eine *Torsion* $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u})$ (ein Tensorfeld vom Typ $\binom{1}{2}$) bleibt folglich (2.7) erhalten.

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} - [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] \tag{2.8}$$

Die *Torsion* (2.8) einer *affinen Konnexion* $\boldsymbol{\nabla}$ ist auf *affinen Mannigfaltigkeiten* $(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{\nabla})$ unabhängig von der Gültigkeit von (2.5) durch (2.8) definiert.

Ist $\boldsymbol{T} \equiv \mathbf{0}$ und gilt (2.7), so heißt die *affine Konnexion* $\boldsymbol{\nabla}$ *Riemann'sche Konnexion*. In diesem Fall kann gezeigt werden [Lee97], daß die Lösung von Gleichung (2.6) zumindest für benachbarte Punkte die Kurve mit minimaler Länge zwischen zwei Punkten unabhängig von der Wahl der Anfangsbedingung für $\dot{\boldsymbol{c}}$ liefert. Für $\boldsymbol{T} \neq \mathbf{0}$ kann dies nicht abgesichert werden.

Krümmung

Die *Krümmung* einer *affinen Mannigfaltigkeit* ist definiert als

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := [\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}]\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}\boldsymbol{w} \tag{2.9}$$

Ist das $\binom{1}{3}$ Tensorfeld $\boldsymbol{R} \equiv \mathbf{0}$, so heißt die *Mannigfaltigkeit flach*. Wenn $\boldsymbol{\nabla}$ eine *Riemann'sche Konnexion* ist, kann gezeigt werden [Lee97], daß eine n *dimensionale* C^k–*Mannigfaltigkeit* $\boldsymbol{\mathcal{M}} \subset \boldsymbol{R}^n$ lokal isometrisch zum $\boldsymbol{\mathcal{R}}^n$ ist, falls $\boldsymbol{R}$ verschwindet. Für jeden Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$ existiert dann folglich eine Umgebung $\boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{\mathcal{M}}$ mit einer *Karte* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\varphi})$ die C^k*–kompatibel* zu einem *Karthesischen Koordinatensystem* ist.

3 Die Kompatibilitätsbedingungen

3.1 Kontinuumsmechanische Interpretation

Die erstmalig von **Saint-Venant** für geometrisch lineare Probleme angegebenen *Kompatibilitätsbedingungen* geben in Form einer partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\boldsymbol{Inc}(\boldsymbol{C}^\flat) = \mathbf{0}$$

die Bedingungen an, denen ein $\binom{0}{2}$ symmetrischer, positiv definiter *Tensor*[6] $\boldsymbol{C}^\flat$ genügen muß, um ein Deformationstensor zu sein. In ihrer „mechanischen" Deutung sichert diese Bedingung, daß während einer *Deformation* (der *Bewegung* $\boldsymbol{\Phi}_t$) keine Überlappungen bzw. Lücken im Material des deformierten Körpers auftreten können.

Fußend auf dieser Interpretation wird gewöhnlich die *inkompatible Zwischenkonfiguration* $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ als spannungsfrei und durchsetzt von Materialdurchdringungen und Lücken verstanden. Bei diesen Eigenschaften kann im allgemeinen nicht gesichert werden, daß es sich bei $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ um eine C^k*–Mannigfaltigkeit* $(k > 0)$ handelt, so daß offen bleibt, wie hier eine mathematisch fundierte Kontinuumstheorie formuliert werden soll.

[6] und somit ein *Riemann'scher Metriktensor*

3.2 Geometrische Interpretation

In ihrer geometrischen Interpretation [MH83] besagen die *Kompatibilitätsbedingungen* $\boldsymbol{Inc}(\boldsymbol{C}^\flat)=\mathbf{0}$ nichts anderes als daß eine *affine Mannigfaltigkeit* $(\boldsymbol{\mathcal{B}},\boldsymbol{\nabla})$ ausgestattet mit der *Riemann'schen Metrik* $\boldsymbol{C}^\flat$ und einer *Riemann'schen Konnexion* $\boldsymbol{\nabla}$, die definitionsgemäß eindeutig durch $\boldsymbol{C}^\flat$ bestimmt und folglich *torsionsfrei* ist, *flach* ist. So ist $\boldsymbol{Inc}(\boldsymbol{C}^\flat)=\mathbf{0}$ äquivalent zu $\boldsymbol{R}=\mathbf{0}$ aus Gleichung (2.9) und für eine *Bewegung* $\boldsymbol{\Phi}_t:\boldsymbol{\mathcal{B}}\mapsto\boldsymbol{\mathcal{R}}^n$ ergibt sich, daß $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ausgestattet mit der *Riemann'schen Metrik* $\boldsymbol{C}^\flat$ zumindest lokal *isometrisch* zum $\boldsymbol{\mathcal{R}}^n$ ist, d.h. $\boldsymbol{C}^\flat=\boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{g}$. Dies ist die bekannte Definition des *rechten Cauchy–Green Tensors* [MH83] [MM98], wobei $\boldsymbol{g}$ für die *Metrik* des *euklidischen* $\boldsymbol{\mathcal{R}}^n$ steht.

__**Definition 3.1.1**__:

Eine *affine Riemann'sche Mannigfaltigkeit* $(\boldsymbol{\mathcal{B}},\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{C}^\flat)$ heißt *kompatible Konfiguration* $[\boldsymbol{\mathcal{B}},\boldsymbol{C}^\flat]$ dann und nur dann, wenn

$$\begin{array}{lrcl}
\text{– } \boldsymbol{\nabla} \textit{ Riemann'sch} \text{ ist} & & & \\
\quad\text{d.h. kompatibel zu } \boldsymbol{C}^\flat & \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle & = & \langle\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle+\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}\rangle;\ \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle:=\boldsymbol{C}^\flat(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \\
\quad\text{und } \textit{torsionfrei} & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) & := & \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}-[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]\equiv\mathbf{0} \\
\text{– und } \textit{flach} & \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) & := & [\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}]\boldsymbol{w}-\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}\boldsymbol{w}\equiv\mathbf{0}\text{ ist}
\end{array} \tag{3.1}$$

$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in T_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\mathcal{B}},\ \forall\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{\mathcal{B}})$.

Auf Grundlage von Definition 3.1.1 ist es naheliegend im Gegensatz zur *klassischen Interpretation* von Kapitel 3.1 zu definieren:

__**Definition 3.1.2**__:

Eine *affine Riemann'sche Mannigfaltigkeit* $(\boldsymbol{\mathcal{I}},\boldsymbol{\nabla},\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{C}}{}^\flat)$ heißt *inkompatible Konfiguration* $[\boldsymbol{\mathcal{I}},\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{C}}{}^\flat,\boldsymbol{\mathcal{G}}^\flat,\boldsymbol{T}]$ dann und nur dann, wenn

$$\begin{array}{lrcl}
\text{– } \boldsymbol{\nabla} \text{ nicht } \textit{Riemann'sch} \text{ ist} & & & \\
\quad\text{d.h. kompatibel zu } \boldsymbol{\mathcal{G}}^\flat & \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle & = & \langle\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle+\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}\rangle;\ \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle:=\boldsymbol{\mathcal{G}}^\flat(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \\
\quad\text{oder nicht } \textit{torsionfrei} & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) & := & \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}-[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]\neq\mathbf{0} \\
\text{– oder nicht } \textit{flach} & \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) & := & [\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}]\boldsymbol{w}-\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}\boldsymbol{w}\neq\mathbf{0}\text{ ist}
\end{array} \tag{3.2}$$

$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in T_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\mathcal{I}},\ \forall\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{\mathcal{I}})$, wobei $\boldsymbol{\mathcal{G}}^\flat\neq\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{C}}{}^\flat$ ein $\binom{0}{2}$ symmetrischer, positive definiter *Tensor* ist.

4 Geometrische Eigenschaften inkompatibler Konfigurationen

Als zentrales Problem steht die Frage welche geometrische Eigenschaften einer inkompatiblen Konfiguration billigerweise zukommen können.

Aus dem in Kapitel 3.1 skizzierten Verständnis der *Zwischenkonfiguration*, und das ist die einzige inkompatible Konfiguration deren geometrische Eigenschaften hier von Interesse sind, entsteht selbige durch eine „elastische“ *Rücktransformation* $\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{\Phi}}{}^*$ aus der *Momentankonfiguration*, die verbunden ist mit einem lokalen „Auftrennen“ gewisser Bereiche, um die Spannungsfreiheit in dieser *Konfiguration* gewährleisten zu können. Eine solche Modellvorstellung ist unmittelbar damit verbunden, daß der innere *Zusammenhang*[7] und somit jegliche Grundlage Ableitungen, die in der gesamten *Konfiguration* existieren, zu bilden verloren geht. Die *Zwischenkonfiguration* wäre also bestenfalls als C^0– bzw. *topologische Mannigfaltigkeit* zu charakterisieren.

Es erhebt sich folglich die Frage, ob weniger einschneidende Annahmen zu einem Modell führen, das reich genug ist, um das Phänomen der plastischen Deformation geometrisch zu interpretieren und trotzdem noch möglichst viel von dem Kalkül, der auf *kompatiblen Konfigurationen* gültig ist, beibehalten zu können. Der einfachste denkbare alternative Zugang ist das in Definition 3.1.2 vorgeschlagene Verständnis des Begriffes *Inkompatibilität*, zumindest ist eine solche *Konfiguration* $[\boldsymbol{\mathcal{I}}, \overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{C}}{}^\flat, \boldsymbol{\mathcal{G}}^\flat, \boldsymbol{T}]$ im Sinne von Definition 3.1.1 nicht *kompatibel*.

Auf Grund der Antisymmetrie von $\boldsymbol{T}$ kann der *Torsionstensor* unter Verwendung des kovarianten *Levi–Civita Pseudotensors*[8] vom Typ $\binom{0}{3}$ $\boldsymbol{\epsilon}^\flat$ und eines kontravarianten Tensors $\boldsymbol{\mathcal{W}}^\sharp$ vom Typ $\binom{2}{0}$ dargestellt werden als $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\epsilon}^\flat : \boldsymbol{\mathcal{W}}^\sharp$. Ist die *Zwischenkonfiguration orientierbar*, so ist sie vollstängig charakterisiert als *inkompatible Konfiguration*

$$[\boldsymbol{\mathcal{I}}, \overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{C}}{}^\flat, \boldsymbol{\mathcal{G}}^\flat, \boldsymbol{\mathcal{W}}^\sharp].$$

Geht man davon aus, daß die Prinzipien der *rationalen Thermodynamik* auch auf der *Zwischenkonfiguration* gültig sind und folgt man dem *Prinzip der Kovarianz* [MH83] [MM98], so ist die *spezifische freie Energie* Ψ anzusetzen als Funktion der Größen, die den Zustand der *Zwischenkonfiguration* beschreiben.

$$\Psi = \Psi(\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{C}}{}^\flat, \boldsymbol{\mathcal{G}}^\flat, \boldsymbol{\mathcal{W}}^\flat). \tag{4.3}$$

Für die Definition des zu $\boldsymbol{\mathcal{W}}^\sharp$ *assoziierten Tensors* $\boldsymbol{\mathcal{W}}^\flat$ sind die folgenden zwei Varianten gleichberechtigt:

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}^\flat := \overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{C}}{}^\flat \cdot \boldsymbol{\mathcal{W}}^\sharp \cdot \overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{C}}{}^\flat \text{ oder } \boldsymbol{\mathcal{W}}^\flat := \boldsymbol{\mathcal{G}}^\flat \cdot \boldsymbol{\mathcal{W}}^\sharp \cdot \boldsymbol{\mathcal{G}}^\flat.$$

Da der *multiplikative Split* (1.1) im Rahmen des vorgeschlagenen Modells ohne Einschränkungen möglich ist, können die korrespondierenden Größen für alle drei *Konfigurationen*

[7] siehe Definition 5.2.5
[8] vergleiche Kapitel 5.4

$\mathcal{B}$, $\boldsymbol{\Phi}_t(\mathcal{B})$, $\mathcal{I} = \overset{\mathrm{p}}{\boldsymbol{\Phi}}_t(\mathcal{B}) = \overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{\Phi}}{}_t^{-1}(\boldsymbol{\Phi}_t(\mathcal{B}))$ durch Anwendung der Operationen *„pull back“* und *„push forward“* [MH83] gewonnen werden. Versteht man $\boldsymbol{\mathcal{G}}^\flat$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}}^\flat$ als *interne Variablen* im gleichen Sinne wie die *internen Variablen*, die erlauben das Phänomen der *Ver–* oder *Entfestigung* zu modellieren, so ergeben sich die letztlich gesuchten *Evolutionsgleichungen* unter Voraussetzung des *Drucker Postulates* der *maximalen Dissipation* [SH98] [MM98].

5 Anhang

Bedauerlicherweise konnte kein Buch gefunden werden, in dem die *Differentialgeometrie* auf *Mannigfaltigkeiten* in dem erforderlichen Umfang dargestellt wird. Aus diesem Grund sollen im Anhang einige zum Verständnis unbedingt benötigte Definitionen und Sätze angegeben werden. Eine etwas detailliertere Behandlung der einzelnen Aspekte kann z.B. in [Lee97][Sha97][Zei97] gefunden werden.

5.1 Banachräume

Definition 5.1.1: Eine Menge $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ heißt genau dann ein *linearer Raum* oder *Vektorraum* über $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, wenn beliebigen Elementen $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ und beliebigen Zahlen $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ neue Elemente „$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$“ und „$\alpha\boldsymbol{u}$“ eindeutig zugeordnet werden, so daß $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ und $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ gilt:

(A) *Eigenschaften der Addition*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} && \text{Kommutativität;} \\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) && \text{Assoziativität;} \end{aligned}$$

es existiert ein eindeutig bestimmtes Element $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ mit

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}+\mathbf{0}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \quad \text{Nullelement;}$$

es existiert ein eindeutig bestimmtes Element $-\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ mit

$$\boldsymbol{u}+-\boldsymbol{u} = \mathbf{0}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \quad \text{inverses Element;}$$

(B) *Eigenschaften der Multiplikation*

$$\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= \alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v} && \text{Distributivität} \\ (\alpha+\beta)\boldsymbol{u} &= \alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u} && \\ (\alpha\beta)\boldsymbol{u} &= \alpha(\beta\boldsymbol{u}) && \text{Assoziativität;} \\ 1\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} && \end{aligned}$$

Definition 5.1.2: Ein *linearer Raum* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ über $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ heißt genau dann ein *normierter Raum* über $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ wenn jedem $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ eine reelle Zahl $\|\boldsymbol{u}\| \geq 0$ zugeordnet ist, so daß $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ und $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ gilt:

$\|\boldsymbol{u}\| = 0$ genau dann, wenn $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

$\|\alpha\boldsymbol{u}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{u}\|$

$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$ (Dreiecksungleichung)

Jeder *normierte Raum* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ wird mit der Definition des Abstandes zweier Elemente von $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|, \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ zu einem *metrischen Raum*.

Definition 5.1.3: Eine Folge $\{\boldsymbol{u}_n\}$ in einem *metrischen Raum* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ $\boldsymbol{u}_n \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ heißt genau dann eine *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß

$$d(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_m) < \varepsilon;\ \forall n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Definition 5.1.4: Ein *metrischer Raum* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ heißt *vollständig*, wenn jede *Cauchyfolge* $\{\boldsymbol{u}_n\}$ eine in $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ konvergente Folge ist.

Definition 5.1.5: Ein *Banachraum* ist ein *normierter Raum* in dem jede *Cauchyfolge* konvergiert.

Satz 5.1.1: Jeder endlichdimensionale *normierte Raum* ist stets ein *Banachraum*.

Definition 5.1.6: Seien $\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ *Banachräume* und $\boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{u}_0) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}$ eine offene Umgebung von $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$, dann besitzt die Abbildung $\boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{u}_0) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ eine *Frechetableitung* $\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{u}_0)$ $\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{u}_0) : \boldsymbol{\mathcal{X}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ wenn gilt

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{u}_0) \circ \boldsymbol{h} + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|,$$

$\forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ mit $\|\boldsymbol{h}\| < r$ und $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{h}) \to \boldsymbol{0}$ in $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ für $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}$.

Definition 5.1.7: Seien $\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ *Banachräume* und $\boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{u}_0) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}$ eine offene Umgebung von $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$. Wenn die *Frechetableitung* $\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{u})$ existiert $\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{u}_0)$, dann existiert die *zweite Frechet–Ableitung* $\boldsymbol{\Psi}''(\boldsymbol{u}_0)$; $\boldsymbol{\Psi}''(\boldsymbol{u}_0) : \boldsymbol{\mathcal{X}} \times \boldsymbol{\mathcal{X}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ wenn gilt

$$\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{h}) \circ \boldsymbol{k} - \boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{u}_0) \circ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\Psi}''(\boldsymbol{u}_0) \circ (\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|\|\boldsymbol{k}\|,$$

$\forall \boldsymbol{h},\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ mit $\|\boldsymbol{h}\| < r$ und $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{h}) \to \boldsymbol{0}$ in $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ für $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}$.

Höhere *Frechetableitungen* $\boldsymbol{\Psi}^{(k)}(\boldsymbol{u}_0)$ werden analog definiert.

5.2 Banach Mannigfaltigkeiten

Definition 5.2.1: Sei $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ eine offene Menge und $\boldsymbol{\mathcal{U}} \subset \boldsymbol{\mathcal{M}}$ eine offene Teilmenge von $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Eine *Karte*[9] in $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ist ein Paar $(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\varphi})$, wobei $\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{\mathcal{U}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{\varphi}} \subset \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ eine *Bijektion* von $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ auf eine offene Teilmenge $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ eines *Banachraums* $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ ist.

$\boldsymbol{\varphi}$ heißt *Kartenabbildung*, $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ *Kartenraum* und $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ *Kartenbild*. Für $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ heißt $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\varphi}} := \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ *Darstellung* von $\boldsymbol{x}$ in der *Karte* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\varphi})$.

[9] genauer abstrakte Karte, vgl. [Zei97]

Definition 5.2.2: Zwei *Karten* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\varphi})$ und $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \boldsymbol{\psi})$ heißen C^k–*kompatibel* dann und nur dann, wenn $\boldsymbol{\mathcal{U}} \bigcap \boldsymbol{\mathcal{V}} = \boldsymbol{\emptyset}$ oder $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi}^{-1}$ und $\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ C^k sind.

Definition 5.2.3: Ein C^k–*Atlas* für $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ist eine Sammlung von *Karten* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_\alpha, \boldsymbol{\varphi}_\alpha)$ (α aus irgendeiner Indexmenge) mit folgenden Eigenschaften:

1. die $\boldsymbol{\mathcal{U}}_\alpha$ überdecken $\boldsymbol{\mathcal{M}}$
2. beliebige zwei *Karten* sind C^k–*kompatibel*
3. alle *Kartenräume* $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\boldsymbol{\varphi}_\alpha}$ sind *Banachräume*.

Definition 5.2.4: $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ heißt C^k–*Banach Mannigfaltigkeit* dann und nur dann, wenn für $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ein C^k–*Atlas* existiert. Wenn alle *Kartenräume* $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\boldsymbol{\varphi}_\alpha}$ die gleiche Dimension n haben heißt $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ n–*dimensionale* C^k–*Mannigfaltigkeit*.

Definition 5.2.5: Eine *Mannigfaltigkeit* heißt *zusammenhängend* wenn es *Karten* $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\varphi})$, $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\psi})$ in ihre *Atlas* gibt für die $\boldsymbol{\mathcal{U}} \bigcap \boldsymbol{\mathcal{V}} \neq \boldsymbol{\emptyset}$ ist.

Definition 5.2.6: Eine *Karte* in $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ die C^k–*kompatibel* zu allen *Karten* des *Atlanten* von $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ist heißt *zulässige Karte*.

Das Vorhandensein eines C^k–*Atlas* (genauer: *abstrakten* C^k–*Atlas* [Zei97]) für $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ impliziert in natürlicher Weise die Existenz einer *Topologie* für $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, so daß insbesondere der Begriff der C^k–*Kompatibilität* ursprünglich definiert für *topologische Räume* im vorliegenden Kontext auch in Form von Definition 5.2.2 sinnvoll ist.

Definition 5.2.7: Seien $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ C^k–*Banach Mannigfaltigkeiten*, dann heißt die Abbildung $\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{N}}$ $C^r (r \leq k)$ dann und nur dann, wenn $\boldsymbol{\Phi}$ in einer *zulässigen Karte* an jedem Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$ C^r ist.

$\boldsymbol{\Phi}$ heißt *Homömorphismus*[10] dann und nur dann, wenn $\boldsymbol{\Phi}$ *bijektiv* und sowohl $\boldsymbol{\Phi}$ als auch $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ C^0 sind.

Darüberhinaus heißt $\boldsymbol{\Phi}$ C^r–*Diffeomorphismus* dann und nur dann, wenn $\boldsymbol{\Phi}$ *bijektiv* und sowohl $\boldsymbol{\Phi}$ als auch $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ C^r sind.

Sei $(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\varphi})$ eine *Karte* auf $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ mit $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ und $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \boldsymbol{\psi})$ eine *Karte* auf $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ mit $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$, dann ist $\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$, $\hat{\boldsymbol{\Phi}} : \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\varphi}} \mapsto \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\psi}}$ die *Darstellung* von $\boldsymbol{\Phi}$. $\boldsymbol{\Phi}$ heißt C^r, wenn $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ C^r ist.

n–*dimensionalen Mannigfaltigkeiten*[11], genauer *Mannigfaltigkeiten* mit *Kartenräumen*

[10] Zur Definition dieses Begriffes ist es hinreichend, daß $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ *topologische Räume* sind

[11] siehe Satz 5.1.1

$\mathcal{X}_{\varphi} \subset \boldsymbol{R}^n$ können darüberhinaus noch die Eigenschaft der *Orientierbarkeit* besitzen.

Definition 5.2.8: Eine *n–dimensionale zusammenhängende C^k Mannigfaltigkeit* $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ heißt *orientierbar*, wenn sie einen *Atlas* mit *Karten* $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\varphi}), (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\psi}), \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \bigcap \boldsymbol{V}$ besitzt, so daß die *Funktionaldeterminante* $\det((\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1})')$ $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$ gleiches Vorzeichen besitzt.

5.3 Tangentialräume

Definition 5.3.1: Eine *C^1–Kurve* $\boldsymbol{c}(t)$ in einer *C^k–Banach Mannigfaltigkeit* $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ durch $\boldsymbol{x}$ ist eine C^1–Abbildung $\boldsymbol{c}(\cdot) : \boldsymbol{\mathcal{U}}(t_0) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{M}}$ so das $\boldsymbol{c}(t_0) = \boldsymbol{x}$ für ein festes t_0.

Die *Darstellung* $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{c}(t)$ besitzt in der *Karte* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\varphi})$ die *Frechet–Ableitung*[12] $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}} := \boldsymbol{c}'_{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)$ genannt *Tangentialvektor* an $\boldsymbol{c}$ im Punkt $\boldsymbol{x}$.

Definition 5.3.2: Sei $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ eine *C^k–Banach Mannigfaltigkeit* $(k \geq 1)$ und $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$. Zwei *$C^1$–Kurven* in $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ die durch den Punkt $\boldsymbol{x}$ gehen heißen *äquivalent* im Punkt $\boldsymbol{x}$ dann und nur dann, wenn sie in einer beliebigen *zulässigen Karte* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\varphi})$ den gleichen *Tangentialvektor* $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}$ im Punkt $\boldsymbol{x}$ haben.

Ein *Tangentialvektor* $\boldsymbol{v}$ an $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ in $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$ besteht aus allen *C^1–Kurven* die im Punkt $\boldsymbol{x}$ *äquivalent* zu einer festen *C^1–Kurve* sind.

Definition 5.3.3: Sei $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ eine *C^k–Banach Mannigfaltigkeit*. Der *Tangentialraum* $T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ an $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ im Punkt $\boldsymbol{x}$ ist die Menge aller *Tangentialvektoren* im Punkt $\boldsymbol{x}$.

$T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ist ein linearer Raum, der als lineare Approximation von $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ in einer Umgebung von $\boldsymbol{x}$ interpretiert werden kann.

Definition 5.3.4: Der zu $T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ *duale Raum* $T^*_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ist die Menge aller linearen stetigen Funktionale $\boldsymbol{\alpha} : T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{R}}$ und wird als *Kotangentialraum* bezeichnet. Ein Element $\boldsymbol{\alpha} \in T^*_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ heißt *Kotangentialvektor* oder einfacher *Kovektor*.

Wählt man eine *C^s–Kurve* $\boldsymbol{c}(t) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}\, \forall t$ so, daß sie durch den Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$ geht $\boldsymbol{c}(t_0) = \boldsymbol{x}$ und ihr *Tangentenvektor* gleich dem Vektor $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ist $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}'$, dann erzeugt die Abbildung $\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{N}}$ eine *C^s–Kurve* $\hat{\boldsymbol{c}}(t) = \boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{c}(t)$ in $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ mit dem *Tangentialvektor* $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{c}(t))' \in T_{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{\mathcal{N}}$ mit der *Darstellung* $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\psi}} = (\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\varphi(\boldsymbol{c}(t))))' = \hat{\boldsymbol{\Phi}}'\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}$. Folglich gilt der Satz

Satz 5.3.1: Sei die Abbildung $\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{N}}$ C^r und $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ *C^k–Banach Mannigfaltigkeiten* $(k \geq r \geq 1)$, dann existiert eine lineare stetige Abbildung $\boldsymbol{\Phi}_* : T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto T_{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{\mathcal{N}}$.

[12] siehe Definition 5.1.6

Die Abbildung $\boldsymbol{\Phi}_*: T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{M}} \mapsto T_{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{\mathcal{N}}$ wird *Tangentialabbildung* genannt. In einer *zulässigen lokalen Karte* ist $\boldsymbol{\Phi}_*$ die *Frechet–Ableitung* $\boldsymbol{\Phi}'$ der Abbildung $\boldsymbol{\Phi}$.

5.4 Pseudotensoren

Pseudotensorfelder zeigen bis auf den Faktor $\operatorname{sgn}(\det((\boldsymbol{\psi}\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1})'))$ das gleiche Transformationsverhalten wie Tensorfelder. Ist $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ *orientierbar* und enthält der Atlas von $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ nur *Rechtssysteme*, d.h. es gilt für alle *zulässigen Karten* $\det((\boldsymbol{\psi}\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1})') > 0$[13] besteht kein Unterschied.

Literatur

[Bi60] B.A. Bilby: *Continuous distributions of dislocations*,
I.N. Sneddon, R. Hill (Eds.), Progress in Solid Mechanics, Vol. I, Amsterdam 1960, 331–398.

[Ko55a] K. Kondo: *Geometry of Elastic Deformation and Incompatibility*,
Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry, 1955, Volume 1, Division C, 5–17.

[Ko55b] K. Kondo: *Non–Riemannian Geometry of Imperfect Crystals from a Macroscopic Viewpoint*,
Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry, 1955, Volume 1, Division D, 6–17.

[Kr70] E. Kröner: *Plastizität und Versetzungen*,
A. Sommerfeld, E. Fues, E. Kröner (Eds.) Mechanik der deformierbaren Medien, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1970, 310–376.

[Lee97] J.M. Lee: *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*,
Springer–Verlag New York Inc., 1997.

[MH83] J.E. Marsden, T.J.R. Hughes: *Mathematical Foundations of Elasticity*,
Prentice–Hall International, Inc., London, 1983.

[MM98] D. Michael, M. Meisel: *Some remarks to large deformation elasto–plasticity (continuum formulation)*,
Preprint–Reihe des Chemnitzer SFB 393, SFB393/98–28, Chemnitz, September 1998.

[Mi99] D. Michael: *Notizen zu einer geometrisch motivierten Plastizitätstheorie*,
Preprint–Reihe des Chemnitzer SFB 393, SFB393/99–05, Chemnitz, Februar 1999.

[13] siehe Definition 5.2.8

[Sha97] R.W. Sharpe: *Differential Geometry, Cartans's Generalization of Klein's Erlangen Program*,
Springer–Verlag New York Inc., 1997.

[SH98] J.C. Simo, T.J.R. Hughes: *Computational Inelasticity*,
Springer–Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1998.

[Zei97] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, IV: Applications to Mathematical Physics*,
Springer–Verlag New York Inc., 1997.

Other titles in the SFB393 series:

98-01 B. Heinrich, S. Nicaise, B. Weber. Elliptic interface problems in axisymmetric domains. Part II: The Fourier-finite-element approximation of non-tensorial singularities. January 1998.

98-02 T. Vojta, R. A. Römer, M. Schreiber. Two interfacing particles in a random potential: The random model revisited. February 1998.

98-03 B. Mehlig, K. Müller. Non-universal properties of a complex quantum spectrum. February 1998.

98-04 B. Mehlig, K. Müller, B. Eckhardt. Phase-space localization and matrix element distributions in systems with mixed classical phase space. February 1998.

98-05 M. Bollhöfer, V. Mehrmann. Nested divide and conquer concepts for the solution of large sparse linear systems. March 1998.

98-06 T. Penzl. A cyclic low rank Smith method for large, sparse Lyapunov equations with applications in model reduction and optimal control. March 1998.

98-07 V. Mehrmann, H. Xu. Canonical forms for Hamiltonian and symplectic matrices and pencils. March 1998.

98-08 C. Mehl. Condensed forms for skew-Hamiltonian/Hamiltonian pencils. March 1998.

98-09 M. Meyer. Der objektorientierte hierarchische Netzgenerator Netgen69-C++. April 1998.

98-10 T. Ermer. Mappingstrategien für Kommunikatoren. April 1998.

98-11 D. Lohse. Ein Standard-File für 3D-Gebietsbeschreibungen. – Definition des Fileformats V 2.1 –. April 1998.

98-13 L. Grabowsky, T. Ermer. Objektorientierte Implementation eines PPCG-Verfahrens. April 1998.

98-14 M. Konik, R. Schneider. Object-oriented implementation of multiscale methods for boundary integral equations. May 1998.

98-15 W. Dahmen, R. Schneider. Wavelets with complementary boundary conditions - Function spaces on the cube. May 1998.

98-16 P. Hr. Petkov, M. M. Konstantinov, V. Mehrmann. DGRSVX and DMSRIC: Fortran 77 subroutines for solving continuous-time matrix algebraic Riccati equations with condition and accuracy estimates. May 1998.

98-17 D. Lohse. Ein Standard-File für 3D-Gebietsbeschreibungen. - Datenbasis und Programmschnittstelle `data_read`. April 1998.

98-18 A. Fachat, K. H. Hoffmann. Blocking vs. Non-blocking Communication under MPI on a Master-Worker Problem. June 1998.

98-19 W. Dahmen, R. Schneider, Y. Xu. Nonlinear Functionals of Wavelet Expansions - Adaptive Reconstruction and Fast Evaluation. June 1998.

98-20 M. Leadbeater, R. A. Römer, M. Schreiber. Interaction-dependent enhancement of the localisation length for two interacting particles in a one-dimensional random potential. June 1998.

98-21 M. Leadbeater, R. A. Römer, M. Schreiber. Formation of electron-hole pairs in a one-dimensional random environment. June 1998.

98-22 A. Eilmes, U. Grimm, R. A. Römer, M. Schreiber. Two interacting particles at the metal-insulator transition. August 1998.

98-23 M. Leadbeater, R. A. Römer, M. Schreiber. Scaling the localisation lengths for two interacting particles in one-dimensional random potentials. July 1998.

98-24 M. Schreiber, U. Grimm, R. A. Römer, J. X. Zhong. Application of random matrix theory to quasiperiodic systems. July 1998.

98-25 V. Mehrmann, H. Xu. Lagrangian invariant subspaces of Hamiltonian matrices. August 1998.

98-26 B. Nkemzi, B. Heinrich. Partial Fourier approximation of the Lamé equations in axisymmetric domains. September 1998.

98-27 V. Uski, B. Mehlig, R. A. Römer, M. Schreiber. Smoothed universal correlations in the two-dimensional Anderson model. September 1998.

98-28 D. Michael, M. Meisel. Some remarks to large deformation elasto-plasticity (continuum formulation). September 1998.

98-29 V. Mehrmann, H. Xu. Structured Jordan Canonical Forms for Structured Matrices that are Hermitian, skew Hermitian or unitary with respect to indefinite inner products. October 1998.

98-30 G. Globisch. The hierarchical preconditioning on locally refined unstructured grids. October 1998.

98-31 M. Bollhöfer. Algebraic domain decomposition. (PhD thesis) March 1998.

98-32 X. Guan, U. Grimm, R. A. Römer. Lax pair formulation for a small-polaron chain. (Proceedings PILS'98, in: Ann. Physik, Leipzig 1998). November 1998.

98-33 U. Grimm, R. A. Römer, G. Schliecker. Electronic states in topologically disordered systems. (Proceedings PILS'98, in: Ann. Physik, Leipzig 1998). November 1998.

98-34 C. Villagonzalo, R. A. Römer. Low temperature behavior of the thermopower in disordered systems near the Anderson transition. (Proceedings PILS'98, in: Ann. Physik, Leipzig 1998). November 1998.

98-35 V. Uski, B. Mehlig, R. A. Römer. A numerical study of wave-function and matrix-element statistics in the Anderson model of localization. (Proceedings of PILS'98, in: Ann. Physik, Leipzig 1998) November 1998.

98-36 F. Milde, R. A. Römer. Energy level statistics at the metal-insulator transition in the Anderson model of localization with anisotropic hopping. (Proceedings of PILS'98, in: Ann. Physik, Leipzig 1998). November 1998.

98-37 M. Schreiber, U. Grimm, R. A. Römer, J. X. Zhong. Energy Levels of Quasiperiodic Hamiltonians, Spectral Unfolding and Random Matrix Theory. November 1998.

99-01 P. Kunkel, V. Mehrmann, W. Rath. Analysis and numerical solution of control problems in descriptor form. January 1999.

99-02 A. Meyer. Hierarchical preconditioners for higher order elements and applications in computational mechanics. January 1999.

99-03 T. Apel. Anisotropic finite elements: local estimates and applications (Habilitationsschrift). January 1999.

99-04 C. Villagonzalo, R. A. Römer, M. Schreiber. Thermoelectric transport properties in disordered systems near the Anderson transition. February 1999.

99-05 D. Michael. Notizen zu einer geometrisch motivierten Plastizitätstheorie. Februar 1999.

The complete list of current and former preprints is available via
`http://www.tu-chemnitz.de/sfb393/preprints.html`.