Technische Universität Chemnitz-Zwickau

Sonderforschungsbereich 393

Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern

Matthias Scherzer Arnd Meyer

Zur Berechnung von Spannungs- und Deformationsfeldern an Interface-Ecken im nichtlinearen Deformationsbereich auf Parallelrechnern

Preprint SFB393/96-03

Fakultät für Mathematik
TU Chemnitz-Zwickau
PSF 09107
D-09107 Chemnitz, FRG
(0371)-531-2657 (fax)

scherzer@imech.tu-chemnitz.de
(0371)-531-4617

arnd.meyer@mathematik.tu-chemnitz.de
(0371)-531-2659

Preprint-Reihe des Chemnitzer SFB 393

SFB393/96-03 **März 1996**

Zur Berechnung von Spannungs- und Deformationsfeldern an Interface-Ecken im nichtlinearen Deformationsbereich auf Parallelrechnern

Matthias Scherzer   Arnd Meyer

14. März 1996

Abstract

Using material models on the basis of the flow theory of plasticity the asymptotic behaviour of solid mechanics solutions in crack tips, interface corners etc. strongly depends on the local realized load trajectory. For incrementally proportional load paths the equations determining the asymptotic fields are very simple ones. The paper considers two-dimensional statements in the neighbourhood of an interface corner consisting of two material ranges. At a distance from the corner the finite element nodes of a regular net are established in a polar co-ordinate system together with the displacement degrees of freedom. The main idea of the presented singular and non-singular stress and deformation field calculation at interface corners characterizes an replacement of the corner neighbourhood effect to the surrounding body by introducing stiffness actions which in usual manner can be assembled together with the other element stiffness matrices to the global stiffness matrix of the body. According to this there exists an interesting invariant stiffness independence in corner and crack neighbourhoods. The applied technique allows extensions to non-proportional local load increments simplifying the mathematical calculations for the presentation of stress and strain fields in this general case. All computations are made on modern parallel computers. Concrete examples show the advantages of the presented approach.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Festigkeitsuntersuchungen an Materialverbunden in mikroelektronischen Bauelementen und anderen Konstruktionselementen im Hochtechnologiebereich erfordern einerseits stabile und vergleichbare Lösungen von korrekt formulierten Randwertaufgaben der linearen und nichtlinearen Festkörpermechanik sowie andererseits entsprechende experimentelle Untersuchungen für die Bestimmung der aus den Festkörpermodellen folgenden kritischen Materialparameter.
Die Erstellung der notwendigen Festkörperlösungen gestaltet sich oft wegen des auftretenden singulär-oszillierenden Verhaltens in Interface-Ecken-Umgebungen als sehr kompliziert. Eine modellseitige Modifikation der „scharfen“ Ecke zur „abgerundeten“ Form mit dem Ziel, das Lösungsverhalten zu vereinfachen, führt nicht immer zum gewünschten Erfolg. Einerseits werden singuläre Lösungen in der Festkörpermechanik mit stückweise homogenem Materialverhalten im allgemeinen nicht auszuschließen sein. Ein abgerundeter Interface-Riß besitzt z.B. auch eine singuläre Asymptotik, nämlich die eines 90°-90°-Verbundes. Andererseits kann in Abhängigkeit des nach der Abrundung notwendigen Betrachtungsmaßstabes der relevante numerische und experimentelle Aufwand wegen zu berücksichtigender mikroskopischer Theorien und deren erforderlicher Kopplung an die Festkörpermechanik erheblich anwachsen. Für die Abschätzung des Bruchverhaltens ist in erster Näherung das Makroexperiment mit den dazugehörigen Festkörpermodellen entscheidend.
Gegenstand dieser Arbeit ist die Erstellung dieser stabilen, vergleichbaren Lösungen in Form von Eigenfunktionsentwicklungen der linearen und nichtlinearen Festkörpermechanik (Elastizitätstheorie, Deformationstheorie, Fließtheorie) für zweidimensionale isotrope geometrisch lineare Aufgabenstellungen in Interface-Eckenumgebungen.
Bisherige Arbeiten dieser Problematik lassen sich einteilen in Artikel, die sich nur mit der Asymptotik befassen [1, 2, 3] (u.a.), in solche, die nur numerische Verfahren (Finite Elemente, Randintegralmethoden u.a.) [4, 5, 6] (u.a.) ohne Berücksichtigung des speziellen asymptotischen Verhaltens verwenden und in Beiträge, die versuchen, in die numerischen Verfahren das asymptotische Verhalten qualitativ mit einzubauen oder mit Hilfe der Numerik das Verhalten an eine vorgegebene Asymptotik anzupassen [7, 8, 9, 10] (u.a.).
In der vorliegenden Arbeit wird für die betrachteten Aufgabenklassen die asymptotische Analyse in allgemeiner Form bezüglich beliebiger Interface-Ecken-Konfigurationen so erstellt, daß sie in beliebigem Abstand ξ_0 an gewöhnliche Finite-Elemente-Verfahren (oder auch andere Methoden) ankoppelbar ist. Dabei wird die Wirkung der Eckenumgebung auf den Restkörper durch Steifigkeitswirkungen, die in üblicher Weise mit den anderen Steifigkeitsmatrizen des betrachteten Festkörpers assembliert werden können, ersetzt.
Die asymptotischen Gleichungen lassen sich so präsentieren, daß die logischen Erweiterungen von isotroper Elastizität über die isotrope Deformationstheorie zur Fließtheorie mit isotroper Verfestigung deutlich sichtbar werden. Ausdruck dafür sind die in der asymptotischen Analyse jeweils notwendigen Materialparameter, die sich auf das entsprechende Verhältnis von Kompressions- und Schubmodul (κ) beschränken. Für die Eigenfunktionen bedeutet dies, daß sie von drei Materialparame-

tern abhängen: den beiden materialbereichsbezogenen $\kappa-$s' und dem Verhältnis der Schubmoduli der Materialbereiche, welches durch die Spannungsrandbedingungen am Interface hinzukommt.
Die Trajektorienabhängigkeit der Fließtheorie läßt sich innerhalb inkrementell proportionaler Belastungspfade abhandeln, wobei die hier verwendete Methodik die Einbeziehung einer beliebigen Lasttrajektorie zuläßt.
Aus der asymptotischen Analyse ergeben sich interessante Invarianzeigenschaften sowohl für die erwähnten Steifigkeitswirkungen, die nicht vom Abstand ξ_0 abhängig sind, als auch für die ξ_0-Relationen der Spannungen und Verschiebungen. Diese Tatsachen sind einerseits in allgemeiner Form herleitbar, unabhängig davon, welche konkreten Wurzeln der Lösbarkeitsbedingung (reell oder konjugiert komplex) und Eigenfunktionen das Verhalten der Interface-Ecke charakterisieren, und andererseits beachtenswert für Festigkeitsuntersuchungen innerhalb der Festkörpermechanik.
Im Rahmen eines eigenentwickelten Finite-Element-Programms auf massiv parallelen Computern wurden die theoretischen Ergebnisse dieser Arbeit in anwendungsbereite Software umgesetzt. Als Parallelisierungszugang fand die von der Chemnitzer Forschergruppe „SPC" entwickelte Methode der Gebietszerlegung Anwendung. Die asymptotischen Eigenfunktionsentwicklungen mit den berechneten Steifigkeitswirkungen fügen sich sehr gut in dieses Parallelisierungskonzept ein und erweisen sich durch die Herabsetzung der Kondition der globalen Steifigkeitsmatrix auch als sehr effektiv im Hinblick auf die verwendete CG-Lösungstechnik.
Am Beispiel einer Interface-Rißprobe werden die Vorzüge des vorgestellten Verfahrens im Vergleich mit herkömmlichen Finite-Elemente-Methoden dargestellt. Zum Abschluß sind Folgerungen der Bruchmechanik aus den entwickelten asymptotischen Methoden sowie weiterführende Aufgabenstellungen dargelegt.

2 Asymptotische Gleichungen

2.1 Asymptotische Gleichungen der Deformationstheorie

Betrachten wir als Ausgangsgleichungen die Verträglichkeitsgleichung sowie die Gleichgewichtsbeziehungen der ebenen Festkörpermechanik [11] in geometrisch linearer Aufgabenstellung. Alle Gleichungen beziehen sich auf ein Polarkoordinatensystem (r,θ), das die zu betrachtende Singularität im Koordinatenursprung $(r=0)$ hat.
- Verträglichkeitsgleichung:

$$L_{r\theta}(e) = \tfrac{1}{r}e_{rr,\theta\theta} - e_{rr,r} + re_{\theta\theta,rr} + 2e_{\theta\theta,r} - \tfrac{2}{r}e_{r\theta,\theta} - 2e_{r\theta,r\theta} = 0 \tag{1}$$

- Gleichgewichtsbeziehungen:

$$\sigma_{rr,r} + \tfrac{1}{r}\sigma_{r\theta,\theta} + \tfrac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \tag{2}$$

$$\sigma_{r\theta,r} + \tfrac{1}{r}\sigma_{\theta\theta,\theta} + \tfrac{2}{r}\sigma_{r\theta} = 0. \tag{3}$$

Hierbei sind e_{rr}, $e_{\theta\theta}$ und $e_{r\theta}$ die Komponenten des Deformationstensors. e_{zz} verschwindet im Falle des ebenen Verformungszustandes (EVZ) und ist für den ebenen

Spannungszustand (ESZ) aus der Bedingung $\sigma_{zz} = 0$ berechenbar (σ_{zz} ist die Normalspannungskomponente für die Koordinatenrichtung senkrecht zur r, θ-Ebene). Die Kommata in den Gleichungen (1) bis (3) stehen für partielle Ableitungen. In (2) und (3) bezeichnen σ_{rr} , ... die entsprechenden Spannungskomponenten in Polarkoordinaten. Für die konstitutiven Beziehungen im Rahmen der klassischen isotropen Deformationstheorie [11] soll gelten:

$$e_{ij} = \frac{\gamma(\tau)}{2\tau} S_{ij} + \frac{(1-2\nu)\sigma}{E}\delta_{ij}. \tag{4}$$

Hierbei sind S_{ij} die Komponenten des Spannungsdeviators ($S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$), E der Elastizitätsmodul, ν die Querkontraktionszahl und δ_{ij} das Kronecker-Symbol. Weiterhin wurden folgende Bezeichnungen eingeführt: $-\sigma = -\frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz}}{3}$ -hydrostatischer Druck, $\gamma = \sqrt{\frac{4}{3}\epsilon_{ij}\epsilon_{ij}}$ -Oktaederschub, $\tau = \sqrt{\frac{1}{3}S_{ij}S_{ij}}$-Oktaederspannung. In den letzten Formeln ist, wie auch in der gesamten Arbeit, falls nicht anders beschrieben, für sich wiederholende Indizes die Einsteinsche Summationskonvention verwendet. ϵ_{ij} $(= e_{ij} - \frac{e_{ii}}{3}\delta_{ij})$ steht für den Deformationsdeviator. Aus Gleichung (4) ist ersichtlich, daß γ und τ durch eine Materialfunktion $\gamma(\tau)$ miteinander verbunden sind. Für $\tau < \tau_t$ (τ_t-Fließgrenze) gilt die Beziehung $\frac{\gamma}{2\tau} = \frac{1}{2\mu} = \frac{1+\nu}{E}$, wobei μ der Schubelastizitätsmodul (Schubmodul) ist, und die Gleichung (4) in das isotrope Hookesche Gesetz übergeht. Der weitere Verlauf der Funktion $\gamma(\tau)$ für $\tau > \tau_t$ soll hier nicht weiter spezifiziert werden. Nach Einsetzen von (4) in (1) erhält man:

$$L_{r\theta}\left(\frac{\gamma(\tau)}{2\tau}S\right) + r\frac{(1-2\nu)}{E} \triangle \sigma = 0, \tag{5}$$

wobei $\triangle$ den Laplaceschen Operator bezeichnet. Für den EVZ folgt aus der Beziehung $e_{zz} = 0$:

$$\sigma = -\frac{E\gamma(\tau)}{(1-2\nu)2\tau}S_{zz} = \frac{E\gamma(\tau)}{(1-2\nu)2\tau}(S_{rr} + S_{\theta\theta}). \tag{6}$$

Nach Substitution von σ in (5) durch (6) und das Ersetzen der Spannungen in (2) und (3) durch die Deviatorspannungen (unter Nutzung der Beziehung (6)) ergibt sich ein System von drei partiellen Differentialgleichungen für die Unbekannten S_{rr}, $S_{\theta\theta}$ und $S_{r\theta}$. Die Gleichung (5) geht über in:

$$L_{r\theta}\left(\frac{\gamma(\tau)}{2\tau}S\right) + r \triangle \left(\frac{\gamma(\tau)}{2\tau}(S_{rr} + S_{\theta\theta})\right) = 0. \tag{7}$$

Dabei sind alle Glieder der Verträglichkeitsgleichung (7) gleichrangig bezüglich eines etwaigen asymptotischen Verhaltens in Singularitätsnähe zu bewerten. Das gleiche Resultat erhält man auch für den ESZ. Im Gegensatz zum EVZ existieren beim ESZ noch Verträglichkeitsgleichungen für e_{zz}:

$$e_{zz,rr} = 0, \qquad \frac{1}{r}e_{zz,\theta\theta} + e_{zz,r} = 0. \tag{8}$$

Als Folge von (8) und der Beziehung $e_{zz} = \frac{\gamma(\tau)}{2\tau}S_{zz} + \frac{(1-2\nu)}{E}\sigma = -\frac{\gamma(\tau)}{2\tau}\sigma + \frac{(1-2\nu)}{E}\sigma$ ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{(1-2\nu)}{E} \triangle \sigma = \triangle\left(\frac{\gamma(\tau)}{2\tau}\sigma\right) = \triangle\left(\frac{\gamma(\tau)}{2\tau}(S_{rr} + S_{\theta\theta})\right). \tag{9}$$

Somit folgt für den ESZ aus (5) unter Verwendung von (9) die gleiche Beziehung (7) wie für den EVZ. Die Gleichgewichtsbeziehungen hingegen, in denen jetzt nur Deviatoren stehen, unterscheiden sich vom EVZ. Zu bemerken ist, daß keine elastischen Anteile in der Verträglichkeitsgleichung (7) sowohl für den ESZ als auch für den EVZ vernachlässigt wurden. Die drei Gleichungen für die Spannungsdeviatoren sind Ausgangspunkt für die Untersuchungen des asymptotischen Verhaltens.
Nach Einführung neuer veränderlicher Größen

$$U_{rr} = \frac{\gamma(\tau)}{\tau} S_{rr}, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{\gamma(\tau)}{\tau} S_{\theta\theta}, \qquad U_{r\theta} = \frac{\gamma(\tau)}{\tau} S_{r\theta} \tag{10}$$

wird die Gleichung (7) (mit den höheren Ableitungen!) für die neuen Veränderlichen linear. Diese Gleichung hat bezüglich der Ableitungen nach r die Eulersche Form und kann durch eine entsprechende Substitution auf eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt werden. Für die anderen beiden Gleichungen müssen die Ableitungen der Deviatoren durch die Ableitungen der Funktionen U_{rr}, $U_{\theta\theta}$ und $U_{r\theta}$ ersetzt werden. Diese Beziehungen lassen sich in einfacher Weise aus den folgenden Gleichungssystemen ermitteln:

$$U_{rr,r} = S_{rr,r} \frac{\gamma(\tau)}{\tau} + \frac{1}{3}(\gamma' - \frac{\gamma(\tau)}{\tau}) \frac{U_{rr} U_{ij}}{\gamma(\tau)\gamma(\tau)} S_{ij,r} \tag{11}$$

$$U_{r\theta,r} = ..., \; U_{r\theta,\theta} = ..., \; U_{\theta\theta,\theta} = ..., \; \gamma(\tau) = \sqrt{\frac{1}{3} U_{ij} U_{ij}}. \tag{12}$$

Es folgt,
1. für den ESZ:

$$L_{r\theta}(U) + r \bigtriangleup (U_{rr} + U_{\theta\theta}) = 0, \qquad \frac{\tau}{\gamma(\tau)} L^{2ms}_{r\theta}(U) = 0, \qquad \frac{\tau}{\gamma(\tau)} L^{1ms}_{r\theta}(U) = 0 \tag{13}$$

$$e_{rr} = \frac{1}{2}(U_{rr} + \frac{(1-2\nu)2\tau}{E\gamma(\tau)}(U_{rr} + U_{\theta\theta})), \;\; e_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(U_{\theta\theta} + \frac{(1-2\nu)2\tau}{E\gamma(\tau)}(U_{rr} + U_{\theta\theta}))$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} U_{r\theta} \tag{14}$$

2. für den EVZ:

$$L_{r\theta}(U) + r \bigtriangleup (U_{rr} + U_{\theta\theta}) = 0, \;\; \frac{\tau}{\gamma(\tau)} L^{1mv}_{r\theta}(U) = -\frac{E}{2(1-2\nu)}(U_{rr} + U_{\theta\theta})_{,r} \tag{15}$$

$$\frac{\tau}{\gamma(\tau)} L^{2mv}_{r\theta}(U) = -\frac{E}{2(1-2\nu) r}(U_{rr} + U_{\theta\theta})_{,\theta} \tag{16}$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} U_{r\theta}, \qquad e_{rr} = U_{rr} + \frac{1}{2} U_{\theta\theta}, \qquad e_{\theta\theta} = U_{\theta\theta} + \frac{1}{2} U_{rr} \tag{17}$$

$$m = \frac{\gamma'(\tau)\tau}{\gamma(\tau)}. \tag{18}$$

In den obigen Gleichungen befinden sich zusätzlich zu den Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbeziehungen die Zusammenhänge zwischen den Deformationen und den neuen Variablen U_{rr}, $U_{\theta\theta}$ und $U_{r\theta}$. Die Differentialoperatoren $L^{1mv}_{r\theta}(U)$, $L^{2mv}_{r\theta}(U)$, $L^{1ms}_{r\theta}(U)$ und $L^{2ms}_{r\theta}(U)$ sind in den Ableitungen linear, die Koeffizienten stellen jedoch einfache rationale (keine Radikale und Wurzeln) nichtlineare Funktionen von U_{rr}, $U_{\theta\theta}$ und $U_{\theta r}$ dar, die bei Annahme gleichartiger Singularität für die einzelnen

Deviatorkomponenten im Grenzfall ($r \rightarrow 0$) endliche Werte ergeben. Somit haben die Operatoren $L_{r\theta}(U)$, $r \triangle (U_{rr} + U_{\theta\theta})$, $(U_{rr} + U_{\theta\theta})_{,r}$, $\frac{1}{r}(U_{rr} + U_{\theta\theta})_{,\theta}$, $L_{r\theta}^{1mv}(U)$, $L_{r\theta}^{2mv}(U)$, $L_{r\theta}^{1ms}(U)$ und $L_{r\theta}^{2ms}(U)$ in den Gleichungen (13), (15) und (16) bezüglich eines singulären Verhaltens für $r \rightarrow 0$ die gleiche Größenordnung. Die Funktion m (vgl. (18)) tritt in den Koeffizienten der mit m indizierten Differentialoperatoren auf [12]. Natürlich bedeutet in (18) $\gamma'(\tau)$ die Ableitung von γ nach τ.
Aus den Gleichungen (14) und (17) ist ersichtlich, daß die neu eingeführten U_{ij} anstelle von e_{ij} die Formänderung charakterisieren können. Im Grunde ist anhand von (13) bis (18) die Einführung des Spannungstensors nicht notwendig. Wegen $\gamma(\tau) = \gamma = \sqrt{\frac{1}{3}U_{ij}U_{ij}}$ kann anstatt $\gamma(\tau)$ die Umkehrfunktion $\tau(\gamma)$ für τ eingesetzt werden. Somit stehen in den obigen Gleichungen nur die „Deformationen“ U_{ij}. Zur Beschreibung des nichtlinearen isotropen Deformationsverhaltens sind somit im allgemeinen zwei Funktionen erforderlich:

$$\mathcal{K}_s(U_{ij}) = \frac{E\gamma(U_{ij})}{3(1-2\nu)\tau[\gamma(U_{ij})]} \text{ und } m(U_{ij}) = \frac{\tau[\gamma(U_{ij})]}{\tau'[\gamma(U_{ij})]\gamma(U_{ij})}$$
$$\text{(keine Summation über } i, j!).$$

$\mathcal{K}_s$ ist nichts anderes als das Verhältnis von Kompressionsmodul $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ und dem „nichtlinearen“ Schubmodul $\frac{\tau(\gamma)}{\gamma} = \frac{\tau}{\gamma(\tau)}$. K erklärt man üblicherweise auf der Grundlage entsprechender Experimente [13] zur Konstanten. Somit bleibt $\gamma(\tau)$ bei Kenntnis von K als einzige noch zu bestimmende Funktion übrig. $\gamma(\tau)$ wird gewöhnlich durch einen Versuch auf reinem Schub ermittelt. Natürlich verwendet man dabei immer die einfache **homogene** Lösung der Schubspannungen. Gleichzeitig stellt man fest, daß für den Bereich der Schubspannungen, die die Bruchschubspannung τ_b übersteigen, $\gamma(\tau)$ aus verständlichen Gründen nicht bestimmt werden kann. Andererseits ist diese Funktion jedoch zur Festigkeitsabschätzung an Rissen, Ecken, Interface-Ecken notwendig. An diesen kritischen Punkten enthalten die entsprechenden **nicht homogenen** Lösungen im allgemeinen singuläre Anteile, die τ_b immer übertreffen. Es ist klar, daß sowohl das konstitutive Verhalten als auch die bruchmechanischen Charakteristiken für diese komplizierten Spannungs- und Deformationszustände zukünftig nur im Rahmen inverser Aufgabenstellungen anhand von stabilen und vergleichbaren Lösungen [14] der entsprechenden Randwertaufgaben analysiert werden können. Die mögliche „Freizügigkeit“ bezüglich konstitutiver Gleichungen ist dabei optimal, entsprechend der geforderten allgemeinen Fragestellung auszunutzen. Hinsichtlich der hier innerhalb der asymptotischen Analyse zu verwendende Funktion $\gamma(\tau)$ ergeben sich in diesem Zusammenhang für $\tau \rightarrow \infty$ zwei zu betrachtende Möglichkeiten:

$$\lim_{\substack{r\rightarrow 0\\ \tau\rightarrow\infty}} \frac{\gamma(\tau)}{\tau} = \infty \qquad \text{(a)} \qquad \text{und} \qquad \lim_{\substack{r\rightarrow 0\\ \tau\rightarrow\infty}} \frac{\gamma(\tau)}{\tau} < \infty \qquad \text{(b).}$$

Gilt die Beziehung (a), läßt sich leicht $m > 1$ zeigen. Asymptotisch erhält man für $r \rightarrow 0$ aus den Gleichungen (15) und (16)

$$L_{r\theta}(U) = 0, \qquad U_{rr} + U_{\theta\theta} = \text{const.} \tag{19}$$

Das System (19) ist unterbestimmt. Zur Ermittlung von drei unbekannten Funktionen stehen nur zwei Gleichungen zur Verfügung. Andererseits kann für dieses „erste

Integral" leicht die Bedingung $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \text{const.}$ nachgewiesen werden. Die nun schon klassische HRR-Rißspitzenasymptotik [15], die auch im Fall (a) einzuordnen ist, erfüllt nach der in [15] angegebenen Lösung die letzte Bedingung nicht. Für den ESZ ergibt sich nach (13) sogar nur eine Gleichung ($L_{r\theta}(U) + r\triangle(U_{rr} + U_{\theta\theta}) = 0$) zur Bestimmung von drei Unbekannten. Die beiden letzten Gleichungen in (13) werden wegen der Ordnung der Differentialoperatoren und wegen

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \tau\to\infty}} \frac{\tau}{\gamma(\tau)} = 0$$

automatisch (im Vergleich zur ersten Gleichung in (13)) erfüllt. Die gemachten Schlußfolgerungen unterstreichen die zu erwartenden Schwierigkeiten bei der Ermittlung von asymptotischen Lösungen an singulären Punkten im Spezialfall (a). Befriedigt man z.B. die Gleichgewichtsbeziehungen mit dem Airyschen Spannungsfunktionsansatz $\Phi(r, \theta)$, so bemerkt man natürlich sowohl die eben beschriebenen Effekte als auch die Tatsache nicht, daß Terme unterschiedlicher Größenordnung in den Gleichgewichtsbeziehungen und nicht in der Verträglichkeitsgleichung auftreten. Als Folge erhält man aus (1) eine stark nichlineare Gleichung für $\Phi(r, \theta)$ deren komplizierte numerische Lösung (falls man sie angeben kann) im Grunde inkompressibles Materialverhalten wiedergibt. Diese asymptotische Inkompressibilität ist natürlich dann auch in der Lösung des „Restkörpers" (d.h. ohne singulären Punkt) durch numerische Komplikationen wiederzufinden. Andererseits besteht zur Abschätzung der Festigkeit in singulären Punkten nicht die Notwendigkeit, Materialkurven $\gamma(\tau)$, die der Bedingung (a) folgen, zu benutzen. Zur Charakterisierung kritischer Grenzzustände ist es viel wichtiger, vergleichbare und numerisch stabile Lösungen einzusetzen, die einerseits die konkrete „reale Physik" der Deformationen wiedergeben und im Anwedungsfall die genannten Grenzzustände identifizieren können.
Im mit (b) bezeichneten Fall ist leicht erkennbar, daß hierbei m zu Eins und die Differentialoperatoren in den Gleichungen (13), (15) und (16) durchweg linear werden. Damit vereinfacht sich natürlich die Erstellung von asymptotischen Lösungen sehr. Probleme der oben erwähnten Inkompressibilität treten hierbei nicht auf, was auch die Lösung insgesamt erleichtert.

2.2 Asymptotische Gleichungen der Fließtheorie mit isotroper Verfestigung

Die Grundannahmen und Beziehungen der Fließtheorie der Plastizität wurden schon oft publiziert. Im Rahmen dieser Arbeit gehen wir natürlich nicht auf die konkreten Details ein. Die hier verwandten Gleichungen sind ohne Kommentar aus der entsprechenden Literatur [11, 16] übernommen. Betrachten wir die Fließfunktion f in der Form:

$$f(\tau, \chi) = g(\tau) - \chi = 0, \qquad \chi = \int \sqrt{\tfrac{4}{3} d\epsilon_{ij}^{(pl)} d\epsilon_{ij}^{(pl)}}. \tag{20}$$

In (20) stellen g, χ und $d\epsilon_{ij}^{(pl)}$ eine Materialfunktion, den Odkvist-Parameter sowie die Inkremente (Differentiale, Geschwindigkeiten) des plastischen Deformationstensors, der ein Deviator ist ($d\epsilon_{ii}^{(pl)} = 0$), dar. Anhand der klassischen Hypothesen der

Fließtheorie erhält man im Falle der aktiven plastischen Belastung für die Deformationsinkremente de_{ij} [16]:

$$de_{ij} = \frac{1+\nu}{E} dS_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma\delta_{ij} + \frac{S_{ij}}{\tau}(\frac{\gamma'}{2} - \frac{1+\nu}{E})d\tau. \tag{21}$$

Es sei bemerkt, daß natürlich das in (21) vorkommende $\gamma = \gamma(\tau)$ mit dem in 2.1 definierten γ übereinstimmt. Die Gleichungen (21) sind im allgemeinen Fall nicht integrierbar, das heißt nicht auf eine konstitutive Beziehung zwischen den Deformationen e_{ij} und Spannungen σ_{ij} zurückführbar, und stark von der lokalen Be- und Entlastungstrajektorie, die nicht von den äußeren Randbedingungen steuerbar ist, abhängig. Zur Ermittlung praktikabler Gleichungen der asymptotischen Analyse ist es somit notwendig, geeignete Annahmen zum Verhalten der Komponenten $t_{ij} = \frac{S_{ij}}{\tau}$ zu finden. Der Tensor t_{ij} besitzt deshalb eine besondere Bedeutung, weil er (wie z.B. von Iljushin [17] in seiner allgemeinen mathematischen Theorie der Plastizität) zur Charakterisierung von lokalen Belastungstrajektorien herangezogen werden kann. So folgt zum Beispiel aus der Bedingung $t_{ij} = c_{ij}(r,\theta)$, wobei $c_{ij}(r,\theta)$ während des gesamten Belastungsprozesses konstante Werte annehemen und nur von den Koordinaten r und θ abhängen, die klassische Deformationstheorie (4) als Integral aus der Fließtheorie (21). Weiterhin ist zu bemerken, daß die Komponenten t_{ij} endliche Werte in singulären Punkten produzieren und somit auch an diesen kritischen Stellen zur Beschreibung der Belastungstrajektorien geeignet sind. Betrachten wir die folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} \frac{S_{ij}}{\tau} = C_{ij}(r,\theta),\ C_{ij}(r,\theta) &= \text{ constant für jedes Lastinkrement, oder} \\ dt_{ij} = d\frac{S_{ij}}{\tau} &= \frac{dS_{ij}}{\tau} - \frac{S_{ij}}{\tau^2} d\tau = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Die Komponenten $C_{ij}(r,\theta)$ können natürlich für verschiedene Lastinkremente unterschiedlich sein. Die Bedingung (22) bedeutet im Grunde nichts anderes als die Annahme der Existenz einer für jedes lokale Lastinkrement proportionale Trajektorie, die die Integration der konstitutiven Beziehungen innerhalb dieses Inkrementes erlaubt. Der Vorteil der Bedingung (22) besteht unter anderen darin, daß die Werte von $C_{ij}(r,\theta)$ nicht explizit benutzt werden und als Folge sehr einfache konstitutive Beziehungen für die Inkremente des Deformationstensors hergeleitet werden können:

$$de_{rr} = \gamma'(2dS_{rr} + dS_{\theta\theta}),\ de_{r\theta} = \frac{\gamma'}{2} dS_{r\theta},\ de_{\theta\theta} = \gamma'(2dS_{\theta\theta} + dS_{rr}). \tag{23}$$

Unter Beachtung von (23) erhält man die den Gleichungen (1) bis (3) analogen Beziehungen für die Spanungsdeviatorinkremente. Im ebenen Deformationszustand ergeben sich:

$$L_{r\theta}(\gamma'(\tau)dS) + r \bigtriangleup \{\gamma'(\tau)(dS_{rr} + dS_{\theta\theta})\} = 0 \tag{24}$$

$$dS_{rr,r} + \frac{1}{r} dS_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r}(dS_{rr} - dS_{\theta\theta}) = -\frac{E}{2(1-2\nu)}\{\gamma'(\tau)(dS_{rr} + dS_{\theta\theta})\}_{,r} \tag{25}$$

$$dS_{r\theta,r} + \frac{1}{r} dS_{\theta\theta,\theta} + \frac{2}{r} dS_{r\theta} = -\frac{E}{2(1-2\nu)r}\{\gamma'(\tau)(dS_{rr} + dS_{\theta\theta})\}_{,\theta}. \tag{26}$$

Entsprechend der Vorgehensweise im vorherigen Kapitel (Deformationstheorie) kann durch die Einführung der neuen Variablen

$$\widetilde{dU}_{rr} = \gamma'(\tau)dS_{rr},\ \widetilde{dU}_{\theta\theta} = \gamma'(\tau)dS_{\theta\theta},\ \widetilde{dU}_{r\theta} = \gamma'(\tau)dS_{r\theta}$$

das folgende System für die ersten Ableitungen der Spannungsdeviatorinkremente hergeleitet werden:

$$dS_{rr,r} = \frac{1}{\gamma'(\tau)}\{\widetilde{dU}_{rr,r} - \frac{\gamma''(\tau)}{3\gamma'(\tau)r}(1 + \frac{\tau\gamma''(\tau)}{\gamma'(\tau)})\frac{\widetilde{U}_{ij}}{\gamma}\frac{r\widetilde{U}_{ij,r}}{\gamma'}\widetilde{dU}_{rr}\}$$

$$dS_{\theta\theta,\theta} = ...,\ dS_{r\theta,r} = ...,\ dS_{r\theta,\theta} = ...,\ \widetilde{U}_{ij} = \gamma'(\tau)S_{ij}.$$

Bei Annahme von $\gamma''(\tau = \infty) = 0$ erhalten (24) bis (26) die Form:

$$L_{r\theta}(\widetilde{dU}) + r \bigtriangleup (\widetilde{dU}_{rr} + \widetilde{dU}_{\theta\theta}) = 0 \tag{27}$$

$$\frac{1}{\gamma'}\{\widetilde{dU}_{rr,r} + \frac{1}{r}\widetilde{dU}_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r}(\widetilde{dU}_{rr} - \widetilde{dU}_{\theta\theta})\} = -\frac{E}{2(1-2\nu)}(\widetilde{dU}_{rr} + \widetilde{dU}_{\theta\theta})_{,r} \tag{28}$$

$$\frac{1}{\gamma'}(\widetilde{dU}_{r\theta,r} + \frac{1}{r}\widetilde{dU}_{\theta\theta,\theta} + \frac{2}{r}\widetilde{dU}_{r\theta}) = -\frac{E}{2(1-2\nu)r}(\widetilde{dU}_{rr} + \widetilde{dU}_{\theta\theta})_{,\theta}. \tag{29}$$

Die Gleichungen (27) bis (29) stimmen mit (15) und (16) im Fall (b) ($m = 1$) überein, wenn $\frac{\gamma(\tau)}{\tau}$ durch γ' und U durch $\widetilde{dU}$ ersetzt werden. Zu bemerken ist, daß auch für inkrementell nichtproportionale Belastungsstufen, also für Inkremente, die (22) nicht erfüllen, die Gleichungen (27) bis (29) zur asymptotischen Analyse von Spannungs- und Deformationsfeldern an kritischen Punkten herangezogen werden können. Wie in [18] gezeigt wurde, führt die Ausschaltung der Bedingung (22) zur Frage nach der Zerlegbarkeit des in den Grundgleichungen der Inkremente für die Nichtproportionalität der lokalen Laststufe verantwortlichen Anteils in ein Eigenfunktionssystem der Gleichungen (27) bis (29) mit entsprechenden Rand- und Übergangsbedingungen. Weiterhin kann unter Nutzung eines für die Inkremente modifizierten Variationsprinzips von Washizu der hier gewählte Zugang der asymptotischen Analyse auf geometrisch nichtlineare Aufgabenstellungen erweitert werden [19]. Im folgenden beschränken wir uns jedoch auf den einfachen geometrisch linearen Spezialfall und ermitteln Eigenfunktionssysteme für die Gleichungen (27) bis (29) (oder (15) und (16)). Natürlich wird dabei immer der Materialfall (b) vorausgesetzt, womit $\lim_{\tau\to\infty}\gamma' < \infty$ gilt.

3 Asymptotische Analyse

3.1 Emittlung der nötigen Eigenfunktionen

Betrachten wir die Umgebung einer aus zwei Materialbereichen ($0 \leq \theta \leq \theta_o$ und $0 \geq \theta \geq -\theta_u$) bestehende Interface-Ecke in zweidimensionaler Aufgabenstellung (EVZ). Nach Einführung der dimensionslosen Radialkoordinate $\xi = \frac{r}{\ell}$ ($\ell-$ Normierungslänge) seien im Abstand $\xi = \xi_0$ die Knoten einer regulären Finite-Elemente-Vernetzung mit den Verschiebungsfreiheitsgraden $u_k(\xi_0, \theta_j)$ in Polarkoordinaten ξ und θ (siehe Bild 1!) angeordnet.

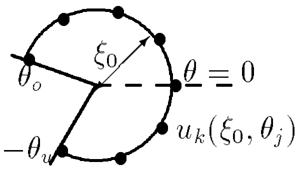

Bild 1: Die Umgebung der Interface-Ecke mit den Finite-Element-Knoten

Innerhalb des Gebietes $\xi \leq \xi_0$ erstellen wir die Lösung der Randwertaufgabe für die oben betrachtete Fließtheorie in Form einer Eigenfunktionsentwicklung. Folgende Randbedingungen seien für den gesamten Belastungsprozeß gegeben:

- Verschwinden der Normal- und Tangentialspannungen $(\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\xi\theta})$ für $\theta = \theta_o, -\theta_u$

$$\sigma_{\xi\theta}(\xi, -\theta_u) = \sigma_{\xi\theta}(\xi, \theta_o) = \sigma_{\theta\theta}(\xi, -\theta_u) = \sigma_{\theta\theta}(\xi, \theta_o) = 0$$

- Stetigkeit der Normal- und Tangentialspannungen sowie der Verschiebungen (u_ξ, u_θ) für $\theta = 0$

$$\sigma_{\xi\theta}(\xi, -0) = \sigma_{\xi\theta}(\xi, +0), \;\; \sigma_{\theta\theta}(\xi, -0) = \sigma_{\theta\theta}(\xi, +0),$$

$$u_\xi(\xi, -0) = u_\xi(\xi, +0), \;\; u_\theta(\xi, -0) = u_\theta(\xi, +0)$$

Wegen der im allgemeinen nicht integrierbaren Gleichungen der Fließtheorie können natürlich die Lösungen nur für die Inkremente angegeben werden. Für die auf ℓ bezogenenen Verschiebungsinkremente du_i sowie die im jeweiligen Materialbereich mit $\frac{1}{\gamma'}$ dimensionierten Spannungsinkremente $d\sigma_{ij}$ gelten dann die obigen Randbedingungen in analoger Weise:

$$d\sigma_{\xi\theta}(\xi, -\theta_u) = d\sigma_{\xi\theta}(\xi, \theta_o) = d\sigma_{\theta\theta}(\xi, -\theta_u) = d\sigma_{\theta\theta}(\xi, \theta_o) = 0 \tag{30}$$

$$\begin{aligned} d\sigma_{\xi\theta}(\xi, -0) &= \tfrac{\gamma'_{-0}(\tau)}{\gamma'_{+0}(\tau)} d\sigma_{\xi\theta}(\xi, +0), \\ d\sigma_{\theta\theta}(\xi, -0) &= \tfrac{\gamma'_{-0}(\tau)}{\gamma'_{+0}(\tau)} d\sigma_{\theta\theta}(\xi, +0) \\ du_\xi(\xi, -0) &= du_\xi(\xi, +0), \\ du_\theta(\xi, -0) &= du_\theta(\xi, +0). \end{aligned} \tag{31}$$

Die in (31) auftretenden Bezeichnungen $\gamma'_{-0}(\tau)$ und $\gamma'_{+0}(\tau)$ sind durch

$$\gamma'(\tau) = \begin{cases} \gamma'_{-0}(\tau) & : \;\; \theta < 0 \\ \gamma'_{+0}(\tau) & : \;\; \theta > 0 \end{cases}$$

erklärt. Die Gesamtspannungs- und Gesamtverschiebungsgrößen sind nichts anderes als die Summe der einzelnen Inkremente. In diesem Zusammenhang sei nochmals erwähnt, daß die für die Fließtheorie entwickelten asymptotischen Gleichungen für den gesamten Belastungsprozeß Gültigkeit besitzen. Die lokale Trajektorienabhängigkeit der Lösung ist innerhalb der Änderung der freien Konstanten der noch zu bestimmenden Eigenfunktionen abhandelbar [18]. Im Grunde werden auf jedem Belastungsschritt die Inkremente dieser Konstanten bestimmt und

dann entsprechend aufsummiert. Diese relativ einfache Prozedur der Addition ist nur möglich, weil die Eigenfunktionen selbst keine Änderung erfahren. Andererseits ist es durchaus vorstellbar, inkrementelle asymptotische Gleichungen direkt aus (21) und nicht aus (23) zu entwickeln. Diese wären natürlich sehr kompliziert und würden für jeden Lastschritt verschiedene Eigenfunktionssysteme ergeben. Ganz abgesehen von der Schwierigkeit der Erstellung dieser sich ändernden Systeme besteht dann noch die Notwendigkeit, auf jedem Belastungsschritt die inkrementell aufsummierte Lösung im neuen Basissystem darzustellen. Ansonsten ist eine Lösungsermittlung wegen der nicht vergleichbaren Basissysteme unmöglich. Ist im Verlaufe des Belastungsprozesses eine Geometrieänderung zu verzeichnen (wenn sich z.B. aus einer Interface-Ecke ein Interface-Riß entwickelt), dann sind solcherart Umrechnungen der Lösung in neue Eigenfunktionsysteme unumgänglich.
Im Falle von nur deformationsbedingten Änderungen hingegen, ist natürlich der hier anhand von (22) vorgeschlagene Zugang den sich ändernden Basen vorzuziehen. Mithin, es sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems (27) bis (29) mit den eben formulierten Randbedingungen zu ermitteln. Die allgemeine Lösung hat die Form:

$$\widetilde{dU_{\xi\xi}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} V_{i\xi\xi}(\xi)e^{\imath\lambda_i\theta},\ \widetilde{dU_{\xi\theta}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} V_{i\xi\theta}(\xi)e^{\imath\lambda_i\theta},\ \widetilde{dU_{\theta\theta}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} V_{i\theta\theta}(\xi)e^{\imath\lambda_i\theta}. \quad (32)$$

In (32) bezeichnen $\imath$ die imaginäre Einheit ($\imath^2 = -1$) und λ_i die noch nicht bekannten im allgemeinen komplexen Wurzeln der Lösbarkeitsbedingung (siehe weiter unten!) des Randwertproblems. Nach Einsetzen von (32) in (27) bis (29) erhält man als Folge der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $e^{\imath\lambda_i\theta}$ bei unterschiedlichem λ_i für jedes i ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen vom Eulerschen Typ bezüglich der unbekannten Funktionen $V_{i\xi\xi}(\xi)$, $V_{i\theta\theta}(\xi)$ und $V_{i\xi\theta}(\xi)$. Die allgemeinen Lösungen dieser Systeme ergeben sich zu:

$$V_{i\xi\xi}(\xi) = -C_i^1\wp_i\xi^{\lambda_i} - C_i^2\frac{\xi^{-\lambda_i}}{\wp_i} - C_i^3\xi^{(\lambda_i-2)} - C_i^4\xi^{(-\lambda_i-2)} \quad (33)$$

$$V_{i\theta\theta}(\xi) = C_i^1\xi^{\lambda_i} + C_i^2\xi^{-\lambda_i} + C_i^3\xi^{(\lambda_i-2)} + C_i^4\xi^{(-\lambda_i-2)} \quad (34)$$

$$V_{i\xi\theta}(\xi) = \imath(-C_i^1\iota_i\xi^{\lambda-i} + C_i^2\varpi_i\xi^{-\lambda_i} - C_i^3\xi^{(\lambda_i-2)} + C_i^4\xi^{(-\lambda_i-2)}). \quad (35)$$

In (33) bis (35) wurden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\wp_i = \frac{2(\lambda_i\kappa-1)+\lambda_i}{2(\lambda_i\kappa+1)+\lambda_i},\ \iota_i = \frac{\lambda_i(2\kappa+1)}{2(\lambda_i\kappa+1)+\lambda_i},\ \varpi_i = \frac{\lambda_i(2\kappa+1)}{2(\lambda_i\kappa-1)+\lambda_i}.$$

κ berechnet sich aus der Beziehung $\kappa = \frac{E\gamma'(\tau)}{2(1-2\nu)}$, wobei für den rein elastischen Fall $\gamma'(\tau)$ durch $\frac{1}{\mu}$ zu ersetzen ist. Im ESZ steht anstelle von κ in den obigen Relationen 1. κ erhält natürlich unterschiedliche Werte in den einzelnen Materialbereichen. Dies gilt auch für die noch unbestimmten und im allgemeinen komplexwertigen Konstanten C_i^1, C_i^2, C_i^3 und C_i^4. Somit werden die Grundgleichungen (27) bis (29) durch den Lösungsansatz (32) unter Berücksichtigung von (33) bis (35) erfüllt. Es sei nochmals erwähnt, daß zur Bestimmung dieser Lösung die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $e^{\imath\lambda_i\theta}$ genutzt wurde. Die Lösungsform (32) eignet sich gut für ringartige

Gebiete [20]. Zur Befriedigung der Randbedingungen (30) und (31) in diskreten Werten von θ ($\theta = \theta_o, 0, -\theta_u$) hingegen, ist (32) mit (33) bis (35) bezüglich linear unabhängiger Terme in ξ zur Keillösungsform [1, 20] „umzuordnen". Man hätte diese zwar auch gleich aus [20] niederschreiben können, dann wäre allerdings der wichtige Fakt der $\kappa-$Abhängigkeit der Lösung und die damit verbundenen Analogien zwischen Elastizität und Plastizität in den freien Konstanten „untergegangen". Andererseits müssen wegen der Stetigkeitsbedingungen in den Verschiebungen deren Inkremente du_ξ und du_θ durch Integration der Kompatibilitätsgleichungen

$$de_{\xi\xi} = du_{\xi,\xi},\ de_{\theta\theta} = \tfrac{du_{\theta,\theta}}{\xi} + \tfrac{du_\xi}{\xi},\ de_{\xi\theta} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{du_{\xi,\theta}}{\xi} - \tfrac{du_\theta}{\xi} + du_{\theta,\xi})$$

mit Hilfe von (23) ermittelt werden. Gleichzeitig sind die entsprechenden Beziehungen für die Spannungsinkremente $d\sigma_{ij}$ zu bestimmen. Man erhält auf diese Weise folgende Gleichungen (EVZ):

$$\begin{aligned} d\sigma_{\xi\xi}(\xi,\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{\lambda_i}[(\tfrac{4(\kappa+1)}{\lambda_i(2\kappa+1)+2} - 1)(a_i \sin(\lambda_i\theta) + b_i \cos(\lambda_i\theta)) \\ - c_i \sin((\lambda_i+2)\theta) - d_i \cos((\lambda_i+2)\theta)] \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} d\sigma_{\xi\theta}(\xi,\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{\lambda_i}[(\tfrac{2}{\lambda_i(2\kappa+1)+2} - 1)(a_i \cos(\lambda_i\theta) - b_i \sin(\lambda_i\theta)) \\ - c_i \cos((\lambda_i+2)\theta) + d_i \sin((\lambda_i+2)\theta)] \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} d\sigma_{\theta\theta}(\xi,\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{\lambda_i}[(\tfrac{4\kappa}{\lambda_i(2\kappa+1)+2} + 1)(a_i \sin(\lambda_i\theta) + b_i \cos(\lambda_i\theta)) \\ + c_i \sin((\lambda_i+2)\theta) + d_i \cos((\lambda_i+2)\theta)] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} du_\xi(\xi,\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{\lambda_i+1}[\tfrac{6-\lambda_i(2\kappa+1)}{2(\lambda_i(2\kappa+1)+2)(\lambda_i+1)}(a_i \sin(\lambda_i\theta) + b_i \cos(\lambda_i\theta)) \\ - \tfrac{1}{2(\lambda_i+1)}(c_i \sin((\lambda_i+2)\theta) + d_i \cos((\lambda_i+2)\theta))] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} du_\theta(\xi,\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{\lambda_i+1}[\tfrac{8+\lambda_i(2\kappa+1)+4\kappa}{2(\lambda_i(2\kappa+1)+2)(\lambda_i+1)}(-a_i \cos(\lambda_i\theta) + b_i \sin(\lambda_i\theta)) \\ - \tfrac{1}{2(\lambda_i+1)}(c_i \cos((\lambda_i+2)\theta) - d_i \sin((\lambda_i+2)\theta))]. \end{aligned} \quad (40)$$

Natürlich sind in den letzten Gleichungen die λ_i aus (32) umgruppiert, wobei die alte Bezeichnung für die neuen λ_i beibehalten wurde. Gleichzeitig wird vereinbart, daß für $i = 1, 2, ...$ die λ_i mit entsprechend steigendem Realteil angeordnet sind. Weiterhin kommen in (36) bis (40) neue im allgemeinen komplexe materialbereichsabhängige Konstanten

$$a_i, b_i, c_i, d_i = \left\{ \begin{array}{ccc} a_i^u, b_i^u, c_i^u, d_i^u & : & \theta < 0 \\ a_i^o, b_i^o, c_i^o, d_i^o & : & \theta > 0 \end{array} \right.$$

vor. Setzt man die Gleichungen (37) bis (40) in die Randbedingungen (30) und (31) ein, so entstehen wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen ξ^{λ_i} homogene lineare Gleichungssysteme für die Konstanten $a_i^u, b_i^u, c_i^u, d_i^u, a_i^o, b_i^o, c_i^o, d_i^o$:

$$A_{\lambda_i} X_i = 0 \quad \text{(keine Summation über } i!\text{)}. \tag{41}$$

In (41) steht X_i anstelle des Vektors $\{a_i^u, b_i^u, c_i^u, d_i^u, a_i^o, b_i^o, c_i^o, d_i^o\}$. Zur Lösbarkeit dieser Systeme muß die Determinante $\det A_{\lambda_i}$ der Koeffizientenmatrix A_{λ_i} verschwinden. Somit erhalten wir eine transzendente Lösbarkeitsbedingung zur Bestimmung der konkreten Werte λ_i in der Form:

$$\det A_{\lambda_i}(\lambda_i; \eta, \kappa^o, \kappa^u, \theta_o, \theta_u) = 0 \quad \text{(keine Summation über } i!\text{)} \tag{42}$$

mit $\eta = \frac{\gamma'_{-0}(\tau)}{\gamma'_{+0}(\tau)}$ und

$$\kappa = \begin{cases} \kappa^u & : \quad \theta < 0 \\ \kappa^o & : \quad \theta > 0. \end{cases}$$

Die Transzendenz von (42) kommt von den Kosinus- und Sinusfunktionen in (37) bis (40). Die Wurzeln λ_i sind entweder reell oder konjugiert komplex. Dies folgt aus der Reellwertigkeit der Koeffizienten in (42). Im Grunde ist die Funktion $\det A_{\lambda_i}(\lambda_i; \eta, \kappa^o, \kappa^u, \theta_o, \theta_u)$ bei fixierten $\eta, \kappa^o, \kappa^u, \theta_o$ und θ_u in der Umgebung eines beliebigen λ_i durch eine algebraische Gleichung n-ten Grades bezüglich λ_i mit reellen Koeffizienten approximierbar. Die Wurzeln dieses Polynoms sind entsprechend des Fundamentalsatzes der Algebra reell oder konjugiert komplex. Somit sind auch die Wurzeln von (42) reell oder konjugiert komplex.

Im allgemeinen erhält man aus (42) eine unendlich abzählbare diskrete Menge von Wurzeln λ_i. Aus energetischen Gründen sind alle λ_i, deren Realteile $-\frac{1}{2}$ unterschreiten, in der Lösung nicht benutzbar. Ansonsten müßten unendliche Verschiebungen oder unendliche Energieströme zugelassen werden. Die Bestimmung der einzelnen Wurzeln von (42) kann natürlich nur auf iterativ-numerischer Weise unter Nutzung des Newton-Verfahrens geschehen.

Ist die konkret berechnete Wurzel reell, dann erhält man durch Einsetzen in (41) den der Wurzel λ_i entsprechenden Eigenvektor X_i. Die Konstanten $a_i^u, b_i^u, c_i^u, d_i^u, a_i^o, b_i^o, c_i^o$ und d_i^o in (36) bis (40) sind reell und für jedes i bis auf einen reellen multiplikativen Faktor dC_i bestimmt. Auf diese Weise ergeben sich aus (36) bis (40) die gesuchten Eigenfunktionsentwicklungen im Falle reeller Wurzeln.

Ist hingegen λ_i komplex mit $\lambda_i = \alpha_i + \imath\beta_i$, dann existiert noch die Wurzel $\overline{\lambda_i} = \alpha_i - \imath\beta_i$ und zu jedem Eigenvektor X_i der entsprechend konjugiert komplexe $\overline{X_i}$. Zur Ermittlung der Eigenvektoren- und Funktionen sind in (36) bis (40) jeweils die entsprechenden Summanden für λ_i und $\overline{\lambda_i}$ so zu kombinieren, daß zwei reellwertige Funktionsterme mit insgesamt 16 freien reellen Konstanten entstehen. Die linearen Gleichungssysteme (41) erhalten hierbei die Dimension 16 und den Rang 14. Nach Ermittlung der entsprechenden Eigenvektoren erhält man für jedes Paar λ_i und $\overline{\lambda_i}$ zwei linear unabhängige Spannungseigenfunktionen in der Form

$$\begin{aligned} &\xi^{\alpha_i}[e^{\beta_i\theta}\{\cos(\beta_i \ln(\xi))) f_{1i}^{(\sigma)}(\theta) + \sin(\beta_i \ln(\xi))) f_{2i}^{(\sigma)}(\theta)\} \\ &+ e^{-\beta_i\theta}\{\cos(\beta_i \ln(\xi))) f_{3i}^{(\sigma)}(\theta) + \sin(\beta_i \ln(\xi))) f_{4i}^{(\sigma)}(\theta)\}] \\ &\qquad\qquad\qquad \text{(keine Summation über } i!\text{)} \end{aligned} \tag{43}$$

mit den Bezeichnungen

$$f_{ji}^{(\sigma)}(\theta) = a_{ji}\sin(\alpha_i\theta) + b_{ji}\cos(\alpha_i\theta)) + c_{ji}\sin((\alpha_i+2)\theta) + d_{ji}\cos((\alpha_i+2)\theta)). \qquad (44)$$

Die reellen Größen a_{ji}, b_{ji}, c_{ji} und d_{ji} sind durch die entsprechenden Eigenvektoren bestimmt. Für die analogen Verschiebungseigenfunktionen ergeben sich ähnliche Ausdrücke mit dem Unterschied, daß ξ^{α_i} durch ξ^{α_i+1} zu ersetzten sind. Die den Verschiebungen entsprechenden Konstanten a_{ji}, b_{ji}, c_{ji} und d_{ji} unterscheiden sich natürlich von denen der Spannungen. Auf der eben geschilderten Art und Weise ist es möglich, alle notwendigen Eigenfunktionen zur Approximation des Spannungs- und Deformationsfeldes im Gebiet $\xi \leq \xi_0$ zu bestimmen. Natürlich ist es sehr ratsam, zur Erstellung der allgemeinen Form der Eigenfunktionen moderne Computeralgebrasysteme [21] zu nutzen. Für die Bestimmung der Wurzeln λ_i und der entsprechenden Eigenvektoren empfiehlt es sich jedoch, effektive numerische Verfahren den symbolischen Methoden vorzuziehen. Damit gelingt es, sowohl die Vorteile der Numerik als auch der Computeralgebra effektiv auszunutzen.

3.2 Ersetzen der asymptotischen Lösung durch Steifigkeiten

Mit Hilfe der im vorigen Kapitel beschriebenen Eigenfunktionsentwicklungen können die Spannungs- und Deformationsfelder im Gebiet $\xi < \xi_0$ ermittelt werden, wenn die freien Konstanten C_i oder deren Inkremente dC_i bekannt sind. Zur Bestimmung dieser Größen ist natürlich die Lösung des Randwertproblems für den Gesamtkörper in Kopplung mit der asymptotischen Lösung nötig. Für den Restkörper $\xi > \xi_0$ werden im Rahmen dieser Arbeit gewöhnliche Finite-Elemente-Approximationen, deren Netze in der im Bild 1 angebenen Weise mit der Eckenumgebung verbunden sind, genutzt. Der Grundgedanke des hier gewählten Zuganges besteht nun in der Ersetzung der Wirkung der Interface-Eckenumgebung ($\xi < \xi_0$) auf den Restkörper durch Steifigkeiten auf dem Kreisbogen $\xi = \xi_0$, die in üblicher Weise mit den anderen Elementsteifigkeitsmatrizen des Restkörpers zur globalen Steifigkeitsmatrix assembliert werden können. Für $\xi < \xi_0$ gelten nach den obigen Eigenfunktionsentwicklungen:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{\infty} dC_i \mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi,\theta), \qquad d\boldsymbol{\sigma} = \{d\sigma_{\xi\xi}, d\sigma_{\xi\theta}\},$$
$$d\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{\infty} dC_i \mathbf{f}_i^{(u)}(\xi,\theta), \qquad d\boldsymbol{u} = \{du_\xi, du_\theta\}. \qquad (45)$$

Hierbei stellen $\mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi,\theta) = \{f_{i\xi\xi}^{(\sigma)}(\xi,\theta), f_{i\xi\theta}^{(\sigma)}(\xi,\theta)\}$ und $\mathbf{f}_i^{(u)}(\xi,\theta) = \{f_{i\xi}^{(u)}(\xi,\theta), f_{i\theta}^{(u)}(\xi,\theta)\}$ die entsprechenden Vektoren der im vorigen Kapitel erläuterten Spannungs- und Verschiebungseigenfunktionen (vergleiche Gleichungen (36) bis (40) sowie (43) und (44)!) dar. Die Konstanten dC_i sind aus $du_k(\xi_0,\theta_j)$ (siehe Bild 1!) durch Lösen von

$$du_k(\xi_0,\theta_j) = \sum_i dC_i f_{ik}^{(u)}(\xi_0,\theta_j), \quad (k = \xi,\theta; j = 1,2,...) \qquad (46)$$

ermittelbar und berechnen sich zu

$$dC_i = \sum_j b_{ij}(\xi_0, \theta_1, ...)dv_j(\xi_0), \ (i = 1, 2, ...) \tag{47}$$

mit

$$dv_1(\xi_0) = du_\xi(\xi_0, \theta_1), \ dv_2(\xi_0) = du_\theta(\xi_0, \theta_1), \ dv_3(\xi_0) = du_\xi(\xi_0, \theta_2), \ ...$$

Die Gleichungssysteme (46) und (47) sind praktisch nur für eine endliche Anzahl von Eigenfunktionen, die mit der Anzahl der Freiheitsgrade (dv_i) auf $\xi = \xi_0$ übereinstimmt, durch die entsprechende Inversion ineinander überführbar. Die Funktionsreihen aus (45) werden in (46) abgebrochen, so daß (46) und (47) jeweils als Näherungen, die natürlich mit steigender Eigenfunktionszahl wegen der Vollständigkeit des Funktionensystems [22] konvergieren, zu verstehen sind.
Zur Bestimmung der gesuchten Steifigkeiten ist es notwendig, die virtuelle Arbeit [23] δA der Spannungsinkremente auf den Verschiebungsinkrementen für $\xi = \xi_0$ bereitzustellen. Die letzte Behauptung folgt im Grunde aus der Anwendung allgemeiner Variationsprinzipien [19] auf den zweidimensionalen geometrisch linearen Fall. Das Zeichen δ bezeichnet im folgenden die Variation der entsprechenden Größen (Funktionen, Konstanten, Freiheitsgrade, ..). Somit ergibt sich für δA die Beziehung aus (45), (46) und (47):

$$\delta A = \xi_0 \int_{-\theta_u}^{\theta_o} d\boldsymbol{\sigma} \bullet \delta(d\boldsymbol{u})\, d\theta = \xi_0 \sum_{i,j} \int_{-\theta_u}^{\theta_o} \mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi_0, \theta) \bullet \mathbf{f}_j^{(u)}(\xi_0, \theta)\, d\theta dC_i \delta(dC_j)$$

$$\delta A = \sum_{k,l} \left[\xi_0 \sum_{i,j} b_{ik} b_{jl} \int_{-\theta_u}^{\theta_o} \mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi_0, \theta) \bullet \mathbf{f}_j^{(u)}(\xi_0, \theta)\, d\theta \right] dv_k(\xi_0)\delta(dv_l(\xi_0)). \tag{48}$$

In (48) steht das Zeichen "$\bullet$" für das Skalarprodukt der entsprechenden Vektoren. Das Element kl (k-te Spalte, l-te Zeile) der gesuchten Elementsteifigkeitsmatrix ist nichts anderes als der Faktor (große eckige Klammer) vor $dv_k(\xi_0)\delta(dv_l(\xi_0))$ in (48). Die Symmetrie dieser Steifigkeitsmatrix folgt aus der leicht nachweisbaren $(i, j)-$Symmetrie der Integrale in (48). Die Berechnung der Steifigkeiten nach (46), (47) und (48) führt zur Notwendigkeit der Ermittlung von n Eigenfunktionen falls n Freiheitsgrade auf $\xi = \xi_0$ existieren. Zur Vermeidung von numerischen Schwierigkeiten, die durch die Inversion von (46) bei hohen Freiheitsgradezahlen auftreten können, ist es deshalb günstig, die Eigenfunktionen zu orthogonalisieren.

3.3 Orthogonalisierung der Eigenfunktionen

Das in 3.1 erstellte System von Eigenfunktionen der Verschiebungs- und Spannungsinkremente $\mathbf{f}_i^{(u)}(\xi, \theta)$ und $\mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi, \theta)$ ist nichts anderes als eine vollständige Basis im Funktionsraum L_2 für die Lösungen elliptischer Randwertprobleme an Ecken und Materialübergangsecken [22, 24]. Die Vollständigkeit dieses Systems garantiert uns die Möglichkeit der Orthogonalisierung [25]. Entwickeln wir ein neues Funktionensystem $\widetilde{\mathbf{f}_i^{(u)}(\xi,\theta)}$ und $\widetilde{\mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi,\theta)}$ aus $\mathbf{f}_i^{(u)}(\xi,\theta)$ und $\mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi,\theta)$ mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens [26]. Dabei ist natürlich das Ausgangssystem, wie schon oben vereinbart, mit steigendem Realteil der λ_i angeordnet. Als Orthogonalitätsbedingung benutzen wir die Beziehung:

$$\int\limits_0^{\xi_0} \xi \left(\int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \widetilde{\mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi,\theta)} \bullet \widetilde{\mathbf{f}_j^{(u)}(\xi,\theta)}\, d\theta \right) d\xi = \xi_0^2 \delta_{ij}, \quad (\delta_{ij} - \text{Kroneckersymbol}). \tag{49}$$

Für das neue System gilt an der Stelle $\xi = \xi_0$:

$$\widetilde{\mathbf{f}_i^{(u)}(\xi_0,\theta)} = \sqrt{\xi_0}\widetilde{\mathbf{f}_{.i}^{(u)}(\theta)},\ \widetilde{\mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi_0,\theta)} = \frac{\widetilde{\mathbf{f}_{.i}^{(\sigma)}(\theta)}}{\sqrt{\xi_0}}. \tag{50}$$

Die Beziehungen (50) sind im Falle reeller λ_i leicht einzusehen, was im folgenden kurz angedeutet werden soll. Aus (36) bis (40) ist die allgemeine Form der Eigenfunktionen ersichtlich. Somit sind nach dem Schmidtschen Verfahren $\widetilde{\mathbf{f}_1^{(u)}(\xi,\theta)}$ und $\widetilde{\mathbf{f}_1^{(\sigma)}(\xi,\theta)}$ bestimmt durch

$$\widetilde{\mathbf{f}_1^{(u)}(\xi,\theta)} = \mathcal{F}_1 \xi^{(\lambda_1+1)} \mathbf{g}_1^{(u)}(\theta),\ \widetilde{\mathbf{f}_1^{(\sigma)}(\xi,\theta)} = \mathcal{F}_1 \xi^{\lambda_1} \mathbf{g}_1^{(\sigma)}(\theta) \tag{51}$$

mit der Unbekannten $\mathcal{F}_1$. Nach Einsetzen von (51) in (49) ergibt sich eine Gleichung bezüglich $\mathcal{F}_1$ mit der Lösung

$$\mathcal{F}_1 = \sqrt{\frac{1+2(\lambda_1+1)}{\mathcal{B}}}\,\xi_0^{(-\lambda_1-\frac{1}{2})}, \tag{52}$$

wobei die Konstante $\mathcal{B}$ von den Integralen über die Funktionen $\mathbf{g}_1^{(u)}(\theta)$ und $\mathbf{g}_1^{(\sigma)}(\theta)$ herrührt. Aus (52) und (51) folgt (50) für $i = 1$. Die übrigen Beziehungen in (50) ($i > 1$) ergeben sich aus dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren in analoger Weise. Zu benutzen dabei ist die Symmetriebedingung der Ausgangseigensysteme:

$$\int\limits_0^{\xi_0} \xi \left(\int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi,\theta) \bullet \mathbf{f}_j^{(u)}(\xi,\theta)\, d\theta \right) d\xi = \int\limits_0^{\xi_0} \xi \left(\int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \mathbf{f}_j^{(\sigma)}(\xi,\theta) \bullet \mathbf{f}_i^{(u)}(\xi,\theta)\, d\theta \right) d\xi. \tag{53}$$

(53) ist im Grunde der Satz von Betti [11] angewandt auf die Eigenfunktionen der Interface-Ecke. Für die gegebenen Übergangsbedingungen (31) erfüllen $\mathbf{f}_i^{(u)}(\xi,\theta)$ und $\mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi,\theta)$ (der entsprechenden linearisierten Randwertaufgaben) (53). Bei beliebig anders formulierten Bedingungen (31) muß dies jedoch nicht der Fall sein [27]. Dieser Umstand ist deshalb wichtig, weil sich mitunter die Feststellung der wirklichen Übergangsbedingungen an der Interface-Ecke im Rahmen der Kontinuumsmechanik als sehr kompliziert erweist. Es ist somit klar, daß solche Bedingungen, die dazu führen, daß (53) nicht erfüllt werden kann, vermieden werden sollten.

Für komplexe λ_i ist zum Beweis von (50) ein dem eben geschilderten analoges Vorgehen möglich. Ausgehend von (36) bis (40) orthogonalisiert man die Eigenfunktionen nach dem Schmidtschen Verfahren. Erhält natürlich dann komplexwertige

Funktionen $\mathbf{g}_i^{(u)}(\theta)$ und $\mathbf{g}_i^{(\sigma)}(\theta)$. Durch Kombination der entsprechenden Funktionen konjugiert komplexer Wurzeln (λ_i und $\overline{\lambda_i}$) verschwinden die imaginären Anteile automatisch. Die ξ_0- Abhängigkeit von $\widetilde{\mathbf{f}_i^{(u)}(\xi_0,\theta)}$ und $\widetilde{\mathbf{f}_i^{(\sigma)}(\xi_0,\theta)}$ folgt ohnehin auch hierbei aus den analogen Beziehungen zu (52) und (51). Andererseits ist es somit natürlich auch möglich von (43) und (44) auszugehen. Die Schmidtsche Orthogonalisierung führt zur Entfernung der Glieder $\cos(\beta_i \ln(\xi_0)))$ und $\sin(\beta_i \ln(\xi_0)))$, wenn die reellen Größen a_{ji}, b_{ji}, c_{ji} und d_{ji} (43) zu Eigenfunktionen machen. Durch Verwendung moderner Computeralgebrasysteme [21] läßt sich dies leicht nachprüfen.
Als Folge von (50) ergeben sich für die Verschiebungs- und Spannungsinkremente die Beziehungen:

$$d\mathbf{u}(\xi_0,\theta) = \sum_i d\widetilde{C_i}\sqrt{\xi_0}\widetilde{\mathbf{f}_{.i}^{(u)}(\theta)},\ \ d\boldsymbol{\sigma}(\xi_0,\theta) = \sum_i d\widetilde{C_i}\frac{\widetilde{\mathbf{f}_{.i}^{(\sigma)}(\theta)}}{\sqrt{\xi_0}}. \tag{54}$$

Die neueingeführten Größen $d\widetilde{C_i}$ hängen natürlich jetzt von ξ_0 als Parameter ab:

$$d\widetilde{C_i} = d\widetilde{C_i}(\xi_0).$$

Die Inkremente dC_i hingegen sind unabhängig von ξ_0. Im neuen Funktionensystem erhält (46) die Form

$$\frac{du_k(\xi_0,\theta_i)}{\sqrt{\xi_0}} = \sum_i d\widetilde{C_i(\xi_0)}\widetilde{f_{.ik}^{(u)}(\theta_j)}, \quad (k=\xi,\theta; i=1,2,...). \tag{55}$$

Löst man (55) bezüglich $d\widetilde{C_i(\xi_0)}$ auf, dann ergibt sich die Beziehung

$$d\widetilde{C_i(\xi_0)} = \sum_j \widetilde{b_{ij}}(\theta_1,\theta_2,...)\frac{dv_j(\xi_0)}{\sqrt{\xi_0}},\ \ (i=1,2,...). \tag{56}$$

In (56) ist die ξ_0- Unabhängigkeit der Komponenten $\widetilde{b_{ij}}(\theta_1,\theta_2,...)$ erwähnenswert. (56) ergibt zusammen mit (54) die virtuelle Arbeit δA mit der Gleichung

$$\delta A = \sum_{k,l}\left[\sum_{i,j}\widetilde{b_{ik}}\widetilde{b_{jl}}\int_{-\theta_u}^{\theta_o}\widetilde{\mathbf{f}_{.i}^{(\sigma)}(\theta)}\bullet\widetilde{\mathbf{f}_{.j}^{(u)}(\theta)}\,d\theta\right]dv_k(\xi_0)\delta(dv_l(\xi_0)). \tag{57}$$

Wegen der ξ_0- Unabhängigkeit von $\widetilde{b_{ij}}(\theta_1,\theta_2,...)$ sind auch die Steifigkeiten

$$q_{kl} = \sum_{i,j}\widetilde{b_{ik}}\widetilde{b_{jl}}\int_{-\theta_u}^{\theta_o}\widetilde{\mathbf{f}_{.i}^{(\sigma)}(\theta)}\bullet\widetilde{\mathbf{f}_{.j}^{(u)}(\theta)}\,d\theta \tag{58}$$

nicht von ξ_0 abhängig. Diese bemerkenswerte Eigenschaft besitzt nicht nur Bedeutung in Zusammenhang mit der asymptotischen Analyse an Interface-Ecken, sondern auch aus bruchmechanischer Sicht. In der Bruchmechanik fehlen heutzutage noch Größen, die etwa im Rahmen der Fließtheorie invariante Eigenschaften bezüglich des Verhaltens in der Nähe von kritischen Punkten aufweisen. Bei elastischen Annahmen ist zum Beispiel das wegunabhängige J-Integral, dessen Wert nicht von der Wahl der Integrationskontur abhängt, bekannt. Für die Fließtheorie wurde, wie

Bild 3: $\xi_0 = 0.75$

Bild 4: $\xi_0 = 0.075$

Bild 2: Vernetzung im Verfeinerungslevel 2 einer Zugprobe mit 2 Interfaces.

Bild 5: $\xi_0 = 0.0075$

Bild 6: $\xi_0 = 0.00075$

Bild 7: σ_{yy} für den Interface-Riß ohne Asymptotik

Bild 8: σ_{yy} für den fast „homogenen“ Riß ohne Asymptotik

Bild 9: σ_{yy} für den fast „homogenen“ Riß mit Asymptotik

Bild 10: σ_{yy} für den fast „homogenen“ Riß mit Asymptotik ohne Poissoneffektfolgen

Bild 12: σ_{xx} mit Asymptotik

Bild 13: σ_{xx} ohne Asymptotik

Bild 14: σ_{xy} mit Asymptotik

Bild 15: σ_{xy} ohne Asymptotik

Bild 16: Plastische Zone 1 mit Asymptotik

Bild 17: Plastische Zone 1 ohne Asymptotik

Bild 18: Plastische Zone 2 mit Asymptotik

Bild 19: Plastische Zone 2 ohne Asymptotik

Bild 21: $\tan(\alpha)$ mit Asymptotik

Bild 22: $\tan(\alpha)$ ohne Asymptotik

Bild 23: $\cos(3\omega)$ mit Asymptotik

Bild 24: $\cos(3\omega)$ ohne Asymptotik

oben schon erwähnt, in [18] gezeigt, daß die lokale Trajektorienabhängigkeit der Änderung der freien Eigenfunktionskonstanten zuschlagbar ist. Als einzige Invarianzeigenschaft kann man hierbei nur die eben gezeigte ξ_0- Unabhängigkeit der Steifigkeiten q_{kl}, also die Elementmatrix der Linie $\xi = \xi_0$, aufzeigen. Diese Elementmatrix ist nichts anderes als ein Teil des globalen Gleichungssystems zur Bestimmung der Verschiebungsinkremente und somit durch seine Invarianz zur Erstellung stabiler und vergleichbarer Lösungen an kritischen Punkten für die Festigkeitsanalyse nutzbar und, wie sich an konkreten Beispielen zeigen läßt, auch am besten dazu geeignet.
Zur effektiven Umsetzung in übliche Finite-Elemente-Programme empfiehlt es sich, $\widetilde{\mathbf{f}^{(\sigma)}_{.i}(\theta)}$ und $\widetilde{\mathbf{f}^{(u)}_{.i}(\theta)}$ durch das orthonormierte System $\mathbf{h}^{(\sigma)}_i(\theta)$ und $\mathbf{h}^{(u)}_i(\theta)$, für das

$$\int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \mathbf{h}^{(\sigma)}_i(\theta) \bullet \mathbf{h}^{(u)}_j(\theta)\, d\theta = \delta_{ij} \tag{59}$$

gilt, zu ersetzen. Natürlich sind $\mathbf{h}^{(\sigma)}_i(\theta)$ und $\mathbf{h}^{(u)}_i(\theta)$ nichts anderes als Linearkombinationen aus $\widetilde{\mathbf{f}^{(\sigma)}_{.i}(\theta)}$ und $\widetilde{\mathbf{f}^{(u)}_{.i}(\theta)}$. Es ergeben sich dann als Folge von (59) für die Verschiebungs- und Spannungsinkremente die Beziehungen

$$d\mathbf{u}(\xi_0,\theta) = \sqrt{\xi_0}\sum_i d\mathcal{C}_i(\xi_0)\mathbf{h}^{(u)}_i(\theta),\ \ d\boldsymbol{\sigma}(\xi_0,\theta) = \frac{1}{\sqrt{\xi_0}}\sum_i d\mathcal{C}_i(\xi_0)\mathbf{h}^{(\sigma)}_i(\theta). \tag{60}$$

δA erhält die Form

$$\begin{aligned}\delta A &= \xi_0 \sum_i d\mathcal{C}_i(\xi_0)\delta(d\mathcal{C}_i(\xi_0)) \\ &= \xi_0 \sum_i \int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \left(\mathbf{h}^{(\sigma)}_i(\theta) \bullet \frac{d\mathbf{u}(\xi_0,\theta)}{\sqrt{\xi_0}}\right) d\theta \int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \left(\mathbf{h}^{(\sigma)}_i(\theta) \bullet \frac{\delta(d\mathbf{u}(\xi_0,\theta))}{\sqrt{\xi_0}}\right) d\theta \end{aligned} \tag{61}$$

mit

$$d\mathcal{C}_i(\xi_0) = \int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \mathbf{h}^{(\sigma)}_i(\theta) \bullet \frac{d\mathbf{u}(\xi_0,\theta)}{\sqrt{\xi_0}} d\theta. \tag{62}$$

(62) folgt natürlich aus (60) mit Hilfe von (59). Durch Anwendung der gewöhnlichen Finite-Elemente-Approximation für $d\mathbf{u}(\xi_0,\theta)$

$$d\mathbf{u}(\xi_0,\theta) = \sum_k \mathbf{N}_k(\theta) dv_k(\xi_0)$$

mit $\mathbf{N}_k(\theta)$ als eindimensionale Vektor-Formfunktionen [28] auf dem Kreisbogen $\xi = \xi_0$ folgt aus (61) und (62)

$$\begin{aligned}\delta A = \sum_{k,l} \Bigg[\sum_i & \int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \left(\mathbf{h}^{(\sigma)}_i(\theta) \bullet \mathbf{N}_k(\theta)\right) d\theta \\ & \int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \left(\mathbf{h}^{(\sigma)}_i(\theta) \bullet \mathbf{N}_l(\theta)\right) d\theta \Bigg] dv_k(\xi_0)\delta(dv_l(\xi_0)) \end{aligned} \tag{63}$$

$$d\mathcal{C}_i(\xi_0) = \sum_k \int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \frac{1}{\sqrt{\xi_0}} \mathbf{h}_i^{(\sigma)}(\theta) \ \bullet \mathbf{N}_k(\theta) d\theta dv_k(\xi_0). \tag{64}$$

Die gesuchten Steifigkeiten q_{kl} berechnen sich aus der Beziehung

$$q_{kl} = \sum_i \int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \left(\mathbf{h}_i^{(\sigma)}(\theta) \ \bullet \mathbf{N}_k(\theta)\right) d\theta \int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \left(\mathbf{h}_i^{(\sigma)}(\theta) \ \bullet \mathbf{N}_l(\theta)\right) d\theta. \tag{65}$$

Natürlich bleibt die Unabhängigkeit der q_{kl} von ξ_0 erhalten. Diese Eigenschaft kann nicht durch die Form des Eigenfunktionsystems beeinträchtigt werden. Die Steifigkeitswirkungen q_{kl} sind somit ermittelbar, wenn die Eigenfunktionen bekannt sind. Die Vorteile von (65) gegenüber den obigen Berechnungen von q_{kl} sind offensichtlich. Die Lösung der Gleichungssysteme (46) bzw. (55) ist nicht notwendig. Andererseits ist die Anzahl der zu benutzenden Eigenfunktionen nicht von der Finite-Elemente-Netzdichte auf $\xi = \xi_0$ abhängig und damit entsprechend der geforderten Lösungsgenauigkeit wählbar.
Nach Assemblierung der q_{kl} mit den Elementsteifigkeitsmatrizen des Restkörpers ($\xi \geq \xi_0$) zur Gesamtsteifigkeitsmatrix ist die Lösung des Randwertproblems möglich. Natürlich sind dafür im Rahmen der Fließtheorie die entsprechenden Gleichgewichts- und Gaußpunktiterationen auf der Fließfläche notwendig [29]. Nach dieser Prozedur erhalten die Inkremente der Knotenpunktverschiebungen $dv_k(\xi_0)$ konkrete Werte und mit Hilfe von (64) auch $d\mathcal{C}_i = d\mathcal{C}_i(\xi_0)$. Zur Bestimmung der Lösung in unmittelbarer Singularitätsnähe ($\xi \approx 0$) sind natürlich die Größen dC_i notwendig. Die entsprechenden Beziehungen lassen sich leicht aus (62) und $d\mathbf{u}(\xi,\theta) = \sum_j dC_j d\mathbf{f}_j^{(u)}(\xi,\theta)$ herleiten. Für die Wurzeln $\lambda_1 = \alpha_1,\ \lambda_2 = \alpha_2,\ \lambda_3 = \alpha_3 + \imath\beta_3,\ \lambda_4 = \alpha_3 - \imath\beta_3, ...,\ \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 ...$ erhält man z.B. folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
d\mathcal{C}_1 &= \xi_0^{\alpha_1+\frac{1}{2}} K_{11} dC_1 + \xi_0^{\alpha_2+\frac{1}{2}} K_{12} dC_2 + \xi_0^{\alpha_3+\frac{1}{2}} (K_{13} dC_3 + K_{14} dC_4) + ...\\
d\mathcal{C}_2 &= \xi_0^{\alpha_2+\frac{1}{2}} K_{22} dC_2 + \xi_0^{\alpha_3+\frac{1}{2}} (K_{23} dC_3 + K_{24} dC_4) + ...\\
d\mathcal{C}_3 &= \xi_0^{\alpha_3+\frac{1}{2}} (K_{33} dC_3 + K_{34} dC_4) + ...\\
d\mathcal{C}_4 &= \xi_0^{\alpha_3+\frac{1}{2}} K_{44} dC_4 + ...\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned} \tag{66}$$

In (66) sind die Größen $K_{ij} = K_{ij}(g_{kl})$ im allgemeinen von den Integralen g_{kl} über die Produkte der $\theta-$Eigenfunktionsanteile $\mathbf{g}_l^{(u)}(\theta)$ und $\mathbf{g}_k^{(\sigma)}(\theta)$ durch

$$g_{kl} = \int\limits_{-\theta_u}^{\theta_o} \mathbf{g}_k^{(\sigma)}(\theta) \bullet \mathbf{g}_l^{(u)}(\theta) d\theta$$

abhängig. Das Verschwinden von $K_{21} = K_{31} = K_{32} = K_{41} = ... = 0$ folgt aus der Konstruktion des orthogonalisierten Eigenfunktionsystems. Im Falle von nur reellen Wurzeln ist leicht einsehbar, daß alle K_{ij} nicht von ξ_0 abhängen. Treten

komplex konjugierte Wurzeln auf, dann ist wiederum derselbe Effekt ($\frac{dK_{ij}}{d\xi_0} = 0$) durch die jeweilige Kombination von λ_i und $\overline{\lambda_i}$ zu erwarten. Der Beweis läßt sich jedoch im mathematisch strengen Sinne nicht so einfach führen. Bestimmt man die K_{ij} numerisch auf der Grundlage von (43), dann bleiben in den K_{ij} numerische „Rückstände" der Form $\cos(\beta_i \ln(\xi_0)))$ und $\sin(\beta_i \ln(\xi_0)))$ übrig, weil die komplexen Wurzeln nur näherungsweise bestimmt werden können. Andererseits zeigen diese numerischen Berechnungen, daß die Wirkungen dieser „Rückstände" auf die Werte der K_{ij} gering sind. Die Inversion von (66) ergibt die gesuchten Größen dC_i.
Eine andere interessante Darstellung erhält man nach Einführung von

$$D_i = K_{ii} dC_i, \; d_{ji} = \frac{K_{ji} dC_i}{D_j} \text{ (keine Summation über } i \text{ und } j!). \tag{67}$$

Die Verschiebungen und Spannungen auf $\xi = \xi_0$ erhalten somit die Form

$$d\mathbf{u}(\xi_0, \theta) = \xi_0 \sum_j D_j \xi_0^{\alpha_j} (1 + d_{jj+1} \xi_0^{(\alpha_{j+1} - \alpha_j)} + ...) \mathbf{h}_j^{(u)}(\theta) \tag{68}$$

$$d\boldsymbol{\sigma}(\xi_0, \theta) = \sum_j D_j \xi_0^{\alpha_j} (1 + d_{jj+1} \xi_0^{(\alpha_{j+1} - \alpha_j)} + ...) \mathbf{h}_j^{(\sigma)}(\theta). \tag{69}$$

Der Vektor der Spannungsinkremente $d\boldsymbol{\sigma}(\xi_0, \theta)$ in (69) enthält wegen der Definition (45) nicht die Ringspannungsinkremente $d\sigma_{\theta\theta}$. Es läßt sich natürlich leicht zeigen, daß (69) in analoger Weise auch auf diese Komponente erweiterbar ist.
Weiterhin ist zu bemerken, daß (68) (und so auch (45)) die Verschiebungen bis auf eine sogenannte „Festkörperarretierung" bestimmt. (42) hat für beliebige η, κ^o, κ^u, θ^o und θ^u die Wurzel $\lambda^0 = 0$, welche nicht mit der entsprechenden Wurzel der „T-Stress"-Term-Eigenfunktion [30] zu verwechseln ist. Die Letztere tritt z.B. beim Riß noch zusätzlich zur Ersteren als Nullwurzel in (42) auf. λ^0 führt zu verschwindenden Spannungseigenfunktionen, die entprechenden Verschiebungen sind jedoch im allgemeinen von Null verschieden und müssen natürlich berücksichtigt werden.
Für jedes konkrete ξ_0 ist das Verhalten der Lösungen innerhalb von $\xi < \xi_0$ durch die Eigenfunktionen $f_{i\xi\xi}^{(\sigma)}(\xi, \theta)$, $f_{i\xi\theta}^{(\sigma)}(\xi, \theta)$, $f_{i\theta\theta}^{(\sigma)}(\xi, \theta)$, $f_{i\xi}^{(u)}(\xi, \theta)$ und $f_{i\theta}^{(u)}(\xi, \theta)$ mit den „schwierigen" Termen $\cos(\beta_i \ln(\xi)))$ und $\sin(\beta_i \ln(\xi)))$ sowie durch dC_i bestimmt. Die wesentlich einfacheren Darstellungen (68) und (69), die für die Invarianz im Sinne der ξ_0- Abhängigkeiten als Parameter stehen, eignen sich gut als stabile vergleichbare „ξ_0- Lösungen" in der Festigkeitsanalyse, weil das Bruchverhalten im Grunde durch die dC_i's und damit durch die D_i- Werte determiniert ist.

4 Rechentechnische Umsetzung auf massiv parallelen Rechnern

Die Ergebnisse aus den obigen Kapiteln wurden im Rahmen eines eigenentwickelten Finite-Elemente-Programms auf massiv parallelen Computern implementiert. Als Parallelisierungszugang fand die Methode der Gebietszerlegung (Domain Decomposition-DD) Anwendung. Die innerhalb der Forschergruppe „SPC" (Scientific Parallel Computing) an der Fakultät für Mathematik entwickelte parallele Grundsoftware

zur Lösung großdimensionierter linearer Gleichungssysteme konnte hierbei erfolgreich eingesetzt werden [31]. Dies bedeutet die vollständige Parallelisierung des gesamten Arithmetikaufwandes von der Netzgenerierung in den Teilgebieten über die Assemblierung der lokalen Teilsteifigkeitsmatrizen bis hin zur Lösung der Gleichungssysteme. Dabei werden zur Implementierung schneller Lösungsalgorithmen die grundlegenden Vektoroperationen(z.B. Skalarprodukt, Matrix mal Vektor) unter Ausnutzung der Datenverteilung weitgehend lokal realisiert, das heißt durch voneinander unabhängige Operationen auf den einzelnen Prozessoren und mit möglichst wenig zusätzlicher Kommunikation zwischen den Prozessoren. Zur Anwendung kommt im besonderen das für das vorkonditionierte CG-Verfahren PCGM (Preconditioned Conjugate Gradient Method) mit Yserentants hierarchischer Vorkonditionierung entwickelte effiziente parallele Konzept [32] von zwei unterschiedlichen lokalen Vektorspeichertypen, die einerseits den Vektoren der Unbekannten (Näherungen, Korrekturen, Suchrichtungen), andererseits den linearen Funktionalen in der Variationsformulierung des diskreten Problems (rechte Seiten, Defekte) entsprechen [33]. Durch dieses Konzept gelingt es, Probleme, die durch Knoten und den damit verbundenen Knotenwerten, die im „Besitz“ mehrerer Prozessoren des Parallelrechners sind, weitestgehend auszuschalten und den parallel ablaufenden Lösungsprozeß sehr effektiv zu gestalten. Für nichtlineare elastisch-plastische Aufgaben werden natürlich die Vorzüge dieses DD-Konzeptes wegen der einfachen Parallelisierung sowohl der Gaußpunktiterationen auf der Fließfläche als auch der Gleichgewichtsiterationen in den Knotenpunkten nicht eingeschränkt.
Die Einbindung der oben entwickelten Steifigkeitswirkungen in den parallelen Gesamtlösungsalgorythmus läßt sich leicht realisieren. Im Bild 2 ist die Vernetzung im Verfeinerungslevel 2 einer Interface-Riß-Zugprobe mit zusätzlichem Interface dargestellt. Der Riß endet im Mittelpunkt des roten Kreises, während das zweite Interface die Probenränder auf der Verbindungslinie zwischen den oberen beiden sichtbaren Halbkreisen verbindet. Es handelt sich hierbei um quadratische 9-Knoten-Viereckselemente (Lagrangesche Klasse [28]). Die roten Linien begrenzen die Elemente der jeweiligen Prozessoren. Für die Interface-Rißspitze werden die Steifigkeiten q_{kl} auf dem sie umgebenden roten Kreis $\xi = \xi_0$ bestimmt. Innerhalb dieses Kreises sind die Elemente von der Lösung des Randwertproblems ausgeschlossen. Im Postprocessing ist der Einsatz dieser Elemente jedoch wieder erforderlich. Somit erstreckt sich die Steifigkeitsmatrix des die Rißspitze einschließenden Prozessors lediglich über dessen „Grenze“. Analog wird das asymptotische Verhalten der übrigen drei 90°-90°-Verbundecken auf den sichtbaren roten Halbkreisen realisiert. Natürlich sind die entsprechend dazugehörigen Steifigkeiten q_{kl} auf unterschiedlichen Prozessoren „beheimatet“. Auf diese Weise fügen sich die asymptotischen Eigenfunktionsentwicklungen mit den berechneten Steifigkeitswirkungen sehr gut in das DD-Konzept ein. Andererseits ist durch das einmal erstellte Finite-Elemente-Netz ein Vergleich zu Lösungen ohne Berücksichtigung des speziellen asymptotischen Verhaltens an den betrachteten kritischen Punkten problemlos machbar, indem die Lösung innerhalb der Kreise und Halbkreise genauso wie auf den anderen Prozessoren mit gewöhnlichen Finiten Elementen erstellt wird. Als erstes Resultat erhält man die Aussage, daß durch die Einführung der asymptotischen Steifigkeiten die Kondition des zu

lösenden linearen Gesamtgleichungssystems im Vergleich mit dem üblichen Finite-Elemente-System verbessert wird. Dies hat seine Auswirkungen in der Herabsetzung der Iterationszahlen innerhalb des PCGM-Solvers. Für die im Bild 2 dargestellte Vernetzung ergeben sich zum Beispiel bei einem Schubmodulverhältnis (η) von 20 eine Reduzierung der Iterationen um 5 Prozent pro asymptotischer Steifigkeitsmatrix. In höheren Netzverfeinerungsstufen wird diese Wirkung natürlich verstärkt. Somit ist besonders bei nichtlinearen Aufgaben, wenn das Resultat durch mehrfaches iteratives Lösen von linearen Gleichungsystemen mit Hilfe des PCGM-Solvers erfolgt, die Zeiteinsparung deutlich zu spüren.

5 Beispiel einer Interface-Riß-Probe

Erste Ergebnisse von Testrechnungen sollen hier kurz beispielhaft erläutert werden. Eine Interface-Riß-Probe (750*1500 auf ℓ bezogene dimensionslose Ausdehnung, Rißlänge: 375, der Riß befindet sich in der Probenmitte) wurde am elastisch weichen Materialbereich quer zum Interface-Riß mit homogen verteilter Last beansprucht und am gegenüberliegenden steiferen Probenende fest eingespannt. Die Berechnungen wurden für rein elastisches Materialverhalten mit folgenden Parametern durchgeführt:

$$\boxed{\eta = 0.0505,\ \kappa^o = 4.5,\ \kappa^u = 3.25}$$

Somit ergeben sich die Wurzeln der Lösbarkeitsbedingung (42) zu

$$\boxed{\lambda_i = -0.5 \pm \imath 0.06591194,\ 0.0,\ 0.5 \pm \imath 0.06591194,\ 1,\ 1.5 \pm \imath 0.06591194,\ 2,\ \ldots}$$

In den Bildern 3 bis 6 sind die Spannungen σ_{yy} (die $y-$Achse steht senkrecht zum Riß und Interface) für verschiedene ξ_0 (Kreis mit den asymptotischen Steifigkeiten) und gleichem Zoomradius $\xi_z = 1.0$ dargestellt. Dabei befindet sich die Rißspitze direkt in der Mitte der Abbildungen, der Riß auf der horizontalen Geraden (x-Achse) links davon und das Interface entsprechend rechts davon. Für alle weiteren Ergebnisdarstellungen dieser Arbeit in Rißumgebungen gilt diese gleiche Konvention. Aus Approximationsfehlern im Postprocessing erklärt sich das reißverschlußartige Gebiet auf der unteren und oberen Rißflanke. Es sei bemerkt, daß die Spannungswerte in üblicher Weise zuerst in den Gaußpunkten berechnet und dann auf die Knotenpunkte extrapoliert werden. Wegen der Vergleichbarkeit der Resultate gilt diese Vorgehensweise auch für die Spannungsermittlung innerhalb von $\xi < \xi_0$ auf der Grundlage der Eigenfunktionsentwicklungen. Die Spannungsverteilung ist hierbei und auch in den folgenden Bildern auf den Schubmodul der weicheren Materialhälfte bezogen. Verändert man ξ_z für die in den Abbildungen 4 bis 6 gezeigten Felder entsprechend auf 0.1, 0.01 und 0.001, so erhält man bei entsprechendem Spannungsmaßstab jeweils Bilder, die wegen der oben gezeigten Steifigkeitsinvarianz mit Bild 3 übereinstimmen. Andererseits ergeben sich infolge dieser Invarianz mit kleiner werdenden ξ_0 „konvergierende Spannungsfelder“ an der Interface-Rißspitze.

Bemerkenswert sind weiterhin die ersichtlichen Druckspannungen direkt unterhalb der Interface-Rißspitze. Sie treten infolge des unterschiedlichen Poissoneffektes in den Materialbereichen auf. Sowohl das obere weiche als auch das untere härtere Material werden jeweils entlang der $y-$Achse auf Zug beansprucht. Dieser Zug verursacht in den Materialbereichen unterschiedliche Kontraktionen in $x-$Richtung. In der Rißspitzenumgebung werden die Kontraktionen des oberen weicheren Materialbereiches durch das untere härtere Material sehr stark behindert und führen somit zur Erzeugung des Druckspannungsfeldes im harten Materialbereich.
Zum Vergleich mit den vorigen Bildern ist auf der Abbildung 7 die σ_{yy}-Spannungslösung ohne Berücksichtigung der speziellen Asymptotik, d.h. innerhalb von $\xi < \xi_0$ wurde mit der gewöhnlichen Finite-Elemente-Methode gerechnet, dargestellt ($\xi_z = 1.0$). Für alle weiteren Bilddarstellungen bedeutet die Bezeichnung „ohne Asymptotik" Ergebnisdarstellungen von Lösungen, die für $\xi < \xi_0$ aus üblichen Finite-Elemente-Approximationen stammen. „Mit Asymptotik" kennzeichnet die Verwendung des oben beschriebenen Zugangs der Kopplung von asymptotischer Analyse mit der Finiten-Elemente-Methode.
Es ist auf Bild 7 zu erkennen, daß die oben erwähnten Druckspannungen hierbei nur in einem kleinen Bereich unterhalb der Rißflanke auftreten. Somit kommen wir zu dem Schluß, daß mit Hilfe herkömmlicher Finite-Elemente-Methoden das elastische Spannungs- und Dehnungsverhalten an Interface-Rissen sowohl qualitativ als auch quantitativ nicht reproduzierbar ist.
Zur Erhärtung dieser Aussage betrachten wir eine weitere Interface-Rißprobe, deren Geometrie mit der der obigen symmetrischen Probe identisch ist. Die Materialparameter seien dabei so gewählt, daß sich das Deformationsvermögen der beiden Materialbereiche kaum voneinander unterscheidet:

$$\boxed{\eta = 0.7194,\ \kappa^o = 4.5,\ \kappa^u = 3.25}$$

mit den Wurzeln der Lösbarkeitsbedingung:

$$\boxed{\lambda_i = -0.5 \pm \imath 0.001687346,\ 0.0,\ 0.5 \pm \imath 0.001687346,\ 1,\ 1.5 \pm \imath 0.001687346,\ 2,\ \ldots}$$

An den Probenenden, die parallel zum Riß verlaufen, wurde eine symmetrische und homogene $y-$Verschiebungsvorgabe mit verschwindenden $x-$Verschiebungen realisiert. Die vergleichbaren Felder der $\sigma_{yy}-$Spannungsergebnisse sind in den Bildern 8 ohne Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens und 9 mit dessen Berücksichtigung dargestellt ($\xi_z = 1.0,\ \xi_0 = 0.75$). Bild 8 zeigt qualitativ die bekannte Lösung eines „homogenen" Risses in sogenannter Mode-I-Belastung. Von den oben beschriebenen Auswirkungen des Poissoneffektes ist in dieser Abbildung nichts zu sehen. Im Bild 9 sind diese jedoch sichtbar. Sie beschränken sich auf das Gebiet $\xi < 0.4$. Die relativ großen Druckspannungsfelder, die in der vorigen Probe vorhanden waren, treten hier wegen des fast gleichen Materials in den unterschiedlichen Materialbereichen nicht auf. Im Bild 10 ist die Verteilung wiederum von σ_{yy} derselben fast „homogenen" Rißprobe mit Berücksichtigung des speziellen asymptotischen

Verhaltens gezeigt ($\xi_z = 1.0,\ \xi_0 = 0.75$). Es wurden jedoch die Poissoneffektfolgen kinematisch durch spezielle $y-$Verschiebungsvorgaben am rechten unteren Probenende, die im Bild 11 durch die Pfeile angedeutet sind, entfernt. Die so positiv vorgegebenen $y-$Verschiebungen bewirken negative $x-$Verschiebungen direkt oberhalb von Interface und Rißspitze. Sie drängen die $x-$Kontraktionen im oberen weicheren Materialbereich links von der Rißspitze zurück und gleichen die $x-$Verschiebungen oberhalb und unterhalb des Risses aus. Auf diese Weise verschwinden die Poissoneffektfolgen. Daher sind mit der gleichen Asymptotik sowohl die Poissoneffektfolgen als auch durch deren kinematische Entfernung die Spannungsverteilung eines „homogenen" Risses in Mode-I-Belastung darstellbar. Die herkömmlichen Finiten Elemente sind ganz einfach zu grob, um die eben geschilderten Effekte beschreiben zu können.

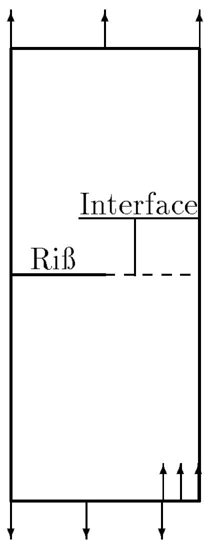

Bild 11: „Kinematische" Entfernung der Poissoneffektfolgen

Man erhält bei ihrer Anwendung Spannungsverteilungen der in Bild 7 gezeigten Art. Aus den Abbildungen 7 und 8 folgt, daß das normale Finite-Elemente-Verfahren einen unter Zug belasteten Interface-Riß vom „homogenen" Riß mit gleicher Belastung qualitativ nur durch ein „Abknicken" der $\sigma_{yy}-$Spannungsfelder im härteren Materialbereich unterscheiden kann. Ganz abgesehen von den enormen quantitativen Unterschieden, durch die die Finiten Elemente infolge der schlechten Approximation von der wirklichen Asymptotik entfernt sind, ist die übliche Finite-Elemente-Methode nicht in der Lage, wenigstens qualitativ das Spannungs- und Deformationsverhalten am elastischen Interface-Riß wiederzugeben.

Dies ist auch aus dem Vergleich der Spannungsverteilungen von σ_{xx} und σ_{xy}, die auf den Bildern 12 bis 15 jeweils mit und ohne Berücksichtigung der Asymptotik dargestellt sind, ersichtlich. Es handelt sich hierbei um Ergebnisse für die anfangs betrachtete „echte" Interface-Rißprobe, die den $\sigma_{yy}-$Spannungen der Bilder 3 bis 6 entsprechen ($\xi_0 = 0.0075,\ \xi_z = 1.0$). Bemerkenswert für die Abbildungen 12 und 14 ist die besondere Lage der y-Achse in den Spannungsfeldern der unteren Materialhälfte. σ_{xy} erfährt dort einen Nulldurchgang, während sich σ_{xx} durch zwei zu dieser Achse symmetrisch liegende Nulldurchgänge, die in der Rißspitze aufeinandertreffen, auszeichnet. Diese Effekte der „Symmetrie" (σ_{xx}) und „Antisymmetrie" (σ_{xy}) treten in den Berechnungen ohne Berücksichtigung der Asymptotik nicht auf. Das ist deutlich anhand der Bilder 13 und 15 zu sehen. Natürlich finden die oben geschilderten Tatsachen auch ihren Niederschlag in der Lösung von nichtlinearen

Aufgaben im Rahmen der Fließtheorie. Untersuchen wir die eben verwandte „echte" Interface-Rißprobe mit den obigen elastischen Materialparametern und einer endlichen Fließgrenze τ_t. Das Verfestigungsverhalten der plastischen Deformationen sei isotrop mit einer Fließbedingung der Form (vergleiche Gleichung 20!):

$$f(\tilde{\tau}, \chi) = \left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{\tau} - \tau_t^u - b^u \chi^{\rho^u} & : & \theta < 0 \\ \tilde{\tau} - \tau_t^o - b^o \chi^{\rho^o} & : & \theta > 0 \end{array} \right\} = 0.$$

Hierbei stellen $\tilde{\tau}$, τ_t^u und τ_t^o die auf den Schubmodul des elastisch weicheren Materials bezogenen Werte der Oktaederspannung (τ) und der Fließgrenzen in den entsprechenden Materialbereichen dar. b^u, ρ^u, b^o und ρ^0 charakterisieren die Verfestigung der Materialien. Folgende Werte wurden in den Berechnungen verwendet:

$$\boxed{\tau_t^u = \tau_t^o = 0.245,\ \ b^u = 1.798,\ \ b^o = 0.01666,\ \ \rho^u = 0.25,\ \ \rho^o = 0.4}$$

Die für die asymptotische Analyse nötigen Werte ergeben sich aus γ' und der Lösbarkeitsbedingung zu:

$$\boxed{\eta = 0.01,\ \ \kappa^o = 225,\ \ \kappa^u = 32.5}$$

$$\boxed{\lambda_i = -0.5 \pm \imath 0.00193809,\ \ 0.0,\ \ 0.5 \pm \imath 0.00193809,\ \ 1,\ \ 1.5 \pm \imath 0.00193809,\ \ 2,\ \ldots}$$

γ' folgt natürlich aus den Verfestigungsparametern mit der oben angenommenen Konvention $\gamma''(\infty) = 0$ (Materialfall (b)!). Auf den Abbildungen 16 bis 19 sind die plastischen Zonen für zwei Belastungsstufen der eben beschriebenen elastisch-plastischen Interface-Rißprobe jeweils im Vergleich mit und ohne Asymptotik dargestellt ($\xi_0 = 0.075$, $\xi_z = 0.1$). Die Bilder zeigen qualitative und quantitative Unterschiede auf, die schon infolge der vorigen elastischen Lösungen zu erwarten waren. Wegen der hohen Spannungen vor allem im unteren härteren Materialbereich kommt es bei gleichen Fließgrenzen eben dort in erster Linie zu plastischen Deformationen und nicht wie aus den Lösungen ohne Berücksichtigung der Asymptotik im oberen elastisch (!) weicheren Materialbereich.
Die sektorartigen Zonen der Bilder 16 und 18 erklären sich aus der konkreten Wahl des Parameters ξ_0, also des Kreises mit den asymptotischen Steifigkeiten. Im Grunde werden die plastischen Zonen vorerst nur außerhalb dieses Kreises in üblicher Weise bestimmt. Innerhalb von $\xi < \xi_0$ geschieht die Berechnung der plastischen Deformationen im Rahmen des Postprocessings. Die Plastifizierungen in diesem Gebiet lassen sich über die entsprechenden konstitutiven Beziehungen der oben dargestellten asymptotischen Analyse und den explizit am Rande bestimmten plastischen Deformationen ermitteln. Ist ξ_0 zu groß gewählt, dann können diese plastischen Sektorzonen entstehen, weil außerhalb des Kreises der asymptotischen Steifigkeiten am Beginn der Lastaufbringung nicht gleichzeitig über den gesamten Winkelbereich Plastifizierungen auftreten müssen. Man begeht dabei innerhalb der iterativen Lösungsermittlung (d.h. Gleichgewichts- und Gaußpunktiteration) Fehler, die auf den entsprechenden Belastungsschritten zu höheren Iterationszahlen führen. Um

dies zu vermeiden, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Man benutzt das für die Inkremente modifizierte Variationsprinzip von Washizu [19] zur Bestimmung einer asymptotischen Tangentialsteifigkeitsmatrix, die die angesprochenen Fehler ausgleicht und die Iterationszahlen auf ein Minimum reduziert.
2. Man wählt ξ_0 hinreichend klein, so daß mit dem ersten Lastinkrement die entstehende plastische Zone das Gebiet $\xi < \xi_0$ völlig einschließt.

Die zweite Methode ist natürlich viel einfacher zu realisieren. Zur effektiven und exakten Berechnung von Spannungs- und Deformationsfeldern an Interface-Ecken sollte ξ_0 entsprechend der gegebenen Anfangsfließbedingungen immer so bestimmt sein, daß der Anfangsradius der plastischen Zone ξ_0 übersteigt. Natürlich kommen erst durch die Erfüllung dieser Bedingung, die in den obigen Kapiteln festgestellte ξ_0-Unabhängigkeit der asymptotischen Steifigkeiten im nichtlinearen Deformationsbereich so richtig zur Wirkung. Gleichwohl bezeugen die Abbildungen 17 und 19 im Vergleich zu 16 und 18 selbst mit dem etwas zu groß gewählten ξ_0 , daß mit Hilfe der üblichen Finiten-Element-Methode Interface-Risse und Ecken nicht zu berechnen sind.

6 Folgerungen für die Bruchmechanik

Das Ziel der Bruchmechanik besteht in der Aufklärung von Versagensbedingungen für deformierbare Festkörper der verschiedensten Formen, die bei gegebenen äußeren Belastungen und Randbedingungen in der Praxis eingesetzt werden. Allgemein betrachtet ist diese Aufgabe natürlich sehr kompliziert. Der Bruch von Festkörpern hängt von vielen Faktoren ab. Große Bedeutung hat die Struktur des konkreten Materials, die sehr komplex sein kann. Weiterhin sind die äußeren Bedingungen wie z.B. Charakter der Belastung und des Temperaturverlaufs, Oberflächeneffekte u.a. zu beachten. Reale Materialien beinhalten die verschiedenartigsten Formen von Fehlern beginnend mit mikroskpischen und submikroskopischen Defekten und endend mit großen Poren und makroskopischen Rissen. Die Beschreibung von Bruchprozessen anhand dieser schwierigen physikalischen Phänomene steht heutzutage noch am Anfang der Entwicklung. Selbst die Darstallung des makroskopischen konstitutiven Verhaltens der deformierbaren Festkörper aus vorhandenen mikroskopischen Theorien „steckt noch in den Kinderschuhen“. Andererseits ist der makroskopische Zugang innerhalb der Kontinuumsmechanik zur Bruchmechanik unumgänglich, weil in der praxisnahen Anwendung das Makroexperiment und die damit verbundenen makroskopischen Größen, wie z.B. Ausdehnung und Form, Belastung und Belastungsgeschichte usw. eine entscheidende Rolle in der Antwort auf die Frage nach „Bruch“ oder „Nicht Bruch“ des konkreten Konstruktionselementes spielen. Deshalb ist es nur natürlich, Bruchbedingungen, die kritische Grenzzustände charakterisieren, im Rahmen der Annahmen der Festkörpermechanik zu formulieren. Es sei bemerkt, daß diese Grundannahmen die Ausgangsgleichungen (1), (2) und (3) (hier im zweidimensionalen Spezialfall) dieser Arbeit zum Resultat haben.

6.1 Grundgleichungen der Festkörpermechanik

(1), (2) und (3) lassen sich in sehr einfacher und eleganter Weise herleiten [11]. Betrachten wir dazu einen deformierbaren Körper mit dem Volumen V und der Oberfläche S. Der Einfachheit wegen sollen Trägheits-, mikropolare und geometrisch nichtlineare Effekte vernachlässigt werden. Der Körper befinde sich im Gleichgewicht mit den Volumenkräften $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ und den Oberflächenkräften $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3\}$. Als Gleichgewichtsbeziehung in Lagrange-Form [11] ergibt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit zu (die virtuelle Arbeit der Volumen- und Oberflächenkräfte verschwindet):

$$\iiint\limits_V F_i \delta u_i dV + \iint\limits_S T_i \delta u_i dS = 0. \tag{70}$$

Die Hauptdefinition des deformierbaren Festkörpers ist die des Deformationstensors e_{ij}. Zur Charakterisierung der Deformierbarkeit des Kontinuums in jedem seiner Punkte bedient man sich der sechs Größen:

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{71}$$

Die entsprechende Differenzierbarkeit der Verschiebungskomponenten u_i in (71) sei natürlich vorausgesetzt. Es ist klar, daß (70) wegen des Vorhandenseins von nur äußeren Kräften $(\mathbf{F}, \mathbf{T})$ nicht für beliebige Variationen δu_i Gültigkeit besitzen kann [11]. Die Konkretisierung dieser Variationen führt zur Definition des deformierbaren Festkörpers, für den im Gleichgewicht die Variation des Deformationstensors verschwinden soll:

$$\delta e_{ij} = \tfrac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{72}$$

(72) ist wie eine Bindungsgleichung zu verstehen, durch die die Variationen δu_i in (70) eingeschränkt werden. Durch Einführung des Lagrange-Multiplikators $-\sigma_{ij}$ läßt sich jedoch die Beliebigkeit der Variationen δu_i wiederherstellen. In bekannter Weise multipliziert man dabei $-\sigma_{ij}$ mit δe_{ij}, summiert über alle i und j, integriert das ganze über V, addiert das Resultat zu (70) und gelangt somit zur Lagrange-Gleichung erster Art [34]:

$$\iiint\limits_V F_i \delta u_i dV + \iint\limits_S T_i \delta u_i dS - \tfrac{1}{2} \iiint\limits_V \sigma_{ij}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) dV = 0. \tag{73}$$

Es ist gut bekannt [23], daß die Lagrange-Multiplikatoren nichts anderes als die Reaktionskräfte der Bindungen sind. Somit interpretiert sich der dritte Term in (73) als virtuelle Arbeit der inneren verallgemeinerten Kräfte σ_{ij} auf den verallgemeinerten virtuellen Verschiebungen $\delta e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$. Durch Umformung von (73) unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes erhält man [11]:

$$\iiint\limits_V (\sigma_{ij,j} + F_i) \delta u_i dV - \iint\limits_S (\sigma_{ij} n_j - T_i) \delta u_i dS = 0. \tag{74}$$

mit $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ als Einheitsnormalenvektor zur Oberfläche S. Wegen der Unabhängigkeit der δu_i ergeben sich die bekannten Gleichungen

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0,\ i = 1,2,3 \tag{75}$$

für das Volumen V und

$$\sigma_{ij} n_j = T_i,\ i = 1,2,3 \tag{76}$$

entsprechend für die Oberfläche S. (2) und (3) sind nichts anderes als die zweidimensionale Version von (75) bei verschwindendem $\mathbf{F}$. Die Vertäglichkeitsgleichung (1) ist eine direkte Folge der Integrierbarkeit von (71) zur Bestimmung der Verschiebungen u_i aus dem Deformationstensor e_{ij}. Benennen wir σ_{ij} mit Komponenten des Spannungstensors, so ist vollständig der Bezug zum Ausgangspunkt dieser Arbeit hergestellt. Die eben erfolgte Herleitung der Grundbeziehungen des deformierbaren Festkörpers diente im Grunde zur Erklärung des wichtigen Umstandes, daß die Definition des Deformationstensor am „Anfang“ der Feskörpermechanik steht. Der Spannungstenstensor ist als Lagrange-Multiplikator nichts anderes als eine abgeleitete Größe ohne eigene selbständige Definition. Zur Lösung von Randwertaufgaben innerhalb der Kontinuumsmechanik sind ohnehin noch die konstitutiven Gleichungen zwischen den Spannungen und Deformation oder zwischen deren Inkrementen notwendig. Durch diese Gleichungen (z.B. (4) und (21)), die die Eigenschaften der Deformierbarkeit unterschiedlicher Materialien in **invarianter** Form charakterisieren müssen, werden die Komponenten σ_{ij} letztendlich wieder aus dem Gesamtsystem der Gleichungen entfernt. Die invarianten Materialfunktionen, die in diesen konstitutiven Gleichungen auftreten, können nur mittels realisierter Lösungen der entsprechenden Randwertaufgaben im Vergleich mit experimentellen Untersuchungen anhand inverser Aufgabenstellungen bestimmt werden. Zum Beispiel sind zur Ermittlung der in den obigen Kapiteln benutzten Funktion $\gamma(\tau)$ für sehr große τ eben Lösungen an kritischen Punkten notwendig. Lösungen mit homogenem Spannungs- und Deformationszustand eignen sich, wie schon festgestellt wurde, dazu nicht. Die Experimente liefern jedoch nur kinematische Größen wie Verschiebungen, aus denen man durch Gradientenbildung die Deformationen bestimmen kann, und keine Spannungen. Spannungen sind deshalb nicht ermittelbar, weil die Materialfunktionen der konstitutiven Gleichungen unbekannt sind und ja erst innerhalb der inversen Aufgabe bestimmt werden sollen.
Zusammenfassend kann man somit schlußfolgern, daß der Spannungstensor in der Festigkeitsanalyse im Vergleich zum Deformationstensor eher eine zweitrangige Bedeutung besitzt. Die Festigkeit eines deformierbaren Körpers ist auf dessen Deformierbarkeit, die durch e_{ij} charakterisiert wird, zurückführbar. Bleibt die Frage, inwiefern kritische Versagenszustände von Festkörpern im Rahmen von Deformationskriterien definierbar sind.

6.2 Spannungszustandsabhängige Deformationskriterien in der Festkörpermechanik

Um in der eben formulierten Frage Klarheit zu schaffen, können wir uns zum Teil des Spannungstensors bedienen, auch wenn er nur Lagrange-Multiplikator ist. Für nichtpolare Medien hat dieser symmetrische Eigenschaften ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), womit die auf die Vergleichsspannung $\sigma_v = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau$ bezogenen Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 darstellbar sind in der Form [11] ($\tau = \sqrt{\frac{1}{3}S_{ij}S_{ij}}$ ist natürlich die anfangs definierte Oktaederspannung.):

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= h + \tfrac{2}{3}\cos(\omega) \\
\sigma_2 &= h + \tfrac{2}{3}\cos(\omega - \tfrac{2\pi}{3}) \\
\sigma_3 &= h + \tfrac{2}{3}\cos(\omega - \tfrac{4\pi}{3}).
\end{aligned} \tag{77}
$$

Es sei bemerkt, daß die Gleichungen (77) unabhängig vom jeweiligen Materialverhalten Gültigkeit besitzen. Sie stellen nichts anderes als die Eigenwertwurzeln der kubischen Determinantengleichung des symmetrischen Spannungstensors im „casus irreducibilis" dar. In (77) sind mit $h = \frac{\sqrt{2}\sigma}{3\tau}$ ($\sigma = \frac{\sigma_{ii}}{3}$, wie anfangs definiert!) und $\omega = \frac{1}{3}\arccos\frac{\sqrt{2}S_{ij}S_{ik}S_{kj}}{3\tau^3}$ jeweils der Constraint-Faktor [35] sowie der Ähnlichkeitswinkel des Spannungsdeviators ($S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$) auf der Oktaederfläche [11] bezeichnet. h fand schon oft in Arbeiten zur Übertragbarkeit kritischer Bruchparameter von Probengeometrien auf Bauteile Anwendung [35, 36, 37]. In [38] benutzt man h als Parameter zur Charakterisierung des Spannungszustandes innerhalb konstitutiver Gleichungen.
Analysieren wir die Deformationen im ebenen Verzerrungszustand (EVZ) anhand der Deformationstheorie (4). Im EVZ sind h und ω nicht unabhängig voneinander. h berechnet sich aus ω mit Hilfe von

$$
h = 2\mathcal{K}_s \sin(\omega + \tfrac{\pi}{6}). \tag{78}
$$

$\mathcal{K}_s$ ist natürlich das oben definierte Verhältnis von Kompressions- und Schubmodul. Für den EVZ ergibt (4) anhand von (77) und (78)

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \tfrac{6\gamma(\tau)}{8}[\sin(2\alpha - \omega + \tfrac{\pi}{3}) + \cos(2\alpha + \omega + \tfrac{\pi}{3}) + 2\sqrt{3}\sin(\omega + \tfrac{\pi}{6})] \\
e_{yy} &= \tfrac{6\gamma(\tau)}{8}[\sin(2\alpha - \omega + \tfrac{\pi}{3}) + \cos(2\alpha + \omega + \tfrac{\pi}{3}) - 2\sqrt{3}\sin(\omega + \tfrac{\pi}{6})] \\
e_{xy} &= \tfrac{6\gamma(\tau)}{8}[\cos(2\alpha - \omega + \tfrac{\pi}{3}) - \sin(2\alpha + \omega + \tfrac{\pi}{6})].
\end{aligned} \tag{79}
$$

Der in (79) auftretende Winkel α definiert die Lage der beliebigen Koordinatenachsen (x, y) bezüglich der Spannungshauptachsenrichtungen 1 und 2 (siehe Bild 20!) und ist bestimmbar aus $\tan(2\alpha) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$. Im linear elastischen Spezialfall steht $\frac{\tau}{\mu}$ und innerhalb der Annahmen der plastischen Asymptotik der Fließtheorie steht $\tau\gamma'$ (entsprechend natürlich für die Inkremente) in (79) anstelle von $\gamma(\tau)$. Aus (79) ist augenscheinlich, daß zur Abschätzung der Deformierbarkeit und, wie oben festgestellt, damit auch der Festigkeit im (isotropen!) EVZ die Kenntnis einerseits von α und ω, die in kritischen Punkten mit singulären Spannungen und Deformationen endliche Werte annehmen, und andererseits von τ notwendig. Dabei wirkt τ wie eine Amplitude und die beiden anderen Parameter können als Phasenwinkel interpretiert werden. Somit charakterisiert τ die „Größe und Ausdehnung" sowie α und ω beschreiben die „Form" der Deformierbarkeit. Betrachten wir die in den vorigen Kapiteln erstellten Lösungen von Randwertaufgaben an kritischen Punkten in Form der Eigenfunktionsentwicklungen (45) oder auch (68) und (69) (jeweils einschließlich $d\sigma_{\theta\theta}$). Setzt man diese Entwicklungen in die Formeln für τ, α und ω ein, so bemerkt man für den EVZ folgende Möglichkeiten:

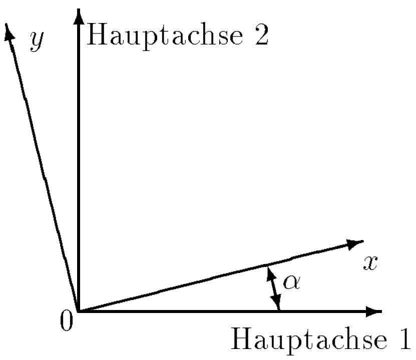

Bild 20: Die Lage der Koordinatenachsen (x, y)

Ist λ_1, die Wurzel von (42) mit dem kleinsten Realteil $\alpha_1 \geq -\frac{1}{2}$, reell ($\lambda_1 = \alpha_1$) und einfach, dann wird der Wert der Amplitude τ und damit auch aller Komponenten des Deformationstensors in unmittelbarer Nähe ($\xi \approx 0,\ \xi_0 \approx 0$) des zu beobachtenden Punktes nur von dC_1 oder nach mehreren Belastungsschritten von der Summe der dC_1 eines jeden Lastinkrementes also von C_1 dominiert. In α und ω kürzt sich C_1 im Grenzwert für kleine ξ und ξ_0 aus der Beziehung. Die anderen C_i ($i > 1$) haben ohnehin wegen der Diskretheit der λ_i im betrachteten Punkt keinen Einfluß auf α und ω. Somit bleibt hierbei, wenn keine geometrischen Veränderungen, die die Rand- und Übergangsbedingungen (30) und (31) vielleicht infolge von auftretenden Kontaktbedingungen modifizieren könnten, die Form des Deformationszustandes und somit auch des Spannungszustandes während der gesamten Lastaufbringung unverändert. Das folgt aus der Zerlegbarkeit des lokalen nichtproportionalen Belastungsanteils der asymptotischen Gleichungen in die Eigenfunktionen für inkrementell proportionale Trajektorien [18]. Kritische Versagenszustände können somit durch kritische Werte von C_1 bezüglich konkret realisierter α und ω definiert werden.

Ist λ_1 reell und mehrfach oder konjugiert komplex, dann wird τ in Singularitätsnähe durch mehrere C_i-s' „beherrscht". Für einen Interface-Riß sind dies C_1 und C_2. α und ω hängen jetzt vom Verhältnis $\frac{C_1}{C_2}$ ab. Auf den Bildern 21 bis 24 sind die Verteilungen von $\tan(\alpha)$ und $\cos(3\omega)$ in Interface-Rißspitzennähe ($\xi_z = 1$) der oben betrachteten „echten" Interface-Rißprobe jeweils im Vergleich mit und ohne Berücksichtigung der Asymptotik bei vorausgesetztem linear elastischen Materialverhalten dargestellt. Natürlich sind die Unterschiede zwischen herkömmlicher Finite-Elemente-Lösung und des wirklichen asymptotischen Verhaltens deutlich erkennbar.

Andererseits begreift man leicht, daß sich die Bilder 21 bis 24 für linear elastische Deformationen nicht verändern, wenn die äußere Zugbelastung der Probe bei gleichbleibenden kinematischen Bedingungen wertmäßig beliebig variiert wird. Läßt man hingegen Plastifizierungen nach der Fließtheorie zu, so verändert sich wegen der Trajektorienabhängigkeit von C_1 und C_2 [18] mit der Entwicklung plastischer Deformationen bei steigender Last das Verhältnis $\frac{C_1}{C_2}$, womit sich α, ω und damit auch die „Form" des Deformationszustandes modifizieren. Kritische Bruchkennwerte von C_1 und C_2 können somit anhand von α und ω quantitativ spannungszustandsabhängig spezifiziert werden.

Es sei bemerkt, daß der eben beschriebene Zugang zur Ermittlung von spannungs- oder deformationszustandsabhängigen Bruchcharakteristiken völlig unabhängig davon ist, ob im konkret betrachteten Fall ein singuläres Verhalten der Spannungen und Deformationen vorlag oder nicht. Auch in vergleichbar völlig unkritischen Punkten des Festkörpers, z.B. im Inneren eines Gebietes mit konstantem, d.h. homogenem, Materialverhalten, ist es möglich, die oben beschriebenen asymptotischen Entwicklungen zu erstellen. Natürlich bleiben die oben gezeigten Invarianzeigenschaften der Steifigkeiten auf $\xi = \xi_0$ erhalten. Ausgehend von modifizierten Bedingungen (30) und (31) (Stetigkeit der Verschiebungen sowie Normal- und Tangentialspannungen beim Übergang von $\theta = \pi$ nach $\theta = -\pi$) kann man entsprechende Eigenfunktionen ermitteln. Der Unterschied zur singulären Asymptotik besteht darin, daß λ_1 die Null ist. Die Dominanz der ersten Eigenfunktion und damit C_1 in τ, α und ω bleibt erhalten. Im singulären Fall ist τ wertemäßig nicht bestimmbar. Deshalb sind Festigkeitsaussagen nur über die C_i-s' möglich. Für nichtsinguläre Punkte können diese genauso verwendet werden, man berechnet sie jedoch nicht, weil τ wegen $\lambda_1 = 0$ endlich wird und auch ohne asymptotische Analyse bestimmt werden kann. Insofern ist auch der Bezug zu den klassischen Festigkeitshypothesen von Coulomb und von Mises [39] für **isotrope** Festkörper, in denen im Grunde kritische $\tau-$Werte für das Versagen verantwortlich sind, hergestellt.
Die „Stärke" der C_i-s' liegt in ihrer integralen Aussage bezüglich des Deformationsverhaltens für den gesamten Winkelbereich von θ. Sie werden bestimmt aus den $\mathcal{C}_i$-s' anhand von (66). Dabei gilt für sehr kleine Werte von ξ_0:

$$C_i \approx \frac{\mathcal{C}_i(\xi_0)}{K_{ii}} \xi_0^{-(\alpha_i+\frac{1}{2})} \quad \text{(keine Summation über } i!).$$

Wie schon oben erwähnt, sind die K_{ij} in (66) von den Integralen (über die Produkte der Ausgangseigenfunktionen) g_{kl} abhängig. g_{kl} kann als lokale „Deformationsmetrik" interpretiert werden. Die noch nötigen Werte der $\mathcal{C}_i$-s' berechnen sich wiederum mit Hilfe von Integralen über den gesamten Winkelbereich aus (62) und entsprechend aus (64), wenn die Lösung auf $\xi = \xi_0$ vorliegt. Die C_i-s' der höheren Eigenfunktionen mit $i = 3, 4, ..$ können ähnlich den „höheren Momenten" in der Wahrscheinlichkeitstheorie bei Bedarf infolge nicht ausreichender Identifikation der kritischen Zustände durch C_1 und C_2 zur weiteren Charakterisierung des konkret realisierten Deformationszustandes Verwendung finden.
Somit sind die Koeffizienten der Eigenfunktionen C_i sehr gut zur Abschätzung der Festigkeit geeignet. Entsprechen sie realisierten Versagenszuständen, dann können

sie als Bruchkennwerte verwandt werden. Auf ihrer Grundlage sind jedoch nur Aussagen für vergleichbare Spannungszustände, die durch α und ω charakterisiert werden, möglich. Daher ist z.B. einleuchtend, daß vom Bruch eines Zugstabes unter einachsiger Belastung nicht auf das Versagen z.B. eines zugbeanspruchten Interface-Risses schließbar ist, weil für beide Fälle völlig verschiedene Eigenfunktionen das lokale Deformationsfeld auszeichnen. Kritische Parameter können im Grunde nur aus dem Vergleich von Experiment mit numerischer Realisierung der entsprechenden Randwertaufgabe bei Berücksichtigung der spezifischen lokalen Asymptotik, vorausgesetzt das konstitutive Verhalten ist identifiziert, bestimmt und im Anwendungsfall bei „wiedergefundenen“ α und ω zu Voraussagen verwandt werden. Die Definition konkreter Bruchkenngrößen zur exakten Abschätzung der Festigkeit von deformierbaren Körpern führt somit zur Frage nach der Genauigkeit mit der auf der Basis von Festkörpermodellen (oder auch anderen Annahmen) das wirklich reale Deformationsverhalten approximiert werden kann. Ist diese Frage im konkreten Fall gelöst, dann folgen die Bruchkennwerte aus der dazugehörigen asymptotischen Analyse.

7 Ausblick auf erweiterte Aufgabenstellungen

Im Falle dreidimensionaler Problemstellungen bleiben die eben festgestellten Tatsachen natürlich erhalten. Die Erstellung der entsprechenden Eigenfunktionen gestaltet sich hierbei natürlich schwieriger. Für einfache Defektkonfigurationen innerhalb des dreidimensionalen Körpers ist z.B. eine Aufspaltung der Aufgabenstellung in den gerade betrachteten EVZ und Antiplane strain [40] möglich. Somit sind asymptotische Analysen sowohl für den EVZ als auch für den Antiplane strain notwendig. Die Beziehung (78) verliert ihre Gültigkeit und anstelle von (79) treten folgende Gleichungen für die Hauptdehnungen e_1, e_2 und e_3:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \tfrac{\sqrt{2}\gamma(\tau)}{6}(\sqrt{2}h\mathcal{K}_s + 3\cos(\omega)) \\
e_2 &= \tfrac{\sqrt{2}\gamma(\tau)}{6}(\sqrt{2}h\mathcal{K}_s - 3\cos(\omega + \tfrac{\pi}{3})) \\
e_3 &= \tfrac{\sqrt{2}\gamma(\tau)}{6}(\sqrt{2}h\mathcal{K}_s - 3\cos(\omega + \tfrac{\pi}{6})).
\end{aligned} \tag{80}$$

In (80) ist wiederum der Amplitudencharakter von τ bzw. $\gamma(\tau)$ ersichtlich. Die Parameter zur Charakterisierung des Spannungs- und Deformationszustandes sind h und ω sowie die Richtungskosinusse, die die Lage der Hauptachsen im dreidimensionalen Raum definieren. Somit bleibt die Spezifik der Gleichungen (79) auch für den kompletten dreidimensionalen Deformationstensor erhalten, weil dessen Komponenten in beliebigen Koordinaten durch eine lineare Transformation aus (80) hervorgehen. Die Erweiterung des hier dargelegten Konzeptes auf geometrisch nichtlineare Aufgabenstellungen läßt sich mit Hilfe des schon erwähnten inkrementellen Variationsprinzips von Washizu verwirklichen [19].
Prinzipielle Schwierigkeiten, die etwa die Applikation der beschriebenen Vorgehensweise sehr behindern könnten, treten auch bei Einbeziehung anisotroper Materialeigenschaften nicht auf. Natürlich sind dann die anfallenden Beziehungen wegen der

fehlenden Identität von Hauptdehnungs- und Hauptspannungsrichtungen viel komplizierter. Andererseits erschwert das Vorhandensein materialspezifischer Vorzugsrichtungen sowohl die Bestimmung der den Spannungszustand charakterisierenden Parameter als auch die asymptotische Analyse. Bezüglich des asymptotischen Verhaltens ergeben sich hierbei interessante, in Bezug auf die Festigkeit, vergleichbare Aufgabenstellungen. Einerseits wurde kürzlich gezeigt [41, 42, 43, 44], daß die Eigenfunktionen für den zweidimensionalen anisotropen Fall ähnlich den hier entwickelten Eigenfunktionen (43) durch Kosinus- und Sinusfunktionen darstellbar sind. Andererseits lassen sich die Anisotropien in Anwendung allgemeiner Variationsprinzipien mit Hilfe der isotropen Eigenfunktionsentwicklungen abhandeln [19]. Im Prinzip zerlegt man hierbei, analog dem Vorgehen im Rahmen der Fließtheorie, die anisotropen Anteile der asymptotischen Gleichungen in die isotropen Eigenfunktionen. Der Vorteil dieses Zugangs besteht darin, daß die so erstellten anisotropen Lösungen anhand von isotropen Eigenfunktionen in der Festigkeitsanalyse mit den isotropen Lösungen vergleichbar und damit Festigkeitsoptimierungsstrategien im Hinblick auf die Verwendung anisotroper Materialien möglich werden.

Literatur

[1] M.L. Williams: The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media, Bulletin of the Seismological Society of America, **49**(1959), pp. 199–204.

[2] G.C. Sih, J.R. Rice: The Bending of Plates of Dissimilar Materials With Cracks, Journal of Applied Mechanics, **31**(1964), pp. 477–482.

[3] J.R. Rice: Elastic Fracture Concepts for Interfacial Cracks, Journal of Applied Mechanics, **55**(1988), pp. 98–103.

[4] C.F. Shih, R.J. Asaro: Elastic-Pastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces, Journal of Applied Mechanics, Part 1: **55**(1988), pp. 299–316, Part 2: **56**(1989), pp. 763–779.

[5] T. Hauck, K.P. Herrman: Thermisch beanspruchte Grenzflächenrisse, in: 27. Veranstaltung des DVM-Arbeitskreises Bruchvorgänge, Deutscher Verband für Materialforschung und -Prüfung e.V., 1995 S. 343–351.

[6] B. Michel, J.-P. Sommer, F. Krause, T. Winkler, W. Faust: Bruchmechanische Untersuchungen zur Zuverlässigkeitsbewertung mikromechanischer Aufbauten, in: 27. Veranstaltung des DVM-Arbeitskreises Bruchvorgänge, Deutscher Verband für Materialforschung und -Prüfung e.V., 1995 S. 313–320.

[7] E.P. Chen: Finite Element Analysis of a Bimaterial Interface Crack, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, **3**(1985), pp. 257–262.

[8] S.B. Barsoum: Evaluation of Asymptotic Field at Interfaces of Ductile Materials, in: Advances in Fracture Research, Proceedings of the 7th International Conference on Fracture, Ed. by K. Salama et al., Pergamon Press, Oxford, **3**(1989), pp. 277–284.

[9] P.P. Matos, R.M. McMeeking, P.G. Charalambides, M.D. Drory: A Method for Calculating Stress Intensities in Bimaterial Fracture, International Journal of Fracture, **40**(1989), pp. 235–254.

[10] Y. Yang: Spannungssingularitäten in Zweistoffverbunden bei mechanischer und thermischer Belastung, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 Nr. 113. Düsseldorf: VDI-Verlag 1992, 170 Seiten.

[11] J.N. Rabotnov: Mechanics of the Deformable Solid (in Russisch), Nauka, Moskva, 1979, 744 Seiten.

[12] M. Scherzer: Asymptotic Equations for Nonlinear Strains in Material Interface Corners and Cracks, in: Advances in Fracture Research Resistance and Structural Integrity, Ed. by K. Panasyuk et al., Pergamon, 1994, pp. 145–152.

[13] L.M. Kachanov: Foundations of Plasticity (in Russisch), Nauka, Moskva, 1969, 420 Seiten.

[14] M. Scherzer: Asymptotic Equations for Bimaterial Interface Corners in the Non-Linear Deformation Field, in: Mis-Matching of Welds, ESIS (Edited by K.-H. Schwalbe and M. Kocak) 1994, Mechanical Engineering Publications, London, pp. 161–175.

[15] J.W. Hutchinson: Singular Behaviour at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material, Journal of Mechanical Physics of Solids, **16**(1968), pp. 13–31.

[16] W.D. Klushnikov: Mathematical Theory of Plasticity (in Russisch), Isdatelstvo Moskovskovo Universiteta, Moskva, 1979, 207 Seiten.

[17] A.A. Iljushin: Plasticity, Foundations of General Mathematical Theory (in Russisch), Isdatelstvo AN SSSR, Moskva, 1963, 271 Seiten.

[18] M. Scherzer: Asymptotic Equations for the Isotropic Hardening Flow Theory in Singular Points, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **74**(1994), T 184–T 186.

[19] M. Scherzer: Zur Berechnung von Spannungs- und Deformationsfeldern an Interface-Ecken im physikalisch und geometrisch nichtlinearen Deformationsbereich auf Parallelrechnern, (in Vorbereitung).

[20] W.G. Rekach: Guidance for Solving Problems in Elasticity (in Russisch), Isdatelstvo Vysshaja Shkola, Moskva, 1977, 215 Seiten.

[21] A. Rich et al. (Eds.): User Manual DERIVE, Soft Warehouse, Inc., Honolulu, Hawaii, U.S.A., 1994, 773 Seiten.

[22] W.A. Kondratjew: Boundary Value Problems of Elliptical Equations in Domains with Conical or Angular Points (in Russisch), Trudi Moskovskovo Matematicheskovo Obchestwa, **16**(1967), pp. 209–292.

[23] A.I. Lurje: Nonlinear Theory of Elasticity (in Russisch), Nauka, Moskva, 1980, 512 Seiten.

[24] R. D. Gregory: Green Functions, Bi-linear Forms and Completeness of Eigenfunctions for Elastistatic Strip and Wedge, Journal of Elasticity, **9**(1979), 3, pp. 283–309.

[25] A.I. Kolmogorov, S.W. Fomin: Elements of Theory of Functions and Functional Analysis (in Russisch), Nauka, Moskva, 1976, 543 Seiten.

[26] G.A. Korn, T.M. Korn: Mathematical Handbook, McGraw-Hill Book Company, London, 1968, 831 Seiten.

[27] W.A. Lomakin: Theory of Elasticity for Nonhomogeneous Solids (in Russisch), Isdatelstvo Moskovskovo Universiteta, Moskva, 1976, 367 Seiten.

[28] O.C. Zienkiewicz: Methode der finiten Elemente, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1984, 743 Seiten.

[29] D. Michael, A. Meyer: Some Remarks on the Simulation of Elasto-Plastic Problems on Parallel Computers, TU Chemnitz-Zwickau, Preprint-Reihe der Chemnitzer DFG-Forschergruppe „Scientific Parallel Computing“, Chemnitz, SPC 95/13, 22 Seiten.

[30] G. Dreier, S. Schmauder: T-Stress Related to Thermal Residual Stresses in Bimaterials, Scripta METALLURGICA et MATERIALA, **28**(1993), pp. 103–108.

[31] G. Haase, T. Hommel, A. Meyer, M. Pester: Bibliotheken zur Entwicklung paralleler Algorithmen, TU Chemnitz-Zwickau, Preprint-Reihe der Chemnitzer DFG-Forschergruppe „Scientific Parallel Computing“, Chemnitz, SPC 95/20, 50 Seiten.

[32] A. Meyer: A Parallel Preconditioned Conjugate Gradient Method Using Domain Decomposition and Inexact Solvers on Each Subdomain, Computing, **45**(1990), pp. 217–234.

[33] U. Groh: Lokale Realisierung von Vektoroperationen auf Parallelrechnern, TU Chemnitz-Zwickau, Preprint-Reihe der Chemnitzer DFG-Forschergruppe „Scientific Parallel Computing“, Chemnitz, SPC 94/2, 16 Seiten.

[34] A. Sommerfeld: Vorlesungen über Theoretische Physik, Band I, Mechanik, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1968, 256 Seiten.

[35] D. Aurich, E. Sommer: The Effect of Constraint on Elastic-Plastic Fracture, Steel Research, **59**(1988), 8, pp. 358–367.

[36] H. Kordisch, E. Sommer, W. Schmitt: The Influence of Triaxiality on Crack Growth, Nuclear Engineering and Design, **112**(1988), pp. 27–35.

[37] W. Brocks, W. Schmitt: The Role of Crack Tip Constraint for Ductile Tearing, in: D. Firrao (Ed.): Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures, Preprints of the 8th European Conference on Fracture - ECF8, Engineering Materials Advisory Services (EMAS) Warley II (1990), pp. 1023–1032.

[38] E.W. Lomakin: Nonlinear Deformation of Materials which Resistance Depends on Type of Stress Condition (in Russisch), Isvestija AN SSSR, Mechanika Twerdovo Tela, 1980, 4, pp. 92–99.

[39] A.A. Lebedjew, B.I. Kowalchuk, F.F. Giginjak, W.P. Lamashewski: Mechanical Characteristics of Constructional Materials under Complicated Stress Conditions (in Russisch), Naukova Dumka, Kiev, 1983, 366 Seiten.

[40] W.S. Parton, P.I. Perlin: Methods of Mathematical Theory of Elasticity (in Russisch), Nauka, Moskva, 1981, 688 Seiten.

[41] M. Costabel, M. Dauge: Constructions of Corner Singularities for Agmon-Douglis-Nierenberg Elliptic Systems, Mathematische Nachrichten, **162**(1993), pp. 209–237.

[42] M. Costabel, M. Dauge: Computations of Corner Singularities in Linear Elasticity, Institut de Recherche Mathematique de Rennes, Universite de Rennes 1, Prepublication 93/23, 10 Seiten.

[43] J.L. Bassani, J. Qu: Fracture Parameters for Interface Cracks, in: H.A. Ernst et al. (Eds.): Fracture Mechanics: Twenty-Second Symposium (Volume I), ASTM STP 1131, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1992, pp. 549–559.

[44] M. Heinzelmann, M. Busch: Versagensverhalten von einkristallinem Silizium an scharfen Kerben, in: 27. Veranstaltung des DVM-Arbeitskreises Bruchvorgänge, Deutscher Verband für Materialforschung und -Prüfung e.V., 1995 S. 225–233.