TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Sonderforschungsbereich 393

Parallele Numerische Simulation für Physik und Kontinuumsmechanik

Arnd Meyer Peter Nestler

Mindlin-Reissner-Platte : Einige Elemente, Fehlerschätzer und Ergebnisse

Preprint SFB393/05-04

Preprintreihe des Chemnitzer SFB 393

ISSN 1619-7178 (Print) ISSN 1619-7186 (Internet)

SFB393/05-04 April 2005

Inhaltsverzeichnis

Author's addresses:

A. Meyer
P. Nestler
TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik
D-09107 Chemnitz

http://www.tu-chemnitz.de/sfb393/

1 Einleitung

Dieses Preprint beschäftigt sich mit einem Teilgebiet der linearen Elastizitätstheorie. Es werden einige Forschungsergebnisse zu der Mindlin-Reissner-Platte vorgestellt und diskutiert. Weiterhin wird auf einige Schwierigkeiten im Umgang mit den einzelnen Elementen hingewiesen. Zum Abschluß werden dann noch diverse Fehlerschätzerentwicklungen vorgestellt und einige Ergebnisse diskutiert.

2 Mindlin-Reissner-Plattentheorie

In diesem Abschnitt soll nur ein kurzer Abriss der Plattentheorie erfolgen. Zum tieferen Verständniss wird auf [1,4] verwiesen, wo dies alles ausführlich dargestellt worden ist.

Man betrachtet eine dünne Platte mit konstanter Dicke t, deren Mittelebene mit der (x_1, x_2)-Ebene übereinstimmt.

$$\Omega^{3D} = \Omega \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right),\ \Omega \in \mathbb{R}^2$$

Die Platte wird durch äußere Kräfte belastet, die orthogonal zur Mittelebene sind, d.h die Kräfte wirken nur in x_3-Richtung auf die Platte ein $\vec{f} = \vec{e}_3 \cdot f(x_1, x_2)$.

<u>Hypothesen von Mindlin und Reissner</u>

H1 Linearitätshypothese. Die Segmente auf jeder Normalen werden linear deformiert, d.h. die Punkte auf $x \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right)$ bleiben auf einer Geraden ($\forall\ x \in \Omega$).

H2 Die Verschiebungen in x_3-Richtung sind unabhängig von der x_3-Koordinate.

H3 Die Punkte auf der Mittelebene werden nur in x_3-Richtung deformiert.

H4 Die Normalspannung σ_{33} verschwindet, d.h. es gilt ebener Spannungszustand ($\sigma_{33} = 0$).

Mit den Hypothesen H1-H3 haben die Verschiebungen folgende Gestalt

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3) &= -x_3\theta_i(x_1, x_2) \qquad i = 1, 2 \qquad (1) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= \quad w(x_1, x_2) \qquad (2) \end{aligned}$$

Wobei w als tranversale Verschiebung und $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$ als Verdrehung (bezüglich x_1- und x_2-Achse) bezeichnet wird.

Das Energiefunktional

$$\Pi(u) := \int_{\Omega^{3D}} \left[\frac{1}{2}\varepsilon(u) : \sigma(u) - \vec{f} \cdot u\right] d\Omega^{3D} + \int_{\partial\Omega^{3D}} \vec{g} \cdot u\, dS$$

kann nun mit Hilfe von (1),(2), den entsprechenden Ableitungen, Integration über die x_3-Variable wie folgt geschrieben werden.

$$a(w,\theta,\tilde{w},\tilde{\theta}) = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{\Omega} 2\mu x_3^2 \varepsilon(\theta) : \varepsilon(\tilde{\theta}) + x_3^2 \lambda_{ESZ} \mathsf{div}\,\theta \mathsf{div}\,\tilde{\theta} \tag{3}$$

$$+ \mu\kappa(\nabla w - \theta)^T (\nabla \tilde{w} - \tilde{\theta})\, d\Omega\, dx_3$$

oder vereinfacht

$$a(w,\theta,\tilde{w},\tilde{\theta}) = t^2 a_1(\theta,\tilde{\theta}) + \mu\kappa(\nabla w - \theta, \nabla \tilde{w} - \tilde{\theta})_0 \tag{4}$$

mit

$$a_1(\theta,\tilde{\theta}) = \frac{1}{12} \int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\tilde{\theta}) + \lambda_{ESZ} \mathsf{div}\,\theta \mathsf{div}\,\tilde{\theta}\, d\Omega.$$

Der erste Term enthält den Biegeanteil, ist ein ganz normales 2D Elastizitätsproblem. Der zweite Term ist der Scherterm, der hier von besonderer Bedeutung ist und mit verschieden Ansätzen behandelt werden kann. Daraus ergibt sich nun für die verschiedenen Ansätze folgende Grundgleichung mit entsprechender Skalierung :

$$a_0(\theta,\tilde{\theta}) = \frac{1}{12\kappa} \int_{\Omega} 2\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\tilde{\theta}) + \frac{\lambda_{ESZ}}{\mu} \mathsf{div}\,\theta \mathsf{div}\,\tilde{\theta}\, d\Omega \tag{5}$$

Man löst

$$a_0(\theta,\tilde{\theta}) + t^{-2}(\nabla w - \theta, \nabla \tilde{w} - \tilde{\theta})_0 = \left(\frac{f}{t^2\mu\kappa}, \tilde{w}\right)_0.$$

Im weiteren wird folgende Abkürzung verwendet :

$$\tilde{f} := \frac{f}{t^2\mu\kappa}.$$

3 Elemente

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die oben genannte Gleichung zu diskretisieren. In diesem Artikel werden drei verschiedene Elementetypen vorgestellt. Nähere Einzelheiten zum Aufbau der lokalen Steifigkeitsmatrizen sind in [1] zu finden. Es wird nur auf einigen Besonderheiten beim Aufbau der Steifigkeitsmatrizen eingegangen.

3.1 Allgemeine Dreiecks- bzw. Viereckselemente

Dies sind die einfachsten Elemente, die zur Diskretisierung verwendet werden können, haben aber entscheidende Nachteile bezüglich Konvergenz und Genauigkeit, weil der Raum für den Scherterm $\mathbb{H}_0(\mathsf{rot}\,,\Omega)$ nicht berücksichtigt wird.

Elemente :

TRI3	allgemeines lineares Dreieckselement
Quad4	allgemeines bilineares Viereckselement
TRI6	allgemeines quadratisches Dreieckselement
Quad8	allgemeines biquadratisches Viereckselement (Serendipity-Klasse)
TRI7	allgemeines quadratisches Dreieckselement + Bubblefunction
Quad9	allgemeines biquadratisches Viereckselement + Bubblefunction

Die Unterschiede zwischen TRI6 und TRI7 und oder Quad8 oder Quad9 sind nicht wesentlich. Durch Hinzunahme der Bubblefunktion wird die Approximationsgüte der einzelnen Elemente bezüglich des Finite Elemente Raums erhöht. Man erhält aber leider keine nennenswerten Verbesserungen bezüglich der Lösung und des Konvergenzverhaltens.

Bei der Implementierung wird, wie in [1] erwähnt, der Reduktionsoperator im Biegeanteil auf $R_h = I$ gesetzt. Damit vereinfacht sich die Implementierung wesentlich.

3.2 Arnold und Falk-Element

Das Plattenproblem wird als gemischte Formulierung dargestellt und eine neue Schervariable

$$\gamma = (t^{-2} - \alpha)(\nabla w - \theta) \text{ und } 0 \leq \alpha < t^{-2}$$

eingeführt. Daraus entsteht folgendes Problem :

Gesucht wird $(w, \theta) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)^2$ und $\gamma \in L_2(\Omega)^2$, so daß

$$\begin{aligned} a(w, \theta, \tilde{w}, \tilde{\theta}) + b(\tilde{w}, \tilde{\theta}, \gamma) &= (\tilde{f}, \tilde{w}) \\ b(w, \theta, \tilde{\gamma}) - c(\gamma, \tilde{\gamma}) &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a(w, \theta, \tilde{w}, \tilde{\theta}) &= a_0(\theta, \tilde{\theta}) + (\alpha(\nabla w - \theta), \nabla \tilde{w} - \tilde{\theta})_0 \\ b(w, \theta, \tilde{\gamma}) &= (\nabla w - \theta, \tilde{\gamma})_0 \\ c(\gamma, \tilde{\gamma}) &= (t^2/(1 - \alpha t^2)\gamma, \tilde{\gamma})_0. \end{aligned}$$

und

$$\forall\, \tilde{w} \in \mathbb{H}_0^1,\ \forall\, \tilde{\theta} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)^2 \text{ und } \tilde{\gamma} \in L_2(\Omega)^2$$

gilt. Damit ergibt sich für die FEM folgende Raumkonstellation :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_w &:= \mathbb{P}_2(\mathcal{T}) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega) \\ \mathbb{H}_\theta &:= (\mathbb{P}_1(\mathcal{T}) + \mathbb{B}_3(\mathcal{T})^2 \cap (\mathbb{H}_0^1(\Omega))^2 \\ \mathbb{L}_\gamma &:= (\mathbb{P}_0(\mathcal{T})^2, \end{aligned}$$

wenn mit $\mathbb{P}_k(\mathcal{T})$ der Raum der Polynome k-ten Grades auf jedem Element $\tau \in \mathcal{T}$ bezeichnet wird (ab $k \geq 1$ sind dies stetige Funktionen).

Die Diskretisierung der Gleichungen weicht einwenig ab von den bisherigen Elementen, deshalb soll hier darauf kurz eingegangen werden.

3.2.1 Diskretisierung des Arnold und Falk - Elements

Man verwendet folgende Ansätze :

$$\begin{array}{rcll} w & = & \Phi\underline{w} & \Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{nw}),\ \phi_i \ldots \text{Ansatzfkt. für } w \\ \theta & = & \vec{\Psi}\underline{\theta} & \vec{\Psi} = (\psi_1\vec{e}_1, \psi_1\vec{e}_2 \ldots, \psi_{n_\theta}\vec{e}_1, \psi_{n_\theta}\vec{e}_2),\ \psi_i\vec{e}_k \ldots \text{Vektoransatzfkt. für } \theta \\ \gamma & = & \vec{\Xi}\underline{\gamma} & \vec{\Xi} = (\vartheta_1\vec{e}_1, \vartheta_1\vec{e}_2 \ldots, \vartheta_{nel}\vec{e}_1, \vartheta_{nel}\vec{e}_2),\ \vartheta_i = \begin{cases} 1 & \text{im Element } i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Damit lässt sich $a(.,.)$ wie folgt schreiben :

$$a(w, \theta, \tilde{w}, \tilde{\theta}) = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{w}} \\ \underline{\tilde{\theta}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha L & -\alpha B \\ -\alpha B^T & \alpha M + E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix}$$

Der zweite Term in der ersten Gleichung lässt sich ebenso einfach schreiben :

$$b(\tilde{w}, \tilde{\theta}, \gamma) = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{w}} \\ \underline{\tilde{\theta}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_0 \\ -M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\gamma} \end{bmatrix}.$$

Die Matrixblöcke sind definiert wie folgt :

$$\begin{array}{rcl} L & = & (\nabla\Phi)^H(\nabla\Phi) \\ B & = & (\nabla\Phi)^H\vec{\Psi} \\ E & = & \text{Steifigkeitsmatrix des 2D-Elastizitätsproblems (mit } \vec{\Psi}) \\ M & = & \vec{\Psi}^H\vec{\Psi} \\ B_0 & = & (\nabla\Phi)^H\vec{\Xi} \\ M_1 & = & \vec{\Psi}^H\vec{\Xi} \\ D & = & \vec{\Xi}^H\vec{\Xi} = \mathsf{diag}\,(mes\ T_1, mes\ T_1 \ldots, mes\ T_{nel}, mes\ T_{nel}) \end{array}$$

Die Schreibweise $(\ldots)^H(\ldots)$ ist als Matrix der L_2-Skalarprodukte aller einzelnen Ansatzfunktionen zu verstehen.

Die 2.Gleichung lässt sich genauso darstellen :

$$b(w, \theta, \tilde{\gamma}) - c(\gamma, \tilde{\gamma}) = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\gamma}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_0^T & -M_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix} - \frac{t^2}{1 - \alpha t^2}\underline{\tilde{\gamma}}^T D\underline{\gamma}.$$

Damit ergibt sich folgendes elementare Gleichungssystem :

$$\begin{bmatrix} \alpha L & -\alpha B & B_0 \\ -\alpha B^T & \alpha M + E & -M_1 \\ B_0^T & -M_1^T & -\frac{t^2}{1-\alpha t^2} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{\theta} \\ \underline{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dieses nach $\underline{\gamma}$ umgestellt

$$\underline{\gamma} = \frac{1-\alpha t^2}{t^2} D^{-1} (B_0^T \underline{w} - M_1^T \underline{\theta})$$

und wieder eingesetzt, ergibt

$$\begin{bmatrix} \alpha L + \frac{1-\alpha t^2}{t^2} B_0 D^{-1} B_0^T & -\alpha B - \frac{1-\alpha t^2}{t^2} B_0 D^{-1} M_1^T \\ -\alpha B^T - \frac{1-\alpha t^2}{t^2} M_1 D^{-1} B_0^T & \alpha M + E + \frac{1-\alpha t^2}{t^2} M_1 D^{-1} M_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

das endgültige Gleichungssystem. Die Systemmatrix kann lokal, wie bei den anderen Elementen berechnet und aufgestellt werden.

Nähere Informationen zu dem Verhalten der Lösung, Konvergenz und Fehlerschätzer in den folgenden Abschnitten.

3.3 MITC-Elemente

Bei diesen Elementen wird ein spezieller Reduktionsoperator im Scherterm eingeführt.

$$a(w, \theta, \tilde{w}, \tilde{\theta}) = t^2 a_1(\theta, \tilde{\theta}) + \mu\kappa(\nabla w - R_h\theta, \nabla\tilde{w} - R_h\tilde{\theta})_0 \tag{6}$$

Diese Elemente wurden in [1] vollständig beschrieben.

4 Ergebnisse und Vergleich der Elemente

Hier wird ein Beispiel vorgestellt, wo man die Lösung auch analytisch bestimmen kann. Dieses wird nun numerisch berechnet und dabei werden die einzelnen Elemente betrachtet.

Beispiel :

Man betrachtet eine Kreisplatte mit folgenden Abmessungen und Daten :

$$\begin{aligned} \text{Radius} &= 1 \\ \text{Dicke } t &= 0.1 \\ \text{Elastizitätszahl } E &= 1 \\ \text{und die Poisonzahl } \nu &= 0.3. \end{aligned}$$

Die Platte wird als voll eingespannt betrachtet, damit sind alle Randbedingungen gleich Dirichletbedingungen. Für w und θ gelten folgenden Funktionen :

$$\begin{aligned} \theta &= 4(r^2-1)\vec{x} \qquad\qquad r^2 = \vec{x}^T\vec{x} \\ w &= r^4 - r^2(16t^2\alpha+2) + 16t^2\alpha + 1 \end{aligned}$$

Diese werden nun in die Formulierung der Mindlin-Reissner-Platte eingesetzt.

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{12}\mathsf{div}\,\sigma + \kappa\mu(\nabla w - \theta) &= 0 \\ f + \kappa\mu\mathsf{div}\,(\nabla w - \theta) &= 0 \end{aligned}$$

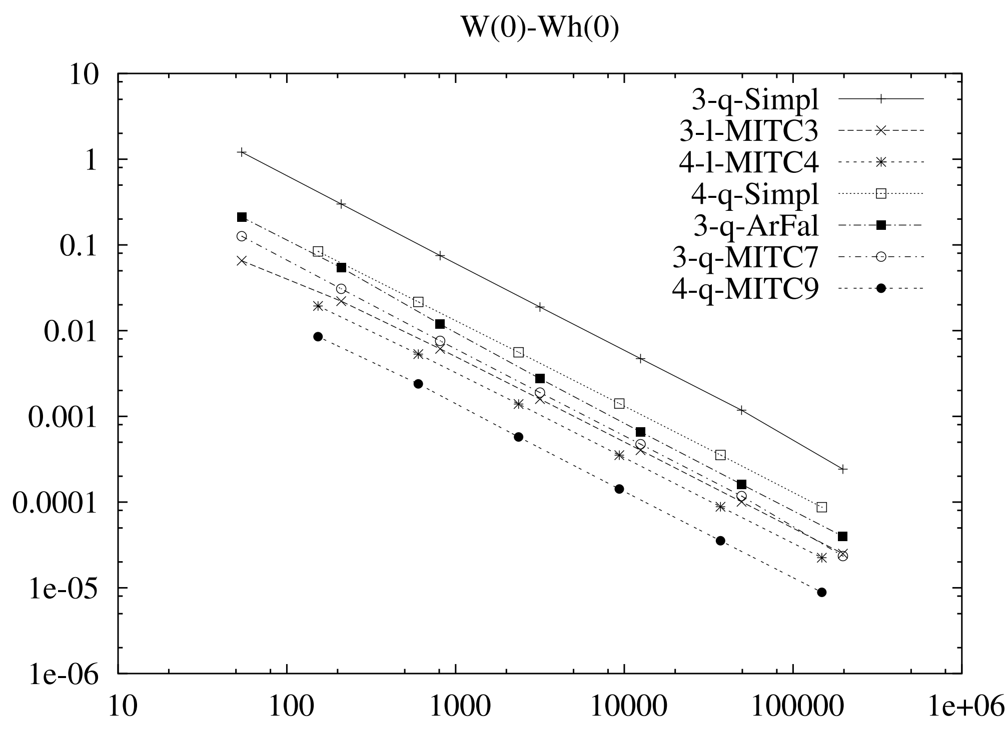
Nach der Berechnung vom Parameter

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{5(1-\nu)} \text{ und der Kraft} \\ f &= Et^2 \cdot 5.8608059 \end{aligned}$$

erhält man diese Maxima :

$$\begin{aligned} w(0) &= 1 + t^2 \cdot 4.571428 \\ \max|\theta| &= 1.5396 \end{aligned}$$

Nun werden alle Elemente mit dieser Lösung verglichen. Man erhält folgende Grafik für den Verlauf von $w(0) - w_h(0)$ über der Knotenanzahl.



Die MITC-Elemente sind bezüglich des Fehlers, die Elemente mit der höchsten Approximationsgüte.

5 Fehlerschätzer / Fehlerindikator

Zuerst ein allgemeiner Fehlerschätzer, der aus dem 3D-Bereich kommt und mit dem speziellen Ansatz für die Mindlin-Reissner-Elemente arbeitet. Dieser ist aber leider nicht mathemathisch korrekt bezüglich der MITC-Elemente, aber als Fehlerindikator benutzbar. Der Scherterm wird nicht exakt berücksichtigt. Aber als Ausgangspunkt für zukünftige mathematisch exakte Fehlerschätzer soll er hier mit erwähnt werden, da er wichtige Implementierungsdetails enthält.

5.1 Allgemein

Der allgemeine 3D-Elastizitätsfehler-Schätzer besitzt folgende Darstellung :

$$\eta_{T^3}^2 = \frac{h_T^2}{\lambda_T} \|\nabla \cdot \sigma_{3D}(u_h) + \vec{f}\|_{T^3,0}^2 + \sum_{E^3 \subset T^3} \frac{h_E}{\lambda_T} \|[\sigma_{3D} \cdot n]\|_{E^3,0}^2 \tag{7}$$

mit $T^3 = T \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right)$ und $E^3 = E \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right)$ (λ_T ist kleinster Eigenwert des Material-Tensor C). Die Klammern $[\ldots]$ bezeichnen den Sprung über Flächen im 3D bzw. Kanten im 2D.

5.2 Resultierender Fehlerindikator für Mindlin-Reissner-Gleichung

Man kann von obigem Fehlerschätzer ausgehen, aber mit den Einschränkungen :

1. u_h erfüllt nicht exakt die 3D-Gleichung (siehe z.B. (6))

$$a_{3D}(u_h, v_h) = (f \cdot \vec{e}_3, v_h) \qquad \forall\ v_h \in \text{ FE-Ansatzraum}$$

2. u^* erfüllt nicht exakt $\sigma_{33} = 0$, aber

$$a_{3D}(u^*, v) = (f \cdot \vec{e}_3, v) \qquad \forall\ v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)^3.$$

Als weitere Voraussetzung wird getroffen, daß die Materialparameter, speziell λ_{ESZ} (ebener Spannungszustand), identisch sind in beiden Gleichungen. Damit wäre die Galerkin-Orthogonalität des Fehlers

$$a_{3D}(u^* - u_h, v_h) = 0 \qquad v_h \in \text{ FE-Ansatzraum}$$

erfüllt und obiger Fehlerschätzer definierbar. Wie bereits erwähnt trifft dies nicht bei MITC-Elementen / Arnold und Falk-Element zu, wegen des speziellen Reduktionsoperators. Aber als Fehlerindikator ist (7) durchaus geeignet.

Es wird folgender Ansatz für u_h verwendet :

$$u_h = \begin{bmatrix} -x_3\theta_h^1 \\ -x_3\theta_h^2 \\ w_h \end{bmatrix} \Longrightarrow \varepsilon_{3D} = \begin{bmatrix} -x_3\varepsilon_{2D}(\theta_h) & \frac{1}{2}(\nabla w_h - \theta_h) \\ \frac{1}{2}(\nabla w_h - \theta_h)^T & 0 \end{bmatrix}$$

wobei θ_h^i und w_h von (x_1, x_2) abhängig sind. Damit ergeben sich folgende Formeln. Für

$$\sigma_{3D} = 2\mu\varepsilon + \lambda_{ESZ}\mathsf{spur}\,\varepsilon \cdot I$$

erhält man

$$\sigma_{3D} = \begin{bmatrix} -x_3\sigma_{2D}(\theta_h) & \mu(\nabla w_h - \theta_h) \\ \mu(\nabla w_h - \theta_h)^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Unter Beachtung der Flächen $T \times \frac{t}{2}$ bzw. $T \times -\frac{t}{2}$ und Integration über die x_3-Variable entsteht für den Elementanteil im Fehlerindikator folgende Gleichung

$$\frac{h_T^2}{\lambda_T}\left(\left\|\frac{t^2}{12}\nabla_{2D}^T\sigma_{2D}(\theta_h) + \mu(\nabla w_h - \theta_h)^T\right\|_T^2 + \|\mu\nabla_{2D}^T(\nabla w_h - \theta_h) + f\|_T^2\right).$$

Im zweiten Teil des Fehlerindikators, also der Summe über die Kanten ergibt sich folgendes

$$\sum_{E\subset T}\frac{h_E}{\lambda_T}\left(\left\|\frac{t^2}{12}[\sigma_{2D}(\theta_h)\cdot n]\right\|_E^2 + \|[\mu(\nabla w_h - \theta_h)\cdot n]\|_E^2\right).$$

5.3 (Bi-)Lineare Elemente

Für die linearen Elemente vereinfachen sich obige Formeln. Die Berechnung wird an dieser Stelle kurz dargestellt. Es werden folgende Ansätze für $w_h, \theta_h^i,\ i = 1,2$ verwendet

$$w_h = \sum_j \hat{\phi}_j w^{(j)} \qquad \theta_h^i = \sum_j \hat{\psi}_j \theta_j^{(i)}.$$

1. Betrachtung von $\nabla^T\sigma_{2D}(\theta_h)$:

   $$\sigma_{2D}(\theta_h) = \begin{bmatrix} 2\mu\partial_1\theta_h^1 + \lambda_{ESZ}\mathsf{div}\,\theta_h & \mu(\partial_2\theta_h^1 + \partial_1\theta_h^2) \\ \mu(\partial_2\theta_h^1 + \partial_1\theta_h^2) & 2\mu\partial_2\theta_h^2 + \lambda_{ESZ}\mathsf{div}\,\theta_h \end{bmatrix}$$

   Offensichtlich ist für das lineare Dreickselement $\nabla^T\sigma_{2D}(\theta_h) = 0$. Bei den **bilinearen Elementen** sind nur die gemischten Ableitungen von Null verschieden. Daraus folgt :

   $$\nabla^T\sigma_{2D}(\theta_h) = (\lambda_{ESZ} + \mu)\begin{bmatrix} \partial_{12}^2\theta_h^2 & \partial_{12}^2\theta_h^1 \end{bmatrix}$$

2. Betrachtung von $\mu(\nabla w_h - \theta_h)$:

   Bei diesem Term muß keine spezielle Umformung vorgenommen werden. Üblicherweise wird der sogenannte Scherterm γ_h mit dem Scherkorrekturfaktor $\kappa = 5/6$ multipliziert, der im folgenden stets benutzt wird

   $$\gamma_h := \mu\kappa(\nabla w_h - \theta_h).$$

3. Betrachtung von $\mu\kappa\nabla^T(\nabla w_h - \theta_h)$:

   $$\begin{aligned} \mu\kappa\nabla^T(\nabla w_h - \theta_h) &= \mu\kappa(\nabla^T\nabla w_h - \nabla^T\theta_h) \\ &= \mu\kappa(\Delta w_h - \nabla^T\theta_h) \end{aligned}$$

   Offensichtlich entfällt für das lineare Dreieckselement Δw_h.

4. Betrachtung des Kanten-Anteils im Fehlerschätzer :

   $$\frac{h_E}{\lambda_T}\left(\left\|\frac{t^2}{12}[\sigma_{2D}(\theta_h)\cdot n]\right\|_E^2 + \|[\mu\kappa(\nabla w_h - \theta_h)\cdot n]\|_E^2\right).$$

   Bei diesem Anteil muß auch nichts besonders umgeformt oder beachtet werden.

5.4 Quadratische Elemente

Bei den höheren Elementen verschwinden keine Terme im Fehlerschätzer (Fehlerindikator) mehr. Dies hat zur Folge, dass kompliziertere Formeln für den Fehlerschätzer nötig sind.

1. Betrachtung von $\nabla^T\sigma_{2D}(\theta_h)$: In diesem Fall muß $\nabla^T\sigma_{2D}$ komplett berechnet werden, weil die 2.Ableitungen von θ_h^i existieren und von Null verschieden sind. D.h.

   $$\nabla^T\sigma_{2D}(\theta_h) = \begin{bmatrix} (2\mu+\lambda_{ESZ})\partial_1^2\theta_h^1 + (\lambda_{ESZ}+\mu)\partial_{12}^2\theta_h^2 + \mu\partial_2^2\theta_h^1 \\ (2\mu+\lambda_{ESZ})\partial_2^2\theta_h^2 + (\lambda_{ESZ}+\mu)\partial_{12}^2\theta_h^1 + \mu\partial_1^2\theta_h^2 \end{bmatrix}^T$$

2. Betrachtung von $\mu\kappa(\nabla w_h - \theta_h)$ ist analog zu den linearen Elementen.

3. Betrachtung von $\mu\kappa\nabla^T(\nabla w_h - \theta_h)$ ist auch wieder analog zu den linearen Elementen.

4. Betrachtung des Kanten-Anteils im Fehlerschätzer ist auch analog wie bei den linearen Elementen aufzubauen.

5.5 Implementierung

Setzen isotropes Netz $h_E = |E|$ und $h_T = |T|$ voraus. Damit ergeben sich folgende Berechnungen. Zur Vereinfachung wird folgende Darstellung verwendet :

$$\eta_T^2 = \frac{h_T^2}{\lambda_T}(\eta_{1,T} + \eta_{2.T}) + \sum_{E \subset T} \frac{h_E}{\lambda_T}(\eta_{1,E} + \eta_{2,E})$$

1. $\underline{\frac{t^2}{12}\mathsf{div}\,\sigma_{2D}(\theta_h) + \mu\kappa(\nabla w_h - \theta_h)}$ **im Elementanteil**

   Die Berechnung von $\nabla^T \sigma_{2D}$ ist etwas schwieriger, weil wie beim folgenden Term die Darstellung im natürlichen Koordinatensystem erfolgen muß. Deshalb ist es sinnvoll eine Aufteilung des Spannungstensors σ_{2D} vorzunehmen damit dieser einfach numerisch berechenbar wird.

$$\begin{aligned}
\sigma_{2D}(\theta_h) &= \begin{bmatrix} 2\mu\partial_1\theta_h^1 + \lambda_{ESZ}\mathsf{div}\,\theta_h & \mu(\partial_2\theta_h^1 + \partial_1\theta_h^2) \\ \mu(\partial_2\theta_h^1 + \partial_1\theta_h^2) & 2\mu\partial_2\theta_h^2 + \lambda_{ESZ}\mathsf{div}\,\theta_h \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mu\partial_1\theta_h^1 & \mu\partial_1\theta_h^2 \\ \mu\partial_2\theta_h^1 & \mu\partial_2\theta_h^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu\partial_1\theta_h^1 & \mu\partial_2\theta_h^1 \\ \mu\partial_1\theta_h^2 & \mu\partial_2\theta_h^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{ESZ}\mathsf{div}\,\theta_h & \\ & \lambda_{ESZ}\mathsf{div}\,\theta_h \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

   Daraus folgt

$$\nabla^T \sigma_{2D} = \mu[\mathsf{spur}\,(\nabla\nabla^T\theta_h^1) \vdots \mathsf{spur}\,(\nabla\nabla^T\theta_h^2] + (\mu + \lambda_{ESZ})[\partial_1\mathsf{div}\,\theta_h \vdots \partial_2\mathsf{div}\,\theta_h].$$

   Zur einfachen Berechnung setzt man $\vec{\alpha} = [\alpha_1\ \alpha_2]^T$ mit :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \mu\,\mathsf{spur}\,(\nabla\nabla^T\theta_h^1) + \beta_1 \\
\alpha_2 &= \mu\,\mathsf{spur}\,(\nabla\nabla^T\theta_h^2) + \beta_2
\end{aligned}$$

   mit

$$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = (\lambda_{ESZ} + \mu)\nabla\mathsf{div}\,\theta_h.$$

   Weiterhin

$$\vec{r} = \mu\kappa(\nabla w_h - \theta_h) = \mu\kappa(J^{-T}\hat{\nabla}w_h - \theta_h)$$

$$\begin{aligned}
\eta_{1,T} &:= \int_T \left\| \frac{t^2}{12}\nabla^T\sigma_{2D}(\theta_h) + \mu\kappa(\nabla w_h - \theta_h)^T \right\|^2 d\Omega_{2D} \\
\text{nutzen Mittelpunktregel (MP)} \quad &\approx \omega_g \left(\frac{t^2}{12}\vec{\alpha} + \vec{r}\right)_{|MP}^T \left(\frac{t^2}{12}\vec{\alpha} + \vec{r}\right)_{|MP} \cdot |\det(J)|.
\end{aligned}$$

Mit folgenden einfachen Berechnungsformeln :

$$\begin{aligned}
\mu \,\mathsf{spur}\,(\nabla\nabla^T\theta_h^i) &= \mu\,\mathsf{spur}\,(J^{-T}_{|MP}(\hat{\nabla}\hat{\nabla}^T\theta_h^i)_{|MP}J^{-1}_{|MP}) \text{ und} \\
\beta_i &= (\lambda_{ESZ}+\mu)J^{-T}_{|MP}\left(\sum_{j=1}^{Ne}(\hat{\nabla}\hat{\nabla}^T\psi_j J^{-1}\theta_j^i)_{|MP}\right) \\
\text{wegen } \theta_h^i &= \sum_j \psi_j(\hat{x})\theta_j^i,
\end{aligned}$$

wobei J der Jacobian der Abbildung auf das Masterelement ist.

2. $\mu\kappa\,\mathsf{div}\,(\nabla w_h - \theta_h) + f$ **im Elementanteil**

Dieser Term wird mit Hilfe

$$\nabla^T\nabla = \mathsf{spur}\,(\nabla\nabla^T)$$

berechnet. Weil man beachten muß, daß der Gradient immer im natürlichen Koordinatensystem dargestellt wird und die Matrix für den Basiswechsel ebenfalls von $\hat{x}$ abhängen kann. Daraus ergibt sich folgende Berechnungsformel :

$$\begin{aligned}
\mu\kappa\nabla^T(\nabla w_h - \theta_h) &= \mu\kappa\,\mathsf{spur}\,(\nabla(\nabla^T w_h - \theta_h^T)) \\
&= \mu\kappa\,\mathsf{spur}\,(J^{-T}\hat{\nabla}\hat{\nabla}^T w_h J^{-1}) - \mu\kappa\,\mathsf{spur}\,(J^{-T}\hat{\nabla}\theta_h^T),
\end{aligned}$$

womit sich ergibt :

$$\begin{aligned}
\eta_{2,T} &:= \int_T \|\mu\kappa\,\mathsf{spur}\,(J^{-T}\hat{\nabla}\hat{\nabla}^T w_h J^{-1}) - \mu\kappa\,\mathsf{spur}\,(J^{-T}\hat{\nabla}\theta_h^T) + f\|^2\, d\Omega_{2D} \\
&\approx \omega_g\{\mu\kappa\,[\mathsf{spur}\,(J^{-T}_{|MP}(\hat{\nabla}\hat{\nabla}^T w_h)_{|MP}J^{-1}_{|MP}) \\
&\qquad - \mathsf{spur}\,(J^{-T}_{|MP}(\hat{\nabla}\theta_h^T)_{|MP})] + f\}^2|\det J|
\end{aligned}$$

3. $\frac{t^2}{12}\sigma_{2D}(\theta_h)$ **im Kantenanteil**

Für $\eta_{1,E}^2$ ist obige Formel einfach zu implementieren. Die Terme für die Kanten werden wie folgt berechnet :

$$\begin{aligned}
\eta_{1,E} &= \frac{|E|}{\lambda_T}\int_E \left\|\left[\frac{t^2}{12}\sigma_{2D}\cdot n_{2D}\right]\right\|^2 dS \\
&\approx \frac{\omega_g}{\lambda_T}\left\|\left[\frac{t^2}{12}\sigma_{2D}(\theta_h)_{|MP}\cdot E^{\perp}\right]\right\|^2.
\end{aligned}$$

4. $\underline{\mu\kappa(\nabla w_h - \theta_h)}$ **im Kantenanteil**

   Für $\eta_{2,E}$ ergibt sich ein analoges Vorgehen. D.h.

$$\begin{aligned}\eta_{2,E} &= \frac{|E|}{\lambda_T}\int_E \|[\mu\kappa(\nabla w_h - \theta_h)\cdot n_{2D}]\|^2\,dS \\ &\approx \frac{\omega_g}{\lambda_T}\|[\mu\kappa(\nabla w_{h|_{MP}} - \theta_{h|_{MP}})\cdot E^{\perp}]\|^2\end{aligned}$$

5.6 Fehlerindikator mit speziellem $\sigma(\theta_h)$

Da bei MITC-Elementen ein spezieller Ansatz verwendet wird, kann man obigen Fehlerindikator auch dahin abändern, daß er den Reduktionsoperator im Scherterm mit beachtet. Damit ergibt sich folgendes σ_{3D}

$$\sigma_{3D} = \begin{bmatrix} -x_3\sigma_{2D}(\theta_h) & \mu R_h(\nabla w_h - \theta_h) \\ \mu R_h(\nabla w_h - \theta_h)^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Man erhält dann diesen Fehlerindikator :

$$\frac{h_T^2}{\lambda_T}\left(\left\|\frac{t^2}{12}\nabla_{2D}^T\sigma_{2D}(\theta_h) + \mu\kappa(\nabla w_h - R_h\theta_h)^T\right\|_T^2 + \|\mu\kappa\nabla_{2D}^T(\nabla w_h - R_h\theta_h) + f\|_T^2\right).$$

und bezüglich der Kanten :

$$\sum_{E\subset T}\frac{h_E}{\lambda_T}\left(\left\|\frac{t^2}{12}[\sigma_{2D}(\theta_h)\cdot n]\right\|_E^2 + \|[\mu\kappa(\nabla w_h - R_h\theta_h)\cdot n]\|_E^2\right).$$

Dieser Fehlerindikator, ist nicht exakt mathematisch herleitbar, weil der Reduktionsoperator in der 3D-Gleichung nicht auftritt und damit keine Galerkin-Orthogonalitäten berechnet werden können. Aber um den speziellen Typ der MITC-Elemente hervorzuheben, ist der Fehlerindikator mit R_h geeignet.

Die Implementierung der einzelnen Terme ist analog wie in dem vorangegangem Abschnitt beschrieben. An dieser Stelle wird nur auf einige Besonderheiten eingegangen. Nähere Details zum Reduktionspoerator R_h siehe [1].

In diesem Fall wird $\nabla w_h - \theta_h$ durch $\nabla w_h - R_h\theta_h$ ersetzt. Vermutlich könnte der Projektor R_h im Fehlerschätzer eine besondere Bedeutung einnehmen, was aber erst noch bestätigt werden muß.

Der Projektor $R_h\theta$ besitzt folgende Darstelung :

$$-R_h\theta_h = J^{-T}MH^{-1}Z\cdot\underline{\theta}.$$

$M = M(\hat{x})$ enthält die Vektoransatzfunktionen des Raumes Γ_h bezüglich des Masterelementes. Damit ändern sich folgende Terme :

1. $\underline{\mu\kappa\,\mathsf{div}\,(\nabla w_h - R_h\theta_h) + f}$ **im Elementanteil**

$$\begin{aligned}\eta_{2,T} &= \int_T \|\mu\kappa\,\mathsf{spur}\,(J^{-T}\hat{\nabla}\hat{\nabla}^T w_h J^{-1}) - \mu\kappa\,\mathsf{spur}\,(J^{-T}\hat{\nabla}(R_h\theta_h)^T) + f\|^2\, d\Omega_{2D}\\ &\approx \omega_g\{\mu\kappa\,[\mathsf{spur}\,(J^{-T}_{|MP}(\hat{\nabla}\hat{\nabla}^T w_h)_{|MP} J^{-1}_{|MP})\\ &\qquad\qquad + \mathsf{spur}\,(J^{-T}_{|MP}\tilde{M}_{|MP}J^{-1}_{|MP}) + f\}^2|\det J|\end{aligned}$$

Es wird eine MITC-Maske $\tilde{M}$ definiert durch

$$\tilde{M} := \hat{\nabla}(R_h\theta_h)^T = \hat{\nabla}(M(\hat{x})H^{-1}Z\cdot\underline{\theta})^T.$$

Dieser Ausdruck ist im Matrix Sinne zu verstehen. Man erhält eine 2×2-Matrix. In [1] wurden die einzelen Elemente und ihre Darstellungen hergeleitet. Es werden die Koeffizienten

$$\mathrm{MITC}n\ :\ H^{-1}Z\underline{\theta} = [a, b, \ldots]^T$$

bezüglich der Basis der einzelnen Elemente berechnet. Damit ergeben sich für die einzelnen MITC-Elemente folgende Masken :

MITC 3 :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

MITC 4 :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

MITC 7 :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} b_1 + d\hat{x}_2 & b_2 - 2d\hat{x}_1 - e\hat{x}_2 \\ c_1 + d\hat{x}_2 + 2e\hat{x}_2 & c_2 - e\hat{x}_1 \end{bmatrix}$$

MITC 9 :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} b_1 + d_1\hat{x}_2 & b_2 + d_2\hat{x}_2 + 2e_2\hat{x}_1 \\ c_1 + d_1\hat{x}_1 + 2e_1\hat{x}_2 & c_2 + d_2\hat{x}_1 \end{bmatrix}$$

Damit ist der Elementeanteil leicht berechenbar.

2. $\underline{\mu\kappa(\nabla w - R_h\theta)}$ **im Kantenanteil**

$$\begin{aligned}\eta_{2,E} &= \frac{|E|}{\lambda_T}\int_E \|[\mu\kappa(\nabla w_h - R_h\theta_h)\cdot n_{2D}]\|^2\, dS\\ &\approx \frac{\omega_g}{\lambda_T}\|[\mu\kappa(\nabla w_{h|MP} + J^{-T}(MH^{-1}Z\cdot\underline{\theta})_{|MP})\cdot E^{\perp}]\|^2\end{aligned}$$

Beim Vergleich dieser beider Fehlerindikatoren konnten noch keine schlüssigen Ergebnisse festgestellt werden, welcher günstiger ist. Dies kann man darauf zurückführen, daß der mathematische Beweis beider Indikatoren noch nicht erbracht wurde.

5.7 Fehlerschätzer für die Mindlin Reissner Gleichung - direkt

Im Unterschied zu 5.2 wird sofort von der Mindlin-Reissner-Gleichung (4) ausgegangen und für die exakte Lösung die Identitäten

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{12}\mathsf{div}\,\sigma + \kappa\mu(\nabla w - \theta) &= 0 \\ f + \kappa\mu\mathsf{div}\,(\nabla w - \theta) &= 0. \end{aligned}$$

benutzt. Für die Näherungslösung w_h, θ_h wird die gleiche Gleichung verwendet (Elemente : **Tri**n und **Quad**n), was durch einfaches Umformen zu den Galerkin-Orthogonalitäten

$$a(w^* - w_h, \theta^* - \theta_h, \tilde{w}, \tilde{\theta}) = 0 \qquad \forall\, \tilde{w}, \tilde{\theta} \in \text{ FE-Ansatzraum}$$

führt.

Daraus resultiert folgender Fehlerschätzer :

$$\eta_T^2 = \frac{h_T^2}{\lambda_T}(\eta_{1,T} + \eta_{2,T}) + \sum_{E \subset T} \frac{h_E}{\lambda_T}(\eta_{1,E} + \eta_{2,E})$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_{1,T} &= \left\| \frac{t^2}{12}\mathsf{div}\,\sigma(\theta_h) + \mu\kappa(\nabla w_h - \theta_h) \right\|^2 \\ \eta_{2,T} &= \| f + \mu\kappa\nabla^T(\nabla w_h - \theta_h) \|^2 \\ \eta_{1,E} &= \left\| \left[\frac{t^2}{12}\sigma(\theta_h) \cdot n \right] \right\|^2 \\ \eta_{2,E} &= \| [\mu\kappa(\nabla w_h - \theta_h) \cdot n] \|^2 \end{aligned}$$

Wie man unschwer erkennt ist dieser mit dem bisherigen Fehlerindikator identisch.

5.8 Fehlerschätzer für Arnold und Falk-Element

Für das Arnold und Falk-Element existiert ein Fehlerschätzer. Dieser ist im Detail in [2] beschrieben. Deshalb wird hier nicht näher darauf eingegangen. Der Fehlerschätzer für das Arnold und Falk-Element wurde hier nicht weiter beachtet, weil das Fehlerverhalten bezüglich der Konvergenz dieses Elements in Vergleich zu den anderen Elementen nicht sehr gut ist. Aber die Grundlagen, die in [2] dargestellt werden, dienen als Ausgangsbasis für die Entwicklung eines Fehlerschätzers für MITC-Elemente.

6 Versuch der Herleitung eines Fehlerschätzers für MITC-Elemente

Erste Versuche mit der Gleichung

$$t^2 a_1(\theta_h, \theta_h) + \mu(R_h(\nabla w_h - \theta_h), R_h(w_h - \theta_h))_0 - 2(f, w_h)_0 \to \min_{w_h, \theta_h}$$

für die MITC-Elemente ein geeignetes Fehlerfunktional zu berechnen schlugen fehl wegen des Reduktionsoperators R_h, der in der exakten Gleichung nicht existiert. Es konnten keine exakten Galerkin-Orthogonalitäten berechnet werden. Dies hat zur Folge, daß keine gut berechenbaren Terme für den Fehlerschätzer hergeleitet werden konnten.

Ein Ausweg könnte darin bestehen, daß wie beim Arnold und Falk-Element von der Helmholtz-Zerlegung ausgegangen wird. Einge Details zu dieser Zerlegung sind in [1] beschrieben.

6.1 Herleitung mittels Helmholtz-Zerlegung

Ausführliche Details und Informationen siehe dazu [3]. Es werden folgende Ausgangsgleichungen (Herleitung mit Helmholtz-Zerlegung) verwendet :

Finde $(\theta, w, r, p) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)^2 \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)/\mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{rcll} (\nabla r, \nabla v) & = & (\tilde{f}, v) & \forall\, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \\ a_0(\theta, \psi) - (p, \operatorname{rot} \psi) & = & (\nabla r, \psi) & \forall\, \psi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)^2 \\ -(\operatorname{rot} \theta, q) - t^2(\operatorname{curl} p, \operatorname{curl} q) & = & 0 & \forall\, q \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)/\mathbb{R} \\ (\nabla w, \nabla z) - (\theta, \nabla z) & = & t^2(\tilde{f}, z) & \forall\, z \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \end{array}$$

mit

$$\gamma = t^{-2}(\nabla w - \theta) = \nabla r + \operatorname{curl} p \qquad \eta = \nabla z + \operatorname{curl} q$$

Bei MITC-Elemente ist : $\gamma_h = t^{-2}(\nabla w - R_h \theta)$. In der Diskretisierung wird folgendes verwendet :

$$\gamma_h = \nabla r_h + \operatorname{curl}_h p_h \qquad \eta_h = \nabla z_h + \operatorname{curl}_h q_h.$$

Daraus folgt dann dieses System : Finde $(\theta_h, w_h, r_h, p_h) \in (\Theta_h \times W_h \times W_h \times Q_h)$ mit

$$\begin{array}{rcll} (\nabla r_h, \nabla v_h) & = & (f, v_h) & \forall\, v_h \in W_h \\ a(\theta_h, \psi_h) - (p_h, \operatorname{rot} \psi_h) & = & (\nabla r_h, R_h \psi_h) & \forall\, \psi_h \in \Theta_h \\ -(\operatorname{rot} \theta_h, q_h) - t^2(\operatorname{curl}_h p_h, \operatorname{curl}_h q_h) & = & 0 & \forall\, q_h \in Q_h \\ (\nabla w_h, \nabla z_h) - (R_h \theta_h, \nabla z_n) & = & t^2(f, z_h) & \forall\, z_h \in W_h \end{array}$$

mit folgenden Räumen :

$$\begin{array}{rcl} W_h & \subset & \mathbb{H}_0^1(\Omega) \\ \Theta_h & \subset & \mathbb{H}_0^1(\Omega)^2 \\ \Gamma_h & \subset & \mathbb{H}_0(\mathsf{rot}\,,\Omega) \\ Q_h & \subset & L_2(\Omega)/\mathbb{R} \end{array}$$

Zur Herleitung einer Galerkin-Orthogonalität entstehen folgende Schwierigkeiten

1. die Raumunterschiede in der 3. Gleichung (vgl. [3]) und
2. die Hinzunahme des Reduktionsoperators R_h.

Die Räume und Operatoren erfüllen folgende Eigenschaften :

1. Der Reduktionsoperator R_h ist die Abbildung

$$R_h : \mathbb{H}_0^1(\Omega)^2 \to \Gamma_h$$

in den Raum der Scherterme.

2. Man definiert einen Ortho-Projektor

$$P_h : L^2(\Omega)/\mathbb{R} \to Q_h \text{ mit } \mathsf{rot}\, R_h\eta = P_h\mathsf{rot}\,\eta \;\; \forall\, \eta \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)^2.$$

Somit gilt folgendes Diagramm :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_0^1(\Omega)^2 & \xrightarrow{\mathsf{rot}} & L_2(\Omega) \\ {\scriptstyle R_h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle P_h} \\ \Gamma_h & \xrightarrow{\mathsf{rot}} & Q_h \end{array}$$

3. Über die Diskretisierung von curl weiß man :

$$\mathsf{curl}\,_h : Q_h \to \Gamma_h \text{ mit } (\mathsf{curl}\,_h q_h, \eta) = (q_h, \mathsf{rot}\,\eta) \;\; \forall\, \eta \in \Gamma_h.$$

4. Der Raum Γ_h ist darstellbar als eine L_2-orthogonale Zerlegung

$$\Gamma_h = \nabla W_h \oplus \mathsf{curl}\,_h Q_h.$$

5. Für $q_h \in Q_h$ und $w_h \in W_h$ gilt :

$$(\mathsf{curl}\,_h q_h, \nabla w_h) = (q_h, \mathsf{rot}\,\nabla w_h) = 0.$$

6. Die Projektoren P_h und Π_h sind Ortho-Projektoren mit :

$$\mathsf{curl}_h P_h \rho = \Pi_h \mathsf{curl}\, \rho \qquad \forall\, \rho \in \mathbb{H}^1(\Omega).$$

Daraus resultiert dann folgendes Diagramm :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^1(\Omega) & \xrightarrow{\mathsf{curl}} & L_2(\Omega)^2 \\ {\scriptstyle P_h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Pi_h} \\ Q_h & \xrightarrow{\mathsf{curl}_h} & \Gamma_h \end{array}$$

7. Weiterhin gilt für $\rho \in \mathbb{H}^1$ und $\gamma_h \in \Gamma_h$:

$$(\mathsf{curl}_h P_h \rho, \gamma_h) = (P_h \rho, \mathsf{rot}\,\gamma_h) = (\rho, \mathsf{rot}\,\gamma_h) = (\mathsf{curl}\,\rho, \gamma_h) = (\Pi_h \mathsf{curl}\,\rho, \gamma_h).$$

Man kann folgende Bilinearformen definieren, da es mehre Möglichkeiten gibt, um die Gleichungen zu addieren bzw. subtrahieren.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\theta, w, p, r; \psi, v, q, z) &= (\nabla r, \nabla v) + a(\theta, \psi) - (p, \mathsf{rot}\,\psi) - (\nabla r, \psi) \\ &\quad -(\mathsf{rot}\,\theta, q) - t^2(\mathsf{curl}\,p, \mathsf{curl}\,q) \\ &\quad +(\nabla w, \nabla z) - (\theta, \nabla z) \text{ oder} \\ \mathbf{A}_2(\theta, w, p, r; \psi, v, q, z) &= (\nabla r, \nabla v) + a(\theta, \psi) - (p, \mathsf{rot}\,\psi) - (\nabla r, \psi) \\ &\quad +(\mathsf{rot}\,\theta, q) + t^2(\mathsf{curl}\,p, \mathsf{curl}\,q) \\ &\quad -(\nabla w, \nabla z) + (\theta, \nabla z) \end{aligned}$$

und die rechten Seiten

$$\begin{aligned} F_1(x) &:= (f, v + t^2 z) \qquad x := v \pm t^2 z \\ F_2(x) &:= (f, v - t^2 z). \end{aligned}$$

Die zweite Bilinearform hat eine nützliche Eigenschaft :

$$\mathbf{A}_2(\theta, w, p, r; \theta, w, p, r) = a(\theta, \theta) + t^2 \|\mathsf{curl}\,p\|^2.$$

Es werden folgende Fehlerterme definiert :

$$\begin{aligned} e_\theta &= \theta - \theta_h \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)^2 \\ e_w &= w - w_h \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \\ e_r &= r - r_h \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)^2 \\ e_p &= p - p_h \in L_2(\Omega)/\mathbb{R} \end{aligned}$$

Es wird die Differenz von Ausgangs- und diskretisierter Gleichung gebildet, um berechenbare Fehler zu erhalten. Ziel ist es folgende Abschätzung

$$\mathbf{A}^*(e_\theta, e_w, e_p, e_r; e_\theta, e_w, e_p, e_r) \leq \eta \|e_\theta, e_w, e_p, e_r\|$$

zu berechnen.

Die Differenzbildung in jeder der vier Gleichungen ergibt :

1. $(\nabla e_r, \nabla \tilde{v}) = 0 \qquad \forall\, \tilde{v} \in W_h$
2. $a(e_\theta, \tilde{\psi}) - (e_p, \mathsf{rot}\,\tilde{\psi}) - (\nabla e_r, \tilde{\psi}) + (\nabla r_h, (R_h - I)\tilde{\psi}) = 0 \ \ \forall\, \tilde{\psi} \in \Theta_h$
3. $-(\mathsf{rot}\, e_\theta, \tilde{q}) - t^2(R_h \mathsf{curl}\, p - \mathsf{curl}_h p_h, \mathsf{curl}_h \tilde{q}) = 0 \qquad \forall\, \tilde{q} \in Q_h$
4. $(\nabla e_w, \nabla \tilde{z}) - (e_\theta, \nabla \tilde{z}) + ((R_h - I)\theta_h, \nabla \tilde{z}) = 0 \qquad \forall\, \tilde{z} \in W_h,$

woraus eigentlich Galerkin-Orthogonalitäten zwischen Fehlern und Ansatzräumen folgen sollten. Es wird folgendes Fehlerfunktional :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_2(e_\theta, e_w, e_p, e_r; e_\theta, e_w, e_p, e_r) \quad = \quad & (\nabla e_r, \nabla e_w) + a(e_\theta, e_\theta) - (e_p, \mathsf{rot}\, e_\theta) - (\nabla e_r, e_\theta) \\ & + (\mathsf{rot}\, e_\theta, e_p) + t^2(\mathsf{curl}_h e_p, \mathsf{curl}_h e_p) \\ & - (\nabla e_w, \nabla e_r) + (e_\theta, \nabla e_r)\end{aligned}$$

definiert. Dazu addiert man die obigen Pseudo-Galerkin-Orthogonalitäten zu

$$\mathbf{A}_2(e_\theta, e_w, e_p, e_r; \underbrace{e_\theta + \tilde{\psi}}_{\tilde{\theta}}, \underbrace{e_w + \tilde{v}}_{\tilde{w}}, \underbrace{e_p + \tilde{q}}_{\tilde{p}}, \underbrace{e_r + \tilde{z}}_{\tilde{r}}) + \text{ Restterme}$$

$$\begin{aligned} = \quad & (\nabla e_r, \nabla \tilde{w}) + a(e_\theta, \tilde{\theta}) - (e_p, \mathsf{rot}\,\tilde{\theta}) - (\nabla e_r, \tilde{\theta}) + (\nabla r_h, (R_h - I)\tilde{\psi}) \\ & + (\mathsf{rot}\, e_\theta, \tilde{p}) + t^2(\mathsf{curl}_h e_p, \mathsf{curl}_h \tilde{p}) + t^2((R_h - I)\mathsf{curl}\, p, \mathsf{curl}_h \tilde{q}) \\ & - (\nabla e_w, \nabla \tilde{r}) + (e_\theta, \nabla \tilde{r}) + ((R_h - I)\theta_h, \nabla \tilde{z}).\end{aligned}$$

Wie man unschwer erkennen kann, rufen die Terme mit dem Reduktionsoperator einige Schwierigkeiten hervor. Dieser kann aber nicht vernachlässigt werden, da er für die korrekte Berechnung des Scherterms γ_h und den daraus resultieren Lösungen ohne Scher-Locking gebraucht wird. Diese Terme müßten abgeschätzt werden. Die restlichen Terme müssen wieder zusammengefügt werden, da die diskretisierten Gleichungen der MITC-Elemente weniger Variablen besitzen.

7 Ausblick

In den vorangegangenen Abschnitten wurde direkt oder indirekt auf die Schwierigkeiten bei der finite Elemente Behandlung der Mindlin-Reissner-Platte hingewiesen. Diese Schwierigkeiten machen es mit den herkömmlichen Methoden unmöglich, einen geeigneten Fehlerschätzer mit Hilfe der Galerkin-Orthogonalität zu berechnen.

Nach weitergehenden Forschungen auf diesem Gebiet und einem tieferen Verständniss für den Reduktionsoperator könnte sich doch noch eine Möglichkeit ergeben, um einen geeigneten Fehlerschätzer zu berechnen. Alternativ könnten auch andere Fehlerschätzerideen verfolgt werden. Die Residuenschätzer sind leider hier nicht geeignet. Die Nichtkonformität der Elemente macht dies fast unmöglich. Beim Anold und Falk-Element (konform) ist der Fehlerschätzer durch spezielle Konstanten und Normdefinitionen herleitbar. Diese Techniken sind aber leider für das MITC-Element nicht nutzbar.

Literatur

[1] P.Nestler : *Diplom-Arbeit : Plattenberechnung nach der Mindlin-Reissner-Theorie*, Technische Universität, Chemnitz, 2004

[2] C.Carstensen, J.Schöberl : *Residual-Based A Posteriori Error Estimate For A Mixed Reissner-Mindlin Plate Finite Element Method*, Berichtsreihe des Mathematischen Seminars der Universität Kiel 00-24, 2000.

[3] P.Peisker, D.Braess : *Uniform Convergence of Mixed Interpolated Elements For Reissner-Mindlin Plates*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 26, n° 5, 1992

[4] D.Braess : *Finite Elemente*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997

Other titles in the SFB393 series:

03-01 E. Creusé, G. Kunert, S. Nicaise. A posteriory error estimation for the Stokes problem: Anisotropic and isotropic discretizations. January 2003.

03-02 S. I. Solov'ëv. Existence of the guided modes of an optical fiber. January 2003.

03-03 S. Beuchler. Wavelet preconditioners for the p-version of the FEM. February 2003.

03-04 S. Beuchler. Fast solvers for degenerated problems. February 2003.

03-05 A. Meyer. Stable calculation of the Jacobians for curved triangles. February 2003.

03-06 S. I. Solov'ëv. Eigenvibrations of a plate with elastically attached load. February 2003.

03-07 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet based fast solution of boundary integral equations. February 2003.

03-08 S. I. Solov'ëv. Preconditioned iterative methods for monotone nonlinear eigenvalue problems. March 2003.

03-09 Th. Apel, N. Düvelmeyer. Transformation of hexahedral finite element meshes into tetrahedral meshes according to quality criteria. May 2003.

03-10 H. Harbrecht, R. Schneider. Biorthogonal wavelet bases for the boundary element method. April 2003.

03-11 T. Zhanlav. Some choices of moments of refinable function and applications. June 2003.

03-12 S. Beuchler. A Dirichlet-Dirichlet DD-pre-conditioner for p-FEM. June 2003.

03-13 Th. Apel, C. Pester. Clément-type interpolation on spherical domains - interpolation error estimates and application to a posteriori error estimation. July 2003.

03-14 S. Beuchler. Multi-level solver for degenerated problems with applications to p-version of the fem. *(Dissertation)* July 2003.

03-15 Th. Apel, S. Nicaise. The inf-sup condition for the Bernardi-Fortin-Raugel element on anisotropic meshes. September 2003.

03-16 G. Kunert, Z. Mghazli, S. Nicaise. A posteriori error estimation for a finite volume discretization on anisotropic meshes. September 2003.

03-17 B. Heinrich, K. Pönitz. Nitsche type mortaring for singularly perturbed reaction-diffusion problems. October 2003.

03-18 S. I. Solov'ëv. Vibrations of plates with masses. November 2003.

03-19 S. I. Solov'ëv. Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems. November 2003.

03-20 M. Randrianarivony, G. Brunnett, R. Schneider. Tessellation and parametrization of trimmed surfaces. December 2003.

04-01 A. Meyer, F. Rabold, M. Scherzer. Efficient Finite Element Simulation of Crack Propagation. February 2004.

04-02 S. Grosman. The robustness of the hierarchical a posteriori error estimator for reaction-diffusion equation on anisotropic meshes. March 2004.

04-03 A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke, R. Kreißig. Entwicklung von adaptiven Algorithmen für nichtlineare FEM. April 2004.

04-04 A. Meyer, R. Unger. Projection methods for contact problems in elasticity. April 2004.

04-05 T. Eibner, J. M. Melenk. A local error analysis of the boundary concentrated FEM. May 2004.

04-06 H. Harbrecht, U. Kähler, R. Schneider. Wavelet Galerkin BEM on unstructured meshes. May 2004.

04-07 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Necessary and sufficient conditions for the regularity of a planar Coons map. May 2004.

04-08 P. Benner, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí. Solving Linear Matrix Equations via Rational Iterative Schemes. October 2004.

04-09 C. Pester. Hamiltonian eigenvalue symmetry for quadratic operator eigenvalue problems. October 2004.

04-10 T. Eibner, J. M. Melenk. An adaptive strategy for hp-FEM based on testing for analyticity. November 2004.

04-11 B. Heinrich, B. Jung. The Fourier-finite-element method with Nitsche-mortaring. November 2004.

04-12 A. Meyer, C. Pester. The Laplace and the linear elasticity problems near polyhedral corners and associated eigenvalue problems. December 2004.

04-13 M. Jung, T. D. Todorov. On the Convergence Factor in Multilevel Methods for Solving 3D Elasticity Problems. December 2004.

05-01 C. Pester. A residual a posteriori error estimator for the eigenvalue problem for the Laplace-Beltrami operator. January 2005.

05-02 J. Badía, P. Benner, R. Mayo, E. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, J. Saak. Parallel Order Reduction via Balanced Truncation for Optimal Cooling of Steel Profiles. February 2005.

05-03 C. Pester. CoCoS – Computation of Corner Singularities. April 2005.

05-04 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Einige Elemente, Fehlerschätzer und Ergebnisse. April 2005.

05-05 P. Benner, J. Saak. Linear-Quadratic Regulator Design for Optimal Cooling of Steel Profiles. April 2005.

The complete list of current and former preprints is available via
`http://www.tu-chemnitz.de/sfb393/preprints.html`.