Technische Universität Chemnitz

Sonderforschungsbereich 393

Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern

Detlef Michael Marcel Springmann

Zur numerischen Simulation des Versagens duktiler metallischer Werkstoffe

(Algorithmische Behandlung und Vergleichsrechnungen)

Preprint SFB393/01-09

Neben Bemerkungen zur algorithmischen Behandlung von Problemen der duktilen Schädigungsmechanik im Rahmen der FEM werden die Ergebnisse numerischer Vergleiche mit Simulationsergebnissen des kommerziellen FE-Programmes **ABAQUS** angegeben.

Preprint-Reihe des Chemnitzer SFB 393

SFB393/01-09 **März 2001**

Inhaltsverzeichnis

Author's addresses:

Detlef Michael
Marcel Springmann
TU Bergakademie Freiberg
Institut für Mechanik und Maschinenelemente
D-09596 Freiberg

http://www.tu-chemnitz.de/sfb393/
http://www.imm.tu-freiberg.de/

1 Vorbemerkungen

Die moderne Schädigungsmechanik hat sich das ehrgeizige Ziel gestellt, im Rahmen einer Kontinuumstheorie sowohl die üblichen klassischen nichtlinearen Deformationsprozesse als auch die Schädigungsmechanismen sowie das Bruchversagen zu beschreiben. Das Versagen duktiler Metalle beruht auf verschiedenen mikrostrukturellen Mechanismen der Bildung, des Wachstums und der Vereinigung mikroskopischer Hohlräume (Mikrovoids). Zur Beschreibung dieser komplexen Phänomene ist die Entwicklung von Modellen auf unterschiedlichen Niveauebenen hilfreich. Dies sind nach *Thomason* [23] und *Needleman* [20]:

1. das kristallphysikalische Niveau mit der Beschreibung des Verhaltens von Fremdatomen, Versetzungen und Disklinationen z.B. im Rahmen des von *Kondo* [11, 12], *Bilby* [4], *Kröner* [13] und *de Wit* [6] verwendeten Zuganges;

2. das mesoskopische Niveau, auf dem die Mechanismen des Versagens in vier Phasen unterteilt werden können:

   - Bildung von Hohlräumen an Einschlüssen oder Ausscheidungen durch Trennung der Grenzfläche oder durch Teilchenbruch,
   - Wachstum der Hohlräume durch plastische Verformung,
   - Koaleszens der Hohlräume durch plastisches Versagen (Einschnürung, Scherbänder, Mikroporen) der dazwischenliegenden Werkstoffbrücken, so daß ein makroskopischer Anriß entsteht,
   - Wachstum des Makrorisses (duktiler Bruch) durch Ablauf obiger Mechanismen an der Rißspitze und Vereinigung der Hohlräume mit dem Makroriß.

   Eine zusammenfassende Übersicht der mikrostrukturellen Phänomene wird z.B. von *Garrison et al.* in [7] angegeben;

3. das makroskopische Niveau einer Kontinuumstheorie.

Zur kontinuumsmechanischen Modellierung duktiler Schädigungsprozesse hat sich die „Schädigungsmechanik“ (Continuum damage mechanics) bzw. der sogenannte „local approach“ erfolgreich herausgebildet (vgl. *Kußmaul* [14] und *Aliabadi et al.* [1]). Dabei werden zur Kennzeichnung der Materialschädigung interne Zustandsvariable (z.B. Anteil des Hohlraumvolumens f) in den konstitutiven Beziehungen einer *assoziierten Fließtheorie*[1] verwendet. Die Formulierung von Schädigungsgesetzen beruht entweder auf konkreten mikromechanischen Modellbetrachtungen oder einer phänomenologischen Beschreibung auf der Basis kontinuumstheoretisch–thermodynamischer Prinzipien. Einen Überblick über den aktuellen Stand derartiger Modelle wird z.B. von *Tvergaard* [24] und *Pineau et al.* [21] angegeben. Die derzeit wichtigsten Schädigungsmodelle sind Entwicklungen von *Rice und Tracey*, *Gurson*, *Tvergaard und Needleman* sowie von *Rousselier* (vgl. [21][24]).

[1] Genauer gesagt, in den meisten Fällen *assoziierten Fließtheorie*.

Um das Phänomen der duktilen Schädigung unter Beachtung der obigen Modellvorstellungen behandeln zu können, bedarf es folglich einer Theorie der Elasto–Plastizität, die das Vorhandensein von Einschlüssen oder Ausscheidungen sowie von Hohlräumen berücksichtigt. Dagegen kann die Entstehung und das Wachstum von Makrorissen z.B. durch Generierung neuer innerer Oberflächen berücksichtigt werden.

2 Aspekte der numerischen Behandlung

Insbesondere für die Behandlung nichtlinearer Probleme besitzt die Finite–Element–Methode unschätzbare Vorteile. Zur Behandlung von Problemen der finiten Elasto–Plastizität wurde deshalb das experimentelle Finite–Element–System **SPC-PMHP** entwickelt. Dieses System verwendet moderne numerische Algorithmen zur Simulation dieser Probleme auf Parallelrechnern.

- Gebietszerlegungstechniken (DD)
  Gebietszerlegungstechniken eröffnen eine Reihe von Möglichkeiten zur Entwicklung paralleler Techniken, um Probleme mit einer hohen Anzahl von Freiheitsgraden mit der FEM behandeln zu können.

- Iterative Gleichungslöser mit Vorkonditionierung
  Insbesondere die Methode der konjugierten Gradienten mit hierarchischer Vorkonditionierung (Yserentant [25], BPX [5]) hat sich hier als eine der effizientesten Methoden erwiesen.

- Newton–Raphson–Methode mit konsistenter Linearisierung
  Die Newton–Raphson–Methode mit konsistenter Linearisierung besitzt eine hohe Robustheit und zeigt in der Regel eine quadratische Konvergenz. Dieses Verfahren bietet sich somit sowohl für die Linearisierung der Variationsformulierung als auch der nichtlinearen Materialgleichungen an.

Variationsformulierung

Bei den weiteren Betrachtungen werden *kontravariante* Größen durch den Zusatz $^\sharp$ und *kovariante* Größen durch den Zusatz $^\flat$ gekennzeichnet. Vektoren sind prinzipiell *kontravariant*. Die Variationsformulierung für isotherme, stationäre Probleme

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{\sigma}^\sharp : \boldsymbol{\varepsilon}^\flat_{\boldsymbol{\xi}^\sharp}\, dv &= \int_{\mathcal{S}_t} \rho \langle \boldsymbol{l}^\sharp, \boldsymbol{\xi}^\sharp \rangle\, dv + \int_{\partial\mathcal{S}_t} \langle \boldsymbol{r}^\sharp, \boldsymbol{\xi}^\sharp \rangle\, da && \textit{Euler'sch} \\
\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{T}^\sharp : \boldsymbol{\mathcal{E}}^\flat_{\Xi^\sharp}\, dV &= \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \langle \boldsymbol{L}^\sharp, \Xi^\sharp \rangle\, dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{R}^\sharp, \Xi^\sharp \rangle\, dA && \textit{Lagrange'sch}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

($\mathcal{S}_t$ – Momentankonfiguration; $\mathcal{B}$ – Ausgangskonfiguration; $\boldsymbol{\sigma}^\sharp$ – Cauchy'scher Spannungstensor; $\boldsymbol{T}^\sharp$ – 2. Piola–Kirchhoff'scher Spannungstensor; ρ – Dichte; $\boldsymbol{l}^\sharp$ – Volumenlasten;

$\boldsymbol{r}^\sharp$ – Oberflächenlasten; $\boldsymbol{\xi}^\sharp$ – Testfunktion; $\boldsymbol{\varepsilon}^\flat_{\boldsymbol{\xi}^\sharp} := \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{grad}\,\boldsymbol{\xi}^\sharp + (\boldsymbol{grad}\,\boldsymbol{\xi}^\sharp)^T\right)$ und $\boldsymbol{\mathcal{E}}^\flat_{\Xi^\sharp} := \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{GRAD}\,\Xi^\sharp + (\boldsymbol{GRAD}\,\Xi^\sharp)^T\right))$
ergibt sich unmittelbar aus der Variation des 1. Hauptsatzes bei Beschränkung auf isotherme, stationäre Prozesse unter Anwendung des Satzes von *Gauss*. Selbstverständlich kann man auch von der schwachen Formulierung der Impulsbilanz ausgehen, um (2.1) zu erhalten. Die *konsistente Linearisierung* der nichtlinearen Gleichungen (2.1) ergibt sich dann [15][17] zu

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_t}\boldsymbol{\varepsilon}^\flat_{\delta\boldsymbol{u}^\sharp}:\left(\frac{2}{J}\frac{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial\boldsymbol{g}^\flat}\cdot\boldsymbol{g}^\flat+\boldsymbol{\sigma}^\sharp\otimes\mathbf{1}\right):\boldsymbol{\varepsilon}^\flat_{\boldsymbol{\xi}^\sharp}\,dv &= \int_{\mathcal{S}_t}\left(\rho\langle\boldsymbol{l}^\sharp,\boldsymbol{\xi}^\sharp\rangle-\boldsymbol{\sigma}^\sharp:\boldsymbol{\varepsilon}^\flat_{\boldsymbol{\xi}^\sharp}\right)\,dv+\int_{\partial\mathcal{S}_t}\langle\boldsymbol{r}^\sharp,\boldsymbol{\xi}^\sharp\rangle\,da \\
\int_{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{E}}^\flat_{\delta\boldsymbol{U}^\sharp}:\left(2\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{g}^\flat+\boldsymbol{T}^\sharp\otimes\mathbf{1}\right):\boldsymbol{\mathcal{E}}^\flat_{\Xi^\sharp}\,dV &= \int_{\mathcal{B}}\left(\rho_0\langle\boldsymbol{L}^\sharp,\Xi^\sharp\rangle-\boldsymbol{T}^\sharp:\boldsymbol{\mathcal{E}}^\flat_{\Xi^\sharp}\right)dV+\int_{\partial\mathcal{B}}\langle\boldsymbol{R}^\sharp,\Xi^\sharp\rangle dA
\end{aligned} \tag{2.2}$$

(J – Jacobi-Determinante; $\boldsymbol{\tau}^\sharp$ – Kirchhoff'scher Spannungstensor; $\boldsymbol{g}^\flat$ – Raummetrik; $\boldsymbol{F}$ – Deformationsgradient; $\boldsymbol{C}^\flat$ – rechter Cauchy–Green Deformationstensor). Auffallend an (2.2) ist, daß hier eine formale Gleichheit zu der entsprechenden Formulierung bei rein elastischem Materialverhalten besteht. Bei elastisch–plastischem Materialverhalten hängen die Spannungen jedoch noch zusätzlich von internen Variablen ab. Diese internen Variablen sind wiederum abhängig vom Deformationszustand, so das hier die *Kettenregel* zur Anwendung zu bringen ist.

Numerische Integration der Evolutionsgleichungen

Die *Evolutionsgleichungen* der finiten Elasto–Plastizität[2]

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{L}_v\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{b}}{}^{\boldsymbol{-1}\flat} = 2\lambda\dfrac{\partial y}{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}; & \dfrac{d}{dt}\overset{\mathrm{p}}{\boldsymbol{C}}{}^\flat = 2\Lambda\dfrac{\partial Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp} \\
\mathcal{L}_v\boldsymbol{a} \quad = -\lambda\boldsymbol{q};\ \ \boldsymbol{q} := \dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\dfrac{\partial y}{\partial\boldsymbol{a}}; & \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A} \quad = -\Lambda\boldsymbol{Q};\ \ \boldsymbol{Q} := \dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{A}}}\dfrac{\partial Y}{\partial\boldsymbol{A}} \\
\lambda\geq 0, \lambda y = 0, y\text{–konvex} & \Lambda\geq 0, \Lambda Y = 0, Y\text{–konvex,}
\end{array} \tag{2.3}$$

und auch die dazu äquivalente Formulierung

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{L}_v\boldsymbol{\tau}^\sharp = \dfrac{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial\boldsymbol{g}^\flat}:\left(\mathcal{L}_v\boldsymbol{g}^\flat - 2\lambda\dfrac{\partial y}{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right); & \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{T}^\sharp = \dfrac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}:\left(\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{C}^\flat - 2\Lambda\dfrac{\partial Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}\right) \\
\mathcal{L}_v\boldsymbol{a} \ = -\lambda\boldsymbol{q};\ \ \boldsymbol{q} := \dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\dfrac{\partial y}{\partial\boldsymbol{a}}; & \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A} \ = -\Lambda\boldsymbol{Q};\ \ \boldsymbol{Q} := \dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{A}}}\dfrac{\partial Y}{\partial\boldsymbol{A}} \\
\lambda\geq 0, \lambda y = 0, y\text{–konvex} & \Lambda\geq 0, \Lambda Y = 0, Y\text{–konvex,}
\end{array} \tag{2.4}$$

($\mathcal{L}_v$ – Lie–Ableitung; $\frac{d}{dt}$ – materielle Zeitableitung; $\overset{\mathrm{e}}{\boldsymbol{b}}{}^{\boldsymbol{-1}\flat}$ – inverser linker elastischer Cauchy–Green Deformationstensor; $\overset{\mathrm{p}}{\boldsymbol{C}}{}^\flat$ – rechter plastischer Cauchy–Green Deformationstensor;

[2]Genauer gesagt, des Zuganges zur finiten Elasto–Plastizität der in **SPC–PMHP** implementiert ist.

λ, Λ – Lagrange'scher Multiplikator; $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ – interne Variable; $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{A}$ – arbeitskonjugierte Größe zu $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$) sind nach ihrer Struktur *Differential–Algebraische* Gleichungen vom *Index* 1 [9]. Ein Standardverfahren zur Behandlung der *DAE's* (2.3) (2.4) sind Mehrschritt–Rückwärts–Differenzenverfahren. Diese Erweiterung des Verfahrens aus [16] auf geometrisch nichtlineare Probleme bietet in gleicher Weise einen effizienten Weg zur numerischen Berechnung der Spannungen, internen Variablen und auch der konsistenten Steifigkeitsmatrix. Bezüglich Detailfragen sei auf diesen Artikel, auf [8] und auf [18] verwiesen.

3 Das Gurson–Tvergaard–Needleman Modell

In [2][3][19] wird das Gurson–Tvergaard–Needleman Modell durch die Fließbedingung

$$y = \left(\frac{q}{\sigma_M}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh\left(-\frac{3}{2} q_2 \frac{p}{\sigma_M}\right) - \left(1 + q_3 f^{*^2}\right) = 0$$

$$f^*(f) := \begin{cases} f & \forall f \leq f_c \\ f_c + \dfrac{\frac{1}{q_1} - f_c}{f_F - f_c}(f - f_c) & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\sigma_M := \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon_{pM}}{\varepsilon_0} + 1\right)^n ;\; p := -\frac{1}{3} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp};\; q := \sqrt{-3 II_{\boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\tau}^\sharp)}}$$

charakterisiert. Für die skalaren internen Variablen ε_{pM} (plastische Vergleichsdehnung des Matrixmaterials) und f (Porenkonzentration) werden die Evolutionsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_{pM} = \lambda \frac{1}{\sigma_M(1-f)} \boldsymbol{\tau}^\sharp : \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}$$

$$\frac{d}{dt} f = \lambda \left[\frac{\mathcal{A}}{\sigma_M(1-f)} \boldsymbol{\tau}^\sharp : \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} + (1-f) I_{\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}} \right] ;\; \mathcal{A} := \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_{pM} - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2 \right] \tag{3.6}$$

angesetzt. Das Materialverhalten wird durch den Satz

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad f_0, \quad f_c, \quad f_F, \quad \sigma_0, \quad \varepsilon_0, \quad n, \quad f_N, \quad s_N, \quad \varepsilon_N$$

(q_1, q_2, q_3 – Parameter des GTN–Modells; f_0 – Anfangsporenkonzentration; f_c – kritischer Porenvolumenanteil; f_F – Porenvolumenanteil bei Versagen; σ_0 – Anfangsfließspannung; ε_0 – Anfangsfließdehnung; n – Verfestigungsparameter; f_N – porenbildener Volumenanteil; s_N – Standardabweichung; ε_N – Mittelwert) von 11 Materialparametern vervollständigt. Darüber hinaus gelten die Prinzipien der assoziierten Fließtheorie (2.3).
Unter Verwendung der Identitäten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^\sharp : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} II_{\boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\tau}^\sharp)} &= 2 II_{\boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\tau}^\sharp)}; & \boldsymbol{\tau}^\sharp : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp} &= I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp} \\ I_{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} II_{\boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\tau}^\sharp)}} &= 0; & I_{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}} &= 3 \end{aligned}$$

ergibt sich für die Terme in (3.6)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}^\sharp : \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} &= 2\left(\frac{q}{\sigma_M}\right)^2 - 3q_1 q_2 f^* \frac{p}{\sigma_M} \sinh\left(-\frac{3}{2} q_2 \frac{p}{\sigma_M}\right) \\
I_{\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}} &= 3q_1 q_2 f^* \frac{1}{\sigma_M} \sinh\left(-\frac{3}{2} q_2 \frac{p}{\sigma_M}\right),
\end{aligned}$$

womit die betrachteten Materialgleichungen mit den Definitionen[3]

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{pM} &:= -\frac{1}{\sigma_M(1-f)} \boldsymbol{\tau}^\sharp : \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} \\
\dot{f} &:= -\left[\frac{\mathcal{A}}{\sigma_M(1-f)} \boldsymbol{\tau}^\sharp : \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} + (1-f) I_{\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}}\right]
\end{aligned}$$

und unter Beachtung, daß für skalare Tensorfunktionen α die Indentität

$$\mathcal{L}_v \alpha \equiv \frac{d}{dt} \alpha$$

gilt, auch wirklich die Struktur von (2.3) erhalten. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß sich das Material isotrop verhalten soll, so daß es naheliegend ist, für den Anteil ψ_e in der spezifischen freien Energie ψ

$$\rho_0 \psi := \psi_e(\overset{-1}{\boldsymbol{b}}{}^\flat + \boldsymbol{g}^\flat - \overline{\boldsymbol{b}}^{e\,\flat}) + \psi_d(\bar{\varepsilon}, \bar{f}) \tag{3.7}$$

($\bar{\varepsilon}$, $\bar{f}$ – arbeitskonjugierte Größen zu ε_{pM}, f) hyperelastisches Verhalten [22] anzunehmen

$$\psi_e := \frac{1}{2}\mu(I_{\boldsymbol{\beta}^\flat} - 2\ln J_{\boldsymbol{\beta}^\flat} - 3) + \frac{1}{2}\lambda(ln J_{\boldsymbol{\beta}^\flat})^2$$

bzw.

$$\psi_e := \frac{1}{2}\mu(I_{\boldsymbol{\beta}^\flat} - 2\ln J_{\boldsymbol{\beta}^\flat} - 3) + \frac{1}{2}\lambda(J_{\boldsymbol{\beta}^\flat} - 1)^2 \tag{3.8}$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\beta}^\flat := \overset{-1}{\boldsymbol{b}}{}^\flat + \boldsymbol{g}^\flat - \overline{\boldsymbol{b}}^{e\,\flat}$$

(μ, λ – *Lame*–Konstanten). Diese „elastischen Teilstoffgesetze" (*Neo-Hooke*) gehen für $\boldsymbol{\beta}^\sharp \approx \boldsymbol{g}^\sharp$ letztlich in das *Hooke'sche* Gesetz über. In Gleichung (3.7) wurde der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß sich die spezifische freie Energie ψ additiv aus einem „elastischen" ψ_e und einem „dissipativen" Anteil ψ_d zusammensetzt.
Die Beschreibung in der *Ausgangskonfiguration* ergibt sich unmittelbar aus der hier angegebenen *Euler'schen Formulierung* bei Verwendung der Definitionen

$$p := -\frac{1}{3} I_{\boldsymbol{T}^\sharp} \qquad q := \sqrt{-3 II_{\boldsymbol{DEV}(\boldsymbol{T}^\sharp)}}.$$

[3] $\dot{\varepsilon}_{pM}, \dot{f}$ sind als Symbole und nicht als Zeitableitungen zu verstehen

Zur numerischen Behandlung des Gurson–Tvergaard–Needleman Modells sind also letztlich in der jeweiligen Konfiguration die folgenden Differential–Algebraischen Gleichungen (DAE) zu lösen:

Lagrange	Euler
$\rho_0 \Psi := \Psi_e(\boldsymbol{G}^\flat + \boldsymbol{C}^\flat - \overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^\flat) + \Psi_d(\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}})$	$\rho_0 \psi := \psi_e(\overset{-1}{\boldsymbol{b}}{}^\flat + \boldsymbol{g}^\flat - \overset{-e}{\boldsymbol{b}}{}^\flat) + \psi_d(\bar{\varepsilon}, \bar{f})$
$\mathcal{E}_{pM} := \rho_0 \dfrac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathcal{E}}}; \quad \mathcal{F} := \rho_0 \dfrac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathcal{F}}}$	$\varepsilon_{pM} := \rho_0 \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}}; \quad f := \rho_0 \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{f}}$
$Y(\boldsymbol{T}^\sharp, \mathcal{E}_{pM}, \mathcal{F}) \leq 0$	$y(\boldsymbol{\tau}^\sharp, \varepsilon_{pM}, f) \leq 0$
$\boldsymbol{T}^\sharp = 2\rho_0 \dfrac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{C}^\flat}$	$\boldsymbol{\tau}^\sharp = 2\rho_0 \dfrac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{g}^\flat}$
$\dfrac{d}{dt} \overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^\flat = 2\Lambda \dfrac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp}$	$\mathcal{L}_v \overset{-e}{b}{}^\flat = 2\lambda \dfrac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}$
$\dfrac{d}{dt} \mathcal{E}_{pM} = -\Lambda \dot{\mathcal{E}}_{pM}$	$\dfrac{d}{dt} \varepsilon_{pM} = -\lambda \dot{\varepsilon}_{pM}$
$\dfrac{d}{dt} \mathcal{F} = -\Lambda \dot{\mathcal{F}}$	$\dfrac{d}{dt} f = -\lambda \dot{f}$
$\Lambda \geq 0; \quad \Lambda Y = 0$	$\lambda \geq 0; \quad \lambda y = 0$

(3.9)

Ein möglicher Zugang besteht darin, diese DAE vom Index 1 mit Standardmethoden zu behandeln, wie im weiteren dargestellt werden soll.

3.1 Ein numerisches Verfahren zur Behandlung der Evolutionsgleichungen

Bei Anwendung eines impliziten Mehrschrittdifferenzenverfahrens gehen die Evolutionsgleichungen (3.9) in das System nichtlinearer algebraischer Gleichungen

Lagrange	Euler
$\dot{\overset{p}{\boldsymbol{C}}}{}^{\flat}{}_{n} - h\beta_0\Lambda_n 2\dfrac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}{}_n} = -\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j \overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^{\flat}{}_{n-j}$	$\overset{-e}{b}{}^{\flat}{}_{n} - h\beta_0\lambda_n 2\dfrac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}{}_n} = -\boldsymbol{\Phi}_{*n}\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j \boldsymbol{\Phi}^{*}{}_{n-j}\overset{-e}{b}{}^{\flat}{}_{n-j}$
$\mathcal{E}_{pM_n} + h\beta_0\Lambda_n\dot{\mathcal{E}}_{pM_n} = -\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j\mathcal{E}_{pM_{n-j}}$	$\varepsilon_{pM_n} + h\beta_0\lambda_n\dot{\varepsilon}_{pM_n} = -\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j\varepsilon_{pM_{n-j}}$
$\mathcal{F}_n + h\beta_0\Lambda_n\dot{\mathcal{F}}_n = -\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j\mathcal{F}_{n-j}$	$f_n + h\beta_0\lambda_n\dot{f}_n = -\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j f_{n-j}$
$\Lambda_n Y(\boldsymbol{T}^{\sharp}{}_n, \mathcal{E}_{pM_n}, \mathcal{F}_n) = 0$	$\lambda_n y(\boldsymbol{\tau}^{\sharp}{}_n, \varepsilon_{pM_n}, f_n) = 0$

(3.10)

(h – Schrittweite; β_0, α_j – Gewichte für das k–Schritt–BDF–Verfahren [18]) über. Zusätzlich gelten die algebraischen Beziehungen

Lagrange	Euler
$\boldsymbol{T}^{\sharp}{}_n = 2\dfrac{\partial\Psi_e(\boldsymbol{G}^{\flat}+\boldsymbol{C}^{\flat}{}_n-\overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^{\flat}{}_n)}{\partial\boldsymbol{C}^{\flat}}$	$\boldsymbol{\tau}^{\sharp}{}_n = 2\dfrac{\partial\psi_e(\overset{-1}{\boldsymbol{b}}{}^{\flat}{}_n+\boldsymbol{g}^{\flat}-\overset{-e}{\boldsymbol{b}}{}^{\flat}{}_n)}{\partial\boldsymbol{g}^{\flat}}$

Eine zu (3.10) äquivalente Formulierung lautet

Lagrange	Euler
$\boldsymbol{T}^{\sharp}{}_n + h\beta_0\Lambda_n 2\dfrac{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{C}^{\flat}{}_n} : \dfrac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}{}_n} = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \boldsymbol{T}^{\sharp}{}_{n-j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{C}^{\flat}{}_n} : \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \boldsymbol{C}^{\flat}{}_{n-j}$	$\boldsymbol{\tau}^{\sharp}{}_n + h\beta_0\lambda_n 2\dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{g}^{\flat}{}_n} : \dfrac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}{}_n} = -\boldsymbol{\Phi}_{*n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \boldsymbol{\Phi}^{*}{}_{n-j} \boldsymbol{\tau}^{\sharp}{}_{n-j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{g}^{\flat}{}_n} : \boldsymbol{\Phi}_{*n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \boldsymbol{\Phi}^{*}{}_{n-j} \boldsymbol{g}^{\flat}$
$\mathcal{E}_{pM_n} + h\beta_0\Lambda_n \dot{\mathcal{E}}_{pM_n} = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathcal{E}_{pM_{n-j}}$	$\varepsilon_{pM_n} + h\beta_0\lambda_n \dot{\varepsilon}_{pM_n} = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varepsilon_{pM_{n-j}}$
$\mathcal{F}_n + h\beta_0\Lambda_n \dot{\mathcal{F}}_n = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathcal{F}_{n-j}$	$f_n + h\beta_0\lambda_n \dot{f}_n = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{n-j}$
$\Lambda_n Y(\boldsymbol{T}^{\sharp}{}_n, \mathcal{E}_{pM_n}, \mathcal{F}_n) = 0$	$\lambda_n y(\boldsymbol{\tau}^{\sharp}{}_n, \varepsilon_{pM_n}, f_n) = 0$

(3.11)

Zusätzlich gelten die Beziehungen

Lagrange	Euler
$\overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^{\flat}{}_n = h\beta_0\Lambda_n 2\dfrac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}{}_n} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^{\flat}{}_{n-j}$	$\overset{-e}{b}{}^{\flat}{}_n = h\beta_0\lambda_n 2\dfrac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}{}_n} - \boldsymbol{\Phi}_{*n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \boldsymbol{\Phi}^{*}{}_{n-j} \overset{-e}{b}{}^{\flat}{}_{n-j}$

Zur Lösung dieses Systems (3.11) nichtlinearer algebraischer Gleichungen bietet sich ein Pseudo–Newton–Verfahren an

in der Ausgangskonfiguration

$$
\{\boldsymbol{\mathcal{J}_L}\}\begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{T}^\sharp\\[2ex] \delta\mathcal{E}_{pM}\\[2ex] \delta\mathcal{F}\\[2ex] \delta\Lambda\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}^{\sharp\,\xi} - \dfrac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}^{\xi} : \left(\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_j\boldsymbol{C}^\flat{}_{n-j} - \Lambda^\xi 2\dfrac{\partial Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^{\xi}\right) + \sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j\boldsymbol{T}^\sharp{}_{n-j}\\ \mathcal{E}^\xi_{pM} + \Lambda^\xi\dot{\mathcal{E}}^\xi_{pM} + \sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j\mathcal{E}_{pM_{n-j}}\\ \mathcal{F}^\xi + \Lambda^\xi\dot{\mathcal{F}}^\xi + \sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j\mathcal{F}_{n-j}\\ \Lambda^\xi Y^\xi\end{pmatrix}
$$

(ξ – aktueller Iterationsschritt) mit

$$
\{\boldsymbol{\mathcal{J}_L}\}:= \tag{3.12}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{\mathcal{I}}+\Lambda^\xi\dfrac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}^{\xi}:2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^{\xi} & \Lambda^\xi\dfrac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}^{\xi}:2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp\partial\mathcal{E}_{pM}}^{\xi} & \Lambda^\xi\dfrac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}^{\xi}:2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp\partial\mathcal{F}}^{\xi} & \dfrac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}^{\xi}:2\dfrac{\partial Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^{\xi}\\
\Lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^{\xi} & 1+\Lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial\mathcal{E}_{pM}}^{\xi} & \Lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial\mathcal{F}}^{\xi} & \dot{\mathcal{E}}^{\xi}_{pM}\\
\Lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\mathcal{F}}}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^{\xi} & \Lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\mathcal{F}}}{\partial\mathcal{E}_{pM}}^{\xi} & 1+\Lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\mathcal{F}}}{\partial\mathcal{F}}^{\xi} & \dot{\mathcal{F}}^\xi\\
\Lambda^\xi\dfrac{\partial Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^{\xi} & \Lambda^\xi\dfrac{\partial Y}{\partial\mathcal{E}_{pM}}^{\xi} & \Lambda^\xi\dfrac{\partial Y}{\partial\mathcal{F}}^{\xi} & Y^\xi
\end{pmatrix}
$$

wobei hier und im weiteren Λ für $h\beta_0\Lambda$ steht.

in der Momentankonfiguration

$$\{\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\boldsymbol{E}}\}\begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{\tau}^\sharp\\[2ex] \delta\varepsilon_{pM}\\[2ex] \delta f\\[2ex] \delta\lambda\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}^{\sharp\xi} - \dfrac{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial\boldsymbol{g}^\flat}^{\xi} : \left(\boldsymbol{\Phi}_*{}^{\xi} \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \boldsymbol{\Phi}^*{}_{n-j}\boldsymbol{g}^\flat - \lambda^\xi 2 \dfrac{\partial y}{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}^{\xi}\right) + \boldsymbol{\Phi}_*{}^{\xi} \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j\boldsymbol{\Phi}^*{}_{n-j}\boldsymbol{\tau}^\sharp{}_{n-j}\\[2ex] \varepsilon_{pM}^{\xi} + \lambda^\xi\dot{\varepsilon}_{pM}^{\xi} + \sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j\varepsilon_{pM_{n-j}}\\[2ex] f^\xi + \lambda^\xi\dot{f}^\xi + \sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j f_{n-j}\\[2ex] \lambda^\xi y^\xi \end{pmatrix}$$

(Φ^* – Abbildung auf die Ausgangskonfiguration; Φ_* – Abbildung auf die Momentankonfiguration) mit

$$\{\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\boldsymbol{E}}\}:= \tag{3.13}$$

$$\begin{pmatrix}
\boldsymbol{\mathcal{I}}+\lambda^\xi\dfrac{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial\boldsymbol{g}^\flat}^{\xi}:2\dfrac{\partial^2 y}{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}^{\xi} & \lambda^\xi\dfrac{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial\boldsymbol{g}^\flat}^{\xi}:2\dfrac{\partial^2 y}{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp\partial\varepsilon_{pM}}^{\xi} & \lambda^\xi\dfrac{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial\boldsymbol{g}^\flat}^{\xi}:2\dfrac{\partial^2 y}{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp\partial f}^{\xi} & \dfrac{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial\boldsymbol{g}^\flat}^{\xi}:2\dfrac{\partial y}{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}^{\xi}\\
\lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}^{\xi} & 1+\lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial\varepsilon_{pM}}^{\xi} & \lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial f}^{\xi} & \dot{\varepsilon}_{pM}^{\xi}\\
\lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{f}}{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}^{\xi} & \lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{f}}{\partial\varepsilon_{pM}}^{\xi} & 1+\lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{f}}{\partial f}^{\xi} & \dot{f}^\xi\\
\lambda^\xi\dfrac{\partial y}{\partial\boldsymbol{\tau}^\sharp}^{\xi} & \lambda^\xi\dfrac{\partial y}{\partial\varepsilon_{pM}}^{\xi} & \lambda^\xi\dfrac{\partial y}{\partial f}^{\xi} & y^\xi
\end{pmatrix}$$

wobei hier und im weitern λ für $h\beta_0\lambda$ steht. Für $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat\partial\boldsymbol{C}^\flat}\approx\mathbf{0}$ bzw. $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial\boldsymbol{g}^\flat\partial\boldsymbol{g}^\flat}\approx\mathbf{0}$ geht das obige Verfahren in ein Newton–Verfahren über.

Zur Lösung diese Systems (3.10) nichtlinearer algebraischer Gleichungen bietet sich ein Newton–Verfahren an

in der Ausgangskonfiguration

$$\{\boldsymbol{\mathcal{J}_L}\}\begin{pmatrix}\delta\overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^\flat\\[2ex] \delta\mathcal{E}_{pM}\\[2ex] \delta\mathcal{F}\\[2ex] \delta\Lambda\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^{\flat\,\xi}-\Lambda^\xi 2\dfrac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp}^\xi+\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j\overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^\flat{}_{n-j}\\ \mathcal{E}_{pM}^\xi+\Lambda^\xi\dot{\mathcal{E}}_{pM}^\xi+\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j\mathcal{E}_{pM_{n-j}}\\ \mathcal{F}^\xi+\Lambda^\xi\dot{\mathcal{F}}^\xi+\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j\mathcal{F}_{n-j}\\ \Lambda^\xi Y^\xi\end{pmatrix}$$

mit

$$\{\boldsymbol{\mathcal{J}_L}\}:=$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mathcal{I}}+\Lambda^\xi 2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^\xi:\dfrac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}^\xi & -\Lambda^\xi 2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp\partial\mathcal{E}_{pM}}^\xi & -\Lambda^\xi 2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp\partial\mathcal{F}}^\xi & -2\dfrac{\partial Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^\xi\\ -\Lambda^\xi 2\dfrac{\partial\dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^\xi:\dfrac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}^\xi & 1+\Lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial\mathcal{E}_{pM}}^\xi & \Lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial\mathcal{F}}^\xi & \dot{\mathcal{E}}_{pM}^\xi\\ -\Lambda^\xi 2\dfrac{\partial\dot{\mathcal{F}}}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^\xi:\dfrac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}^\xi & \Lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\mathcal{F}}}{\partial\mathcal{E}_{pM}}^\xi & 1+\Lambda^\xi\dfrac{\partial\dot{\mathcal{F}}}{\partial\mathcal{F}}^\xi & \dot{\mathcal{F}}^\xi\\ -\Lambda^\xi\dfrac{\partial Y}{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}^\xi:\dfrac{\partial\boldsymbol{T}^\sharp}{\partial\boldsymbol{C}^\flat}^\xi & \Lambda^\xi\dfrac{\partial Y}{\partial\mathcal{E}_{pM}}^\xi & \Lambda^\xi\dfrac{\partial Y}{\partial\mathcal{F}}^\xi & Y^\xi\end{pmatrix} \tag{3.14}$$

und den Startwerten

$$\overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^{\flat\,0}=-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^\flat{}_{n-j};\ \mathcal{E}_{pM}^0=-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\mathcal{E}_{pM_{n-j}};\ \mathcal{F}^0=-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\mathcal{F}_{n-j}.$$

in der Momentankonfiguration

$$
\{\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\boldsymbol{E}}\}\begin{pmatrix} \delta\bar{\boldsymbol{b}}^{e\flat} \\ \delta\varepsilon_{pM} \\ \delta f \\ \delta\lambda \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{b}}^{e\flat\,\xi} - \lambda^{\xi} 2 \dfrac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}^{\xi} + \boldsymbol{\Phi}_{*n} \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \boldsymbol{\Phi}^{*}{}_{n-j} \bar{\boldsymbol{b}}^{e\flat}{}_{n-j} \\ \varepsilon_{pM}^{\xi} + \lambda^{\xi} \dot{\varepsilon}_{pM}^{\xi} + \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \varepsilon_{pM_{n-j}} \\ f^{\xi} + \lambda^{\xi} \dot{f}^{\xi} + \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j f_{n-j} \\ \lambda^{\xi} y^{\xi} \end{pmatrix}
$$

mit

$\{\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\boldsymbol{E}}\} :=$

$$
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{\mathcal{I}} + \lambda^{\xi} 2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp} \partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}^{\xi} : \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{g}^{\flat}}^{\xi} & -\lambda^{\xi} 2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp} \partial \varepsilon_{pM}}^{\xi} & -\lambda^{\xi} 2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp} \partial f}^{\xi} & -2 \dfrac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}^{\xi} \\
-\lambda^{\xi} \dfrac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}^{\xi} : \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{g}^{\flat}}^{\xi} & 1 + \lambda^{\xi} \dfrac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \varepsilon_{pM}}^{\xi} & \lambda^{\xi} \dfrac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial f}^{\xi} & \dot{\varepsilon}_{pM}^{\xi} \\
-\lambda^{\xi} \dfrac{\partial \dot{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}^{\xi} : \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{g}^{\flat}}^{\xi} & \lambda^{\xi} \dfrac{\partial \dot{f}}{\partial \varepsilon_{pM}}^{\xi} & 1 + \lambda^{\xi} \dfrac{\partial \dot{f}}{\partial f}^{\xi} & \dot{f}^{\xi} \\
-\lambda^{\xi} \dfrac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}^{\xi} : \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{g}^{\flat}}^{\xi} & \lambda^{\xi} \dfrac{\partial y}{\partial \varepsilon_{pM}}^{\xi} & \lambda^{\xi} \dfrac{\partial y}{\partial f}^{\xi} & y^{\xi}
\end{pmatrix} \tag{3.15}
$$

und den Startwerten

$$
\bar{\boldsymbol{b}}^{e\flat\,0} = -\boldsymbol{\Phi}_{*n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \boldsymbol{\Phi}^{*}{}_{n-j} \bar{\boldsymbol{b}}^{e\flat}{}_{n-j}; \;\; \varepsilon_{pM}^{0} = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varepsilon_{pM_{n-j}}; \;\; f^{0} = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{n-j}; \;\; \lambda^{0} = \lambda_{n-1}.
$$

In der Matrixformulierung können die jeweiligen Untermatrizen von $\{\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\boldsymbol{L}}\}$ bzw. $\{\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\boldsymbol{E}}\}$ geschrieben werden als:

in der Ausgangskonfiguration

$$
\left\{\boldsymbol{\mathcal{I}}+\Lambda^{\xi}\,\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{C}^{\flat}}^{\xi} : 2\frac{\partial^2 Y}{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}^{\xi}\right\} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \Lambda^{\xi}\left\{2\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{C}^{\flat}}\right\} \times
$$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XX}\partial T^{XX}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XX}\partial T^{YY}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XX}\partial T^{ZZ}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XX}\partial T^{XY}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XX}\partial T^{YZ}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XX}\partial T^{ZX}} \\
\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YY}\partial T^{XX}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YY}\partial T^{YY}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YY}\partial T^{ZZ}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YY}\partial T^{XY}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YY}\partial T^{YZ}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YY}\partial T^{ZX}} \\
\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZZ}\partial T^{XX}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZZ}\partial T^{YY}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZZ}\partial T^{ZZ}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZZ}\partial T^{XY}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZZ}\partial T^{YZ}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZZ}\partial T^{ZX}} \\
2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial T^{XX}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial T^{YY}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial T^{ZZ}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial T^{XY}}+\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial T^{YX}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial T^{YZ}}+\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial T^{ZY}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial T^{ZX}}+\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial T^{XZ}} \\
2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial T^{XX}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial T^{YY}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial T^{ZZ}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial T^{XY}}+\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial T^{YX}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial T^{YZ}}+\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial T^{ZY}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial T^{ZX}}+\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial T^{XZ}} \\
2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial T^{XX}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial T^{YY}} & 2\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial T^{ZZ}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial T^{XY}}+\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial T^{YX}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial T^{YZ}}+\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial T^{ZY}} & \frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial T^{ZX}}+\frac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial T^{XZ}}
\end{pmatrix}
$$

$$\left\{\Lambda^{\xi}\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{C}^{\flat}}^{\xi} : 2\frac{\partial^2 Y}{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}\partial \mathcal{E}_{pM}}^{\xi}\right\} := \Lambda^{\xi}\left\{2\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{C}^{\flat}}\right\}\times\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{XX}\partial \mathcal{E}_{pM}} \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{YY}\partial \mathcal{E}_{pM}} \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZZ}\partial \mathcal{E}_{pM}} \\ 2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial \mathcal{E}_{pM}} \\ 2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial \mathcal{E}_{pM}} \\ 2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial \mathcal{E}_{pM}} \end{pmatrix}; \quad \left\{\Lambda^{\xi}\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{C}^{\flat}}^{\xi} : 2\frac{\partial^2 Y}{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}\partial \mathcal{F}}^{\xi}\right\} := \Lambda^{\xi}\left\{2\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{C}^{\flat}}\right\}\times\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{XX}\partial \mathcal{F}} \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{YY}\partial \mathcal{F}} \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZZ}\partial \mathcal{F}} \\ 2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{XY}\partial \mathcal{F}} \\ 2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{YZ}\partial \mathcal{F}} \\ 2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial T^{ZX}\partial \mathcal{F}} \end{pmatrix}; \quad \left\{\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{C}^{\flat}}^{\xi} : 2\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}^{\xi}\right\} := \left\{2\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}{\partial \boldsymbol{C}^{\flat}}\right\}\times\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Y}{\partial T^{XX}} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial T^{YY}} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial T^{ZZ}} \\ 2\dfrac{\partial Y}{\partial T^{XY}} \\ 2\dfrac{\partial Y}{\partial T^{YZ}} \\ 2\dfrac{\partial Y}{\partial T^{ZX}} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\Lambda^{\xi}\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}^{\xi}\right\} := \Lambda^{\xi}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial T^{XX}} & \dfrac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial T^{YY}} & \dfrac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial T^{ZZ}} & 2\dfrac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial T^{XY}} & 2\dfrac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial T^{YZ}} & 2\dfrac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial T^{ZX}} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\Lambda^{\xi}\frac{\partial \dot{\mathcal{F}}}{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}^{\xi}\right\} := \Lambda^{\xi}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{\mathcal{F}}}{\partial T^{XX}} & \dfrac{\partial \dot{\mathcal{F}}}{\partial T^{YY}} & \dfrac{\partial \dot{\mathcal{F}}}{\partial T^{ZZ}} & 2\dfrac{\partial \dot{\mathcal{F}}}{\partial T^{XY}} & 2\dfrac{\partial \dot{\mathcal{F}}}{\partial T^{YZ}} & 2\dfrac{\partial \dot{\mathcal{F}}}{\partial T^{ZX}} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^{\sharp}}^{\xi}\right\} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Y}{\partial T^{XX}} & \dfrac{\partial Y}{\partial T^{YY}} & \dfrac{\partial Y}{\partial T^{ZZ}} & 2\dfrac{\partial Y}{\partial T^{XY}} & 2\dfrac{\partial Y}{\partial T^{YZ}} & 2\dfrac{\partial Y}{\partial T^{ZX}} \end{pmatrix}$$

in der Momentankonfiguration

$$
\left\{\boldsymbol{\mathcal{I}}+\lambda^{\xi}\frac{\partial\boldsymbol{\tau}^{\sharp}}{\partial\boldsymbol{g}^{\flat}}^{\xi}:2\frac{\partial^2 y}{\partial\boldsymbol{\tau}^{\sharp}\partial\boldsymbol{\tau}^{\sharp}}^{\xi}\right\}:=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}+\lambda^{\xi}J\left\{\frac{2}{J}\frac{\partial\boldsymbol{\tau}^{\sharp}}{\partial\boldsymbol{g}^{\flat}}\right\}\times
$$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xx}\partial\tau^{xx}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xx}\partial\tau^{yy}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xx}\partial\tau^{zz}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xx}\partial\tau^{xy}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xx}\partial\tau^{yz}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xx}\partial\tau^{zx}}\\
\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yy}\partial\tau^{xx}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yy}\partial\tau^{yy}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yy}\partial\tau^{zz}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yy}\partial\tau^{xy}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yy}\partial\tau^{yz}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yy}\partial\tau^{zx}}\\
\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zz}\partial\tau^{xx}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zz}\partial\tau^{yy}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zz}\partial\tau^{zz}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zz}\partial\tau^{xy}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zz}\partial\tau^{yz}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zz}\partial\tau^{zx}}\\
2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xy}\partial\tau^{xx}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xy}\partial\tau^{yy}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xy}\partial\tau^{zz}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xy}\partial\tau^{xy}}+\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xy}\partial\tau^{yx}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xy}\partial\tau^{yz}}+\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xy}\partial\tau^{zy}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xy}\partial\tau^{zx}}+\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{xy}\partial\tau^{xz}}\\
2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yz}\partial\tau^{xx}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yz}\partial\tau^{yy}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yz}\partial\tau^{zz}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yz}\partial\tau^{xy}}+\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yz}\partial\tau^{yx}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yz}\partial\tau^{yz}}+\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yz}\partial\tau^{zy}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yz}\partial\tau^{zx}}+\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{yz}\partial\tau^{xz}}\\
2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zx}\partial\tau^{xx}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zx}\partial\tau^{yy}} & 2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zx}\partial\tau^{zz}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zx}\partial\tau^{xy}}+\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zx}\partial\tau^{yx}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zx}\partial\tau^{yz}}+\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zx}\partial\tau^{zy}} & \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zx}\partial\tau^{zx}}+\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^{zx}\partial\tau^{xz}}
\end{pmatrix}
$$

$$\left\{\lambda^\xi \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial \boldsymbol{g}^\flat}^\xi : 2\frac{\partial^2 y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp \partial \varepsilon_{pM}}^\xi\right\} := \lambda^\xi J \left\{\frac{2}{J}\frac{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial \boldsymbol{g}^\flat}\right\} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{xx} \partial \varepsilon_{pM}} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{yy} \partial \varepsilon_{pM}} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{zz} \partial \varepsilon_{pM}} \\ 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{xy} \partial \varepsilon_{pM}} \\ 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{yz} \partial \varepsilon_{pM}} \\ 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{zx} \partial \varepsilon_{pM}} \end{pmatrix}; \quad \left\{\lambda^\xi \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial \boldsymbol{g}^\flat}^\xi : 2\frac{\partial^2 y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp \partial f}^\xi\right\} := \lambda^\xi J \left\{\frac{2}{J}\frac{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial \boldsymbol{g}^\flat}\right\} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{xx} \partial f} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{yy} \partial f} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{zz} \partial f} \\ 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{xy} \partial f} \\ 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{yz} \partial f} \\ 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial \tau^{zx} \partial f} \end{pmatrix}; \quad \left\{\frac{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial \boldsymbol{g}^\flat}^\xi : 2\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}^\xi\right\} := J \left\{\frac{2}{J}\frac{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial \boldsymbol{g}^\flat}\right\} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \tau^{xx}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \tau^{yy}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \tau^{zz}} \\ 2\dfrac{\partial y}{\partial \tau^{xy}} \\ 2\dfrac{\partial y}{\partial \tau^{yz}} \\ 2\dfrac{\partial y}{\partial \tau^{zx}}; \end{pmatrix}$$

$$\left\{\lambda^\xi \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}^\xi\right\} := \lambda^\xi \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \tau^{xx}} & \dfrac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \tau^{yy}} & \dfrac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \tau^{zz}} & 2\dfrac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \tau^{xy}} & 2\dfrac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \tau^{yz}} & 2\dfrac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \tau^{zx}} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\lambda^\xi \frac{\partial \dot{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}^\xi\right\} := \lambda^\xi \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{f}}{\partial \tau^{xx}} & \dfrac{\partial \dot{f}}{\partial \tau^{yy}} & \dfrac{\partial \dot{f}}{\partial \tau^{zz}} & 2\dfrac{\partial \dot{f}}{\partial \tau^{xy}} & 2\dfrac{\partial \dot{f}}{\partial \tau^{yz}} & 2\dfrac{\partial \dot{f}}{\partial \tau^{zx}} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}^\xi\right\} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \tau^{xx}} & \dfrac{\partial y}{\partial \tau^{yy}} & \dfrac{\partial y}{\partial \tau^{zz}} & 2\dfrac{\partial y}{\partial \tau^{xy}} & 2\dfrac{\partial y}{\partial \tau^{yz}} & 2\dfrac{\partial y}{\partial \tau^{zx}} \end{pmatrix}$$

3.2 Berechnung der konsistenten materiellen Steifigkeit

Durch Differentiation der algebraischen Gleichungen (3.11) nach $\boldsymbol{C}^\flat$ bzw. $\boldsymbol{g}^\flat$ erhält man die Beziehungen

Lagrange	Euler
$\{\boldsymbol{\mathcal{J}_L}\} \begin{pmatrix} \frac{dT^{XX}}{dC_{AB}} \\ \frac{dT^{YY}}{dC_{AB}} \\ \frac{dT^{ZZ}}{dC_{AB}} \\ \frac{dT^{XY}}{dC_{AB}} \\ \frac{dT^{YZ}}{dC_{AB}} \\ \frac{dT^{ZX}}{dC_{AB}} \\ \frac{d\mathcal{E}_{pM}}{dC_{AB}} \\ \frac{d\mathcal{F}}{dC_{AB}} \\ \frac{d\Lambda}{dC_{AB}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T^{XX}}{\partial C_{AB}} \\ \frac{\partial T^{YY}}{\partial C_{AB}} \\ \frac{\partial T^{ZZ}}{\partial C_{AB}} \\ \frac{\partial T^{XY}}{\partial C_{AB}} \\ \frac{\partial T^{YZ}}{\partial C_{AB}} \\ \frac{\partial T^{ZX}}{\partial C_{AB}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A;B = X,Y,Z$	$\{\boldsymbol{\mathcal{J}_E}\} \begin{pmatrix} \frac{d\tau^{xx}}{dg_{ab}} \\ \frac{d\tau^{yy}}{dg_{ab}} \\ \frac{d\tau^{zz}}{dg_{ab}} \\ \frac{d\tau^{xy}}{dg_{ab}} \\ \frac{d\tau^{yz}}{dg_{ab}} \\ \frac{d\tau^{zx}}{dg_{ab}} \\ \frac{d\varepsilon_{pM}}{dg_{ab}} \\ \frac{df}{dg_{ab}} \\ \frac{d\lambda}{dg_{ab}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau^{xx}}{\partial g_{ab}} \\ \frac{\partial \tau^{yy}}{\partial g_{ab}} \\ \frac{\partial \tau^{zz}}{\partial g_{ab}} \\ \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial g_{ab}} \\ \frac{\partial \tau^{yz}}{\partial g_{ab}} \\ \frac{\partial \tau^{zx}}{\partial g_{ab}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a;b = x,y,z$

mit $\{\boldsymbol{\mathcal{J}_L}\}$ bzw. $\{\boldsymbol{\mathcal{J}_E}\}$ aus (3.12) bzw. (3.13). Die Ausdrücke $\frac{dT^{CD}}{dC_{AB}}$ bzw. $\frac{d\tau^{cd}}{dg_{ab}}$ sind im Sinne der Bemerkung nach (2.2) als komponentenweise Ableitungen unter Anwendung der Kettenregel zu verstehen. Durch Lösung dieser linearen Gleichungssysteme $\forall A, B$ bzw. $\forall a, b$ können die konsistenten algorithmischen materiellen Tangenten entsprechend der Struktur (3.17) bzw. (3.18) mit der gleichen Genauigkeit wie die Spannungen und die internen Variablen aufgebaut werden. Die algorithmische konsistente Gesamtsteifigkeit ergibt sich dann letztlich gemäß (2.2).

3.3 Hyperelastisches Potential

Eine Erweiterung des Hooke'schen Materialgesetzes auf geometrisch nichtlineare Probleme (Neo–Hooke Material) kann z.B. mit den elastischen Potentialen (vgl. (3.8))

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \psi_e(I_{\boldsymbol{b}^\sharp}, J) = \tfrac{1}{2}\mu(I_{\boldsymbol{b}^\sharp} - 2\ln J - 3) \quad + \tfrac{1}{2}\lambda\,(\ln J)^2\,; \quad I_{\boldsymbol{b}^\sharp} := b^{ab}(\overset{-1}{b}_{ab} \;+ g_{ab} - \overset{-e}{b}_{ab}\,) \equiv G^{AB}(G_{AB} + C_{AB} - \overset{p}{C}_{AB}) =: I_{\boldsymbol{C}^\flat}\\
&b)\quad \psi_e(I_{\boldsymbol{b}^\sharp}, J) = \tfrac{1}{2}\mu(I_{\boldsymbol{b}^\sharp} - 2\ln J - 3) \quad + \tfrac{1}{2}\lambda\,(J-1)^2\\
&c)\quad \psi_e(I_{\boldsymbol{b}^\sharp}, J) = \tfrac{1}{2}\mu(I_{\boldsymbol{b}^\sharp} - J^2 - 2) \qquad + \tfrac{1}{2}\lambda\,(\ln J)^2\,; \quad J := \sqrt{\left|b^{ab}(\overset{-1}{b}_{bc} \;+ g_{bc} - \overset{-e}{b}_{bc}\,)\right|} \equiv \sqrt{\left|G^{AB}(G_{BC} + C_{BC} - \overset{p}{C}_{BC})\right|}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

formuliert werden. Hieraus ergeben sich die Spannungs–Dehnungsbeziehungen (vgl. (3.9))

Lagrange	Euler
$a)\;\; \boldsymbol{T}^\sharp = \mu(\boldsymbol{G}^\sharp - \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp) + \lambda \ln J \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp$	$\boldsymbol{\tau}^\sharp = \mu(\boldsymbol{b}^\sharp - \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp) + \lambda \ln J \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp$
$b)\;\; \boldsymbol{T}^\sharp = \mu(\boldsymbol{G}^\sharp - \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp) + \lambda J(J-1)\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp;\;\; \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp := \left(\boldsymbol{G}^\flat + \boldsymbol{C}^\flat - \overset{p}{\boldsymbol{C}}{}^\flat\right)^{-1}$	$\boldsymbol{\tau}^\sharp = \mu(\boldsymbol{b}^\sharp - \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp) + \lambda J(J-1)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp; \qquad \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp := \left(\overset{-1}{\boldsymbol{b}}{}^\flat + \boldsymbol{g}^\flat - \overset{-e}{\boldsymbol{b}}{}^\flat\right)^{-1}$
$c)\;\; \boldsymbol{T}^\sharp = \mu(\boldsymbol{G}^\sharp - J^2\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp) + \lambda \ln J \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp$	$\boldsymbol{\tau}^\sharp = \mu(\boldsymbol{b}^\sharp - J^2\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp) + \lambda \ln J \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp$

und ein hyperelastischer Materialtensor

Lagrange	Euler
$a)\;\; \dfrac{\partial \boldsymbol{T}^\sharp}{\partial \boldsymbol{C}^\flat} = (\mu - \lambda \ln J)\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp \cdot \boldsymbol{I} \cdot \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp + \dfrac{\lambda}{2}\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp \otimes \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp$	$\dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial \boldsymbol{g}^\flat} = (\mu - \lambda \ln J)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp \cdot \boldsymbol{I} \cdot \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp + \dfrac{\lambda}{2}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp \otimes \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp$
$b)\;\; \dfrac{\partial \boldsymbol{T}^\sharp}{\partial \boldsymbol{C}^\flat} = [\mu - \lambda J(J-1)]\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp \cdot \boldsymbol{I} \cdot \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp + \dfrac{\lambda}{2}J(2J-1)\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp \otimes \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp$	$\dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial \boldsymbol{g}^\flat} = [\mu - \lambda J(J-1)]\,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp \cdot \boldsymbol{I} \cdot \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp + \dfrac{\lambda}{2}J(2J-1)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp \otimes \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp$
$c)\;\; \dfrac{\partial \boldsymbol{T}^\sharp}{\partial \boldsymbol{C}^\flat} = (\mu J^2 - \lambda \ln J)\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp \cdot \boldsymbol{I} \cdot \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp + \left(\dfrac{\lambda}{2} - \mu J^2\right)\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp \otimes \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^\sharp$	$\dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial \boldsymbol{g}^\flat} = (\mu J^2 - \lambda \ln J)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp \cdot \boldsymbol{I} \cdot \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp + \left(\dfrac{\lambda}{2} - \mu J^2\right)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp \otimes \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^\sharp.$

In Komponentenschreibweise ergibt dies

Lagrange	Euler
$a)\ T^{AB} = \mu(G^{AB} - \widehat{\mathcal{B}}^{AB}) + \lambda \ln J \widehat{\mathcal{B}}^{AB}$	$\tau^{ab} = \mu(b^{ab} - \widehat{\gamma}^{ab}) + \lambda \ln J \widehat{\gamma}^{ab}$
$b)\ T^{AB} = \mu(G^{AB} - \widehat{\mathcal{B}}^{AB}) + \lambda J(J-1) \widehat{\mathcal{B}}^{AB}$	$\tau^{ab} = \mu(b^{ab} - \widehat{\gamma}^{ab}) + \lambda J(J-1) \widehat{\gamma}^{ab}$
$c)\ T^{AB} = \mu(G^{AB} - J^2 \widehat{\mathcal{B}}^{AB}) + \lambda \ln J \widehat{\mathcal{B}}^{AB}$	$\tau^{ab} = \mu(b^{ab} - J^2 \widehat{\gamma}^{ab}) + \lambda \ln J \widehat{\gamma}^{ab}$

und für den hyperelastischer Materialtensor

Lagrange	Euler
$a)\ \dfrac{\partial T^{AB}}{\partial C_{CD}} = (\mu - \lambda \ln J) \widehat{\mathcal{B}}^{AC} \widehat{\mathcal{B}}^{DB} + \dfrac{\lambda}{2} \widehat{\mathcal{B}}^{AB} \widehat{\mathcal{B}}^{CD}$	$\dfrac{\partial \tau^{ab}}{\partial g_{cd}} = (\mu - \lambda \ln J) \widehat{\gamma}^{ac} \widehat{\gamma}^{db} + \dfrac{\lambda}{2} \widehat{\gamma}^{ab} \widehat{\gamma}^{cd}$
$b)\ \dfrac{\partial T^{AB}}{\partial C_{CD}} = [\mu - \lambda J(J-1)]\, \widehat{\mathcal{B}}^{AC} \widehat{\mathcal{B}}^{DB} + \dfrac{\lambda}{2} J(2J-1) \widehat{\mathcal{B}}^{AB} \widehat{\mathcal{B}}^{CD}$	$\dfrac{\partial \tau^{ab}}{\partial g_{cd}} = [\mu - \lambda J(J-1)]\, \widehat{\gamma}^{ac} \widehat{\gamma}^{db} + \dfrac{\lambda}{2} J(2J-1) \widehat{\gamma}^{ab} \widehat{\gamma}^{cd}$
$c)\ \dfrac{\partial T^{AB}}{\partial C_{CD}} = (\mu J^2 - \lambda \ln J) \widehat{\mathcal{B}}^{AC} \widehat{\mathcal{B}}^{DB} + \left(\dfrac{\lambda}{2} - \mu J^2\right) \widehat{\mathcal{B}}^{AB} \widehat{\mathcal{B}}^{CD}$	$\dfrac{\partial \tau^{ab}}{\partial g_{cd}} = (\mu J^2 - \lambda \ln J) \widehat{\gamma}^{ac} \widehat{\gamma}^{db} + \left(\dfrac{\lambda}{2} - \mu J^2\right) \widehat{\gamma}^{ab} \widehat{\gamma}^{cd}.$

In den vorliegenden Betrachtungen wird für den hyperelastischen Materialtensor durchgängig die im folgenden angegebene Matrizendarstellung verwendet.

in der Ausgangskonfiguration

$$\left\{2\frac{\partial \boldsymbol{T}^\sharp}{\partial \boldsymbol{C}^\flat}\right\} := \begin{pmatrix}
2\frac{\partial T^{XX}}{\partial C_{XX}} & 2\frac{\partial T^{XX}}{\partial C_{YY}} & 2\frac{\partial T^{XX}}{\partial C_{ZZ}} & 2\frac{\partial T^{XX}}{\partial C_{XY}} & 2\frac{\partial T^{XX}}{\partial C_{YZ}} & 2\frac{\partial T^{XX}}{\partial C_{ZX}} \\
2\frac{\partial T^{YY}}{\partial C_{XX}} & 2\frac{\partial T^{YY}}{\partial C_{YY}} & 2\frac{\partial T^{YY}}{\partial C_{ZZ}} & 2\frac{\partial T^{YY}}{\partial C_{XY}} & 2\frac{\partial T^{YY}}{\partial C_{YZ}} & 2\frac{\partial T^{YY}}{\partial C_{ZX}} \\
2\frac{\partial T^{ZZ}}{\partial C_{XX}} & 2\frac{\partial T^{ZZ}}{\partial C_{YY}} & 2\frac{\partial T^{ZZ}}{\partial C_{ZZ}} & 2\frac{\partial T^{ZZ}}{\partial C_{XY}} & 2\frac{\partial T^{ZZ}}{\partial C_{YZ}} & 2\frac{\partial T^{ZZ}}{\partial C_{ZX}} \\
2\frac{\partial T^{XY}}{\partial C_{XX}} & 2\frac{\partial T^{XY}}{\partial C_{YY}} & 2\frac{\partial T^{XY}}{\partial C_{ZZ}} & \frac{\partial T^{XY}}{\partial C_{XY}}+\frac{\partial T^{XY}}{\partial C_{YX}} & \frac{\partial T^{XY}}{\partial C_{YZ}}+\frac{\partial T^{XY}}{\partial C_{ZY}} & \frac{\partial T^{XY}}{\partial C_{ZX}}+\frac{\partial T^{XY}}{\partial C_{XZ}} \\
2\frac{\partial T^{YZ}}{\partial C_{XX}} & 2\frac{\partial T^{YZ}}{\partial C_{YY}} & 2\frac{\partial T^{YZ}}{\partial C_{ZZ}} & \frac{\partial T^{YZ}}{\partial C_{XY}}+\frac{\partial T^{YZ}}{\partial C_{YX}} & \frac{\partial T^{YZ}}{\partial C_{YZ}}+\frac{\partial T^{YZ}}{\partial C_{ZY}} & \frac{\partial T^{YZ}}{\partial C_{ZX}}+\frac{\partial T^{YZ}}{\partial C_{XZ}} \\
2\frac{\partial T^{ZX}}{\partial C_{XX}} & 2\frac{\partial T^{ZX}}{\partial C_{YY}} & 2\frac{\partial T^{ZX}}{\partial C_{ZZ}} & \frac{\partial T^{ZX}}{\partial C_{XY}}+\frac{\partial T^{ZX}}{\partial C_{YX}} & \frac{\partial T^{ZX}}{\partial C_{YZ}}+\frac{\partial T^{ZX}}{\partial C_{ZY}} & \frac{\partial T^{ZX}}{\partial C_{ZX}}+\frac{\partial T^{ZX}}{\partial C_{XZ}}
\end{pmatrix} \tag{3.17}$$

in der Momentankonfiguration

$$\left\{\frac{2}{J}\frac{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}{\partial \boldsymbol{g}^\flat}\right\} := \frac{1}{J}\begin{pmatrix}
2\frac{\partial \tau^{xx}}{\partial g_{xx}} & 2\frac{\partial \tau^{xx}}{\partial g_{yy}} & 2\frac{\partial \tau^{xx}}{\partial g_{zz}} & 2\frac{\partial \tau^{xx}}{\partial g_{xy}} & 2\frac{\partial \tau^{xx}}{\partial g_{yz}} & 2\frac{\partial \tau^{xx}}{\partial g_{zx}} \\
2\frac{\partial \tau^{yy}}{\partial g_{xx}} & 2\frac{\partial \tau^{yy}}{\partial g_{yy}} & 2\frac{\partial \tau^{yy}}{\partial g_{zz}} & 2\frac{\partial \tau^{yy}}{\partial g_{xy}} & 2\frac{\partial \tau^{yy}}{\partial g_{yz}} & 2\frac{\partial \tau^{yy}}{\partial g_{zx}} \\
2\frac{\partial \tau^{zz}}{\partial g_{xx}} & 2\frac{\partial \tau^{zz}}{\partial g_{yy}} & 2\frac{\partial \tau^{zz}}{\partial g_{zz}} & 2\frac{\partial \tau^{zz}}{\partial g_{xy}} & 2\frac{\partial \tau^{zz}}{\partial g_{yz}} & 2\frac{\partial \tau^{zz}}{\partial g_{zx}} \\
2\frac{\partial \tau^{xy}}{\partial g_{xx}} & 2\frac{\partial \tau^{xy}}{\partial g_{yy}} & 2\frac{\partial \tau^{xy}}{\partial g_{zz}} & \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial g_{xy}}+\frac{\partial \tau^{xy}}{\partial g_{yx}} & \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial g_{yz}}+\frac{\partial \tau^{xy}}{\partial g_{zy}} & \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial g_{zx}}+\frac{\partial \tau^{xy}}{\partial g_{xz}} \\
2\frac{\partial \tau^{yz}}{\partial g_{xx}} & 2\frac{\partial \tau^{yz}}{\partial g_{yy}} & 2\frac{\partial \tau^{yz}}{\partial g_{zz}} & \frac{\partial \tau^{yz}}{\partial g_{xy}}+\frac{\partial \tau^{yz}}{\partial g_{yx}} & \frac{\partial \tau^{yz}}{\partial g_{yz}}+\frac{\partial \tau^{yz}}{\partial g_{zy}} & \frac{\partial \tau^{yz}}{\partial g_{zx}}+\frac{\partial \tau^{yz}}{\partial g_{xz}} \\
2\frac{\partial \tau^{zx}}{\partial g_{xx}} & 2\frac{\partial \tau^{zx}}{\partial g_{yy}} & 2\frac{\partial \tau^{zx}}{\partial g_{zz}} & \frac{\partial \tau^{zx}}{\partial g_{xy}}+\frac{\partial \tau^{zx}}{\partial g_{yx}} & \frac{\partial \tau^{zx}}{\partial g_{yz}}+\frac{\partial \tau^{zx}}{\partial g_{zy}} & \frac{\partial \tau^{zx}}{\partial g_{zx}}+\frac{\partial \tau^{zx}}{\partial g_{xz}}
\end{pmatrix} \tag{3.18}$$

3.4 Plastischer Anteil des Deformationsgesetzes

Es wird die Fließbedingung des Gurson–Tvergaard–Needleman Modells (GTN–Modell) vorausgesetzt. Als Verfestigungsmechanismus soll die isotrope Verfestigung und für die Entfestigung eine veränderliche Porenkonzentration zugelassen werden.

Lagrange	Euler
$Y := \dfrac{-3II_{\boldsymbol{DEV}(\boldsymbol{T}^\sharp)}}{\Sigma_M^2} + 2q_1\mathcal{F}^* \cosh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\Sigma_M} I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right) - \left(1 + q_3\mathcal{F}^{*^2}\right)$	$y := \dfrac{-3II_{\boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\tau}^\sharp)}}{\sigma_M^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\sigma_M} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right) - \left(1 + q_3 f^{*^2}\right)$
$\dot{\mathcal{E}}_{pM} = -\dfrac{1}{\Sigma_M(1-\mathcal{F})}\boldsymbol{T}^\sharp : \dfrac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp}$	$\dot{\varepsilon}_{pM} = -\dfrac{1}{\sigma_M(1-f)}\boldsymbol{\tau}^\sharp : \dfrac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}$
$\dot{\mathcal{F}} = -\left[\dfrac{\mathcal{A}}{\Sigma_M(1-\mathcal{F})}\boldsymbol{T}^\sharp : \dfrac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp} + (1-\mathcal{F}) I_{\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp}}\right]$	$\dot{f} = -\left[\dfrac{\mathcal{A}}{\sigma_M(1-f)}\boldsymbol{\tau}^\sharp : \dfrac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} + (1-f) I_{\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}}\right]$

Die für den Algorithmus relevanten Ableitungen ergeben sich folglich zu

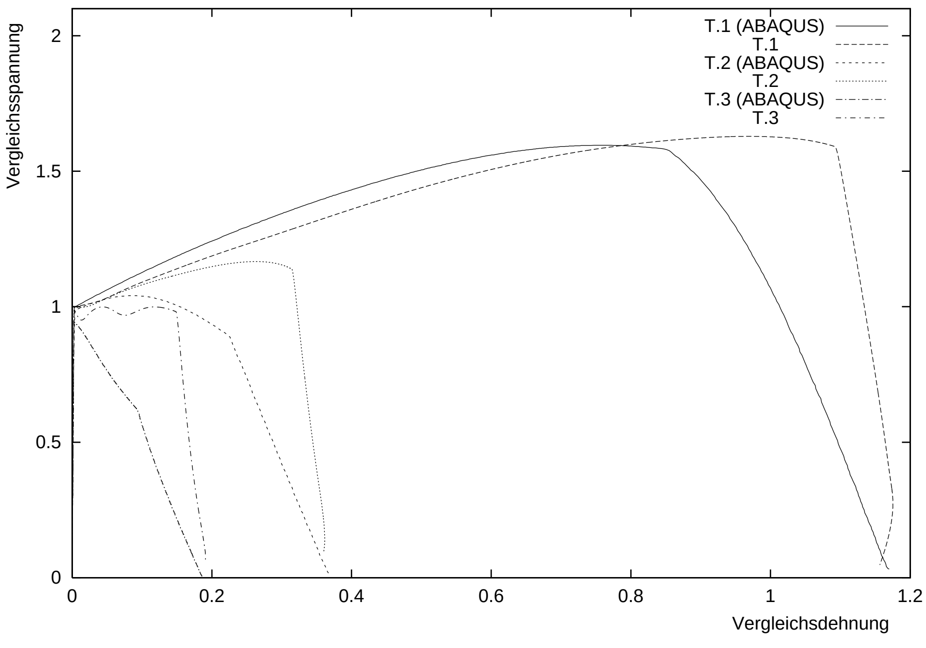
Lagrange	Euler
$\dfrac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp} = \dfrac{3\boldsymbol{C}^\flat \cdot \boldsymbol{DEV}(\boldsymbol{T}^\sharp) \cdot \boldsymbol{C}^\flat}{\Sigma_M^2} + q_1 q_2 \dfrac{\mathcal{F}^*}{\Sigma_M} \sinh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\Sigma_M} I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right) \boldsymbol{C}^\flat$	$\dfrac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} = \dfrac{3\boldsymbol{g}^\flat \cdot \boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\tau}^\sharp) \cdot \boldsymbol{g}^\flat}{\sigma_M^2} + q_1 q_2 \dfrac{f^*}{\sigma_M} \sinh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\sigma_M} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right) \boldsymbol{g}^\flat$
$\dfrac{\partial Y}{\partial \mathcal{E}_{pM}} = \left(\dfrac{6II_{\boldsymbol{DEV}(\boldsymbol{T}^\sharp)}}{\Sigma_M^3} - q_1 q_2 \dfrac{\mathcal{F}^*}{\Sigma_M^2} I_{\boldsymbol{T}^\sharp} \sinh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\Sigma_M} I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\right) \dfrac{\partial \Sigma_M}{\partial \mathcal{E}_{pM}}$	$\dfrac{\partial y}{\partial \varepsilon_{pM}} = \left(\dfrac{6II_{\boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\tau}^\sharp)}}{\sigma_M^3} - q_1 q_2 \dfrac{f^*}{\sigma_M^2} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp} \sinh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\sigma_M} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\right) \dfrac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_{pM}}$
$\dfrac{\partial Y}{\partial \mathcal{F}} = 2\left(q_1 \cosh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\Sigma_M} I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right) - q_3\mathcal{F}^*\right) \dfrac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial \mathcal{F}}$	$\dfrac{\partial y}{\partial f} = 2\left(q_1 \cosh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\sigma_M} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right) - q_3 f^*\right) \dfrac{\partial f^*}{\partial f}$
$\begin{aligned}\dfrac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp} = \Bigg[&\dfrac{6\boldsymbol{C}^\flat \cdot \boldsymbol{DEV}(\boldsymbol{T}^\sharp) \cdot \boldsymbol{C}^\flat}{\Sigma_M} + q_1 q_2 \mathcal{F}^* \left(\sinh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\Sigma_M} I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\right. \\ &\left.-\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\Sigma_M} I_{\boldsymbol{T}^\sharp} \cosh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\Sigma_M} I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\right) \boldsymbol{C}^\flat\Bigg] \dfrac{1}{\Sigma_M^2(1-\mathcal{F})}\end{aligned}$	$\begin{aligned}\dfrac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} = \Bigg[&\dfrac{6\boldsymbol{g}^\flat \cdot \boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\tau}^\sharp) \cdot \boldsymbol{g}^\flat}{\sigma_M} + q_1 q_2 f^* \left(\sinh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\sigma_M} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\right. \\ &\left.-\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\sigma_M} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp} \cosh\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{q_2}{\sigma_M} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\right) \boldsymbol{g}^\flat\Bigg] \dfrac{1}{\sigma_M^2(1-f)}\end{aligned}$

Lagrange	Euler
$\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial \mathcal{E}_{pM}} = \left[\frac{18 II_{\boldsymbol{DEV}(\boldsymbol{T}^\sharp)}}{\Sigma_M} + q_1 q_2 \mathcal{F}^* I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\left(-2\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M} I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right) + \frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M} I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\cosh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\right)\right]\frac{\partial\Sigma_M}{\partial\mathcal{E}_{pM}}\frac{1}{\Sigma_M^3(1-\mathcal{F})}$	$\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \varepsilon_{pM}} = \left[\frac{18 II_{\boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\tau}^\sharp)}}{\sigma_M} + q_1 q_2 f^* I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\left(-2\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right) + \frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M} I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\cosh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\right)\right]\frac{\partial\sigma_M}{\partial\varepsilon_{pM}}\frac{1}{\sigma_M^3(1-f)}$
$\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial \mathcal{F}} = \left(\dot{\mathcal{E}}_{pM} + \frac{q_1 q_2 I_{\boldsymbol{T}^\sharp}}{\Sigma_M^2}\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial\mathcal{F}}\right)\frac{1}{1-\mathcal{F}}$	$\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial f} = \left(\dot{\varepsilon}_{pM} + \frac{q_1 q_2 I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}}{\sigma_M^2}\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\frac{\partial f^*}{\partial f}\right)\frac{1}{1-f}$
$\frac{\partial \dot{\mathcal{F}}}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp} = \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp}\mathcal{A} + \frac{3}{2}\frac{q_1 q_2^2}{\Sigma_M^2}(1-\mathcal{F})\mathcal{F}^*\cosh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\boldsymbol{C}^\flat$	$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} = \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp}\mathcal{A} + \frac{3}{2}\frac{q_1 q_2^2}{\sigma_M^2}(1-f)f^*\cosh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\boldsymbol{g}^\flat$
$\frac{\partial \dot{\mathcal{F}}}{\partial \mathcal{E}_{pM}} = \mathcal{A}\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial \mathcal{E}_{pM}} + \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\mathcal{E}_{pM}}\dot{\mathcal{E}}_{pM} + 3\frac{q_1 q_2}{\Sigma_M^2}(1-\mathcal{F})\mathcal{F}^*\frac{\partial\Sigma_M}{\partial\mathcal{E}_{pM}}\times\left(-\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right) + \frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\cosh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\right)$	$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \varepsilon_{pM}} = \mathcal{A}\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial \varepsilon_{pM}} + \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\varepsilon_{pM}}\dot{\varepsilon}_{pM} + 3\frac{q_1 q_2}{\sigma_M^2}(1-f)f^*\frac{\partial\sigma_M}{\partial\varepsilon_{pM}}\times\left(-\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right) + \frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\cosh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\right)$
$\frac{\partial \dot{\mathcal{F}}}{\partial \mathcal{F}} = \mathcal{A}\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{pM}}{\partial \mathcal{F}} + 3\frac{q_1 q_2}{\Sigma_M}\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\left(-\mathcal{F}^* + (1-\mathcal{F})\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial\mathcal{F}}\right)$	$\frac{\partial \dot{f}}{\partial f} = \mathcal{A}\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{pM}}{\partial f} + 3\frac{q_1 q_2}{\sigma_M}\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\left(-f^* + (1-f)\frac{\partial f^*}{\partial f}\right)$
$\frac{\partial^2 Y}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp \partial \boldsymbol{T}^\sharp} = \frac{\boldsymbol{3C}^\flat \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{C}^\flat - \boldsymbol{C}^\flat \otimes \boldsymbol{C}^\flat}{\Sigma_M^2} + \frac{1}{2}\frac{q_1 q_2^2}{\Sigma_M^2}\mathcal{F}^*\cosh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\boldsymbol{C}^\flat \otimes \boldsymbol{C}^\flat$	$\frac{\partial^2 y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp \partial \boldsymbol{\tau}^\sharp} = \frac{\boldsymbol{3g}^\flat \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{g}^\flat - \boldsymbol{g}^\flat \otimes \boldsymbol{g}^\flat}{\sigma_M^2} + \frac{1}{2}\frac{q_1 q_2^2}{\sigma_M^2}f^*\cosh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\boldsymbol{g}^\flat \otimes \boldsymbol{g}^\flat$
$\frac{\partial^2 Y}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp \partial \mathcal{E}_{pM}} = \frac{\partial\Sigma_M}{\partial\mathcal{E}_{pM}}\left[\frac{-6\boldsymbol{C}^\flat \cdot \boldsymbol{DEV}(\boldsymbol{T}^\sharp) \cdot \boldsymbol{C}^\flat}{\Sigma_M^3} - \left(\frac{q_1 q_2}{\Sigma_M^2}\mathcal{F}^*\times\left(\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right) + \frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\cosh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\right)\right)\boldsymbol{C}^\flat\right]$	$\frac{\partial^2 y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp \partial \varepsilon_{pM}} = \frac{\partial\sigma_M}{\partial\varepsilon_{pM}}\left[\frac{-6\boldsymbol{g}^\flat \cdot \boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\tau}^\sharp) \cdot \boldsymbol{g}^\flat}{\sigma_M^3} - \left(\frac{q_1 q_2}{\sigma_M^2}f^*\times\left(\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right) + \frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\cosh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\right)\right)\boldsymbol{g}^\flat\right]$
$\frac{\partial^2 Y}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp \partial \mathcal{F}} = \frac{q_1 q_2}{\Sigma_M}\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial\mathcal{F}}\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\Sigma_M}I_{\boldsymbol{T}^\sharp}\right)\boldsymbol{C}^\flat$	$\frac{\partial^2 y}{\partial \boldsymbol{\tau}^\sharp \partial f} = \frac{q_1 q_2}{\sigma_M}\frac{\partial f^*}{\partial f}\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{\sigma_M}I_{\boldsymbol{\tau}^\sharp}\right)\boldsymbol{g}^\flat$

Auf die Darstellung in Komponentenschreibweise soll hier verzichtet werden, da diese Darstellung aus den vorherigen Ausführungen an dieser Stelle eindeutig sein sollte.

4 Ein Vergleich mit auf alternativen Annahmen basierenden Modellen

In kommerziellen FEM–Programmen wird im allgemeinen ein etwas modifizierter Zugang gewählt. So verwendet z.B. **ABAQUS** ein inkrementell–objektives Integrationsschema. Im Gegensatz zu den vorliegenden Betrachtungen wird auf der Momentankonfiguration nicht für alle relevanten Größen die Lie–Ableitung zum Ansatz gebracht, sondern für die internen Variablen die materielle Zeitableitung und für die Spannungen eine objektive Zeitableitung (in **ABAQUS** verwendet man die Jaumann–Ableitung). Die Evolutionsgleichungen haben formal die Gestalt (2.4) mit dem Unterschied, daß auf Grund der verwendeten Zeitableitungen auf der Momentankonfiguration ein anderes Materialverhalten realisiert wird als auf der Ausgangskonfiguration.
Um die Unterschiede zu illustrieren, wurden mit **ABAQUS** einige einfache Randwertprobleme $(T.1\ldots 3(ABAQUS))$ unter Voraussetzung eines Materialverhaltens gemäß dem *Gurson–Modell* (3.5) gelöst. Behandelt wurde ein dreiseitig gelagerter Einheitswürfel, dem



ausgehend von drei Mehrachsigkeiten $(T = 1\ldots 3)$ eine Verformung aufgezwungen wurde. Mit der dort ermittelten Deformationsgeschichte wurden dann für identische Materialparameter und Evolutionsfunktionen mit den *Evolutionsgleichungen* (2.3) die Spannungen und die internen Variablen berechnet. In der vorstehenden Darstellung ist die aus beiden

Rechnungen ermittelte normierte *Vergleichspannung* über der *Vergleichsdehnung* aufgetragen. Die Unterschiede sind, wie auf Grund der unterschiedlichen verwendeten objektiven Zeitableitungen nicht anders zu erwarten, merklich.

4.1 Vergleichsrechnungen

Mit den folgenden Beispielen werden die Ergebnisse auf der Grundlage des Schädigungsmodells von Gurson–Tvergaard–Needleman (GTN–Modell) von **ABAQUS** und **SPC-PMHP** verglichen. Um unterschiedliche Spannungszustände zu realisieren, soll zum einen eine gelochte Scheibe im Zugversuch untersucht werden, wobei entlang der gesamten Oberkante eine gleiche Verschiebung in y–Richtung aufgeprägt wird. Unter Ausnutzung der Symmetrie wird ein Viertel der Probe im ebenen Verzerrungszustand modelliert. Zum anderen betrachtet man eine CT–Probe im Zugversuch, die ebenfalls im ebenen Verzerrungszustand und nur zur Hälfte modelliert wird. Die Belastung erfolgt ebenfalls verschiebungsgesteuert.

Für die Simulation wurden 8-Knotenelemente mit 9 Integrationspunkten verwendet. Die Materialparameter für das GTN–Modell sind in der folgenden Tabelle aufgezeigt.

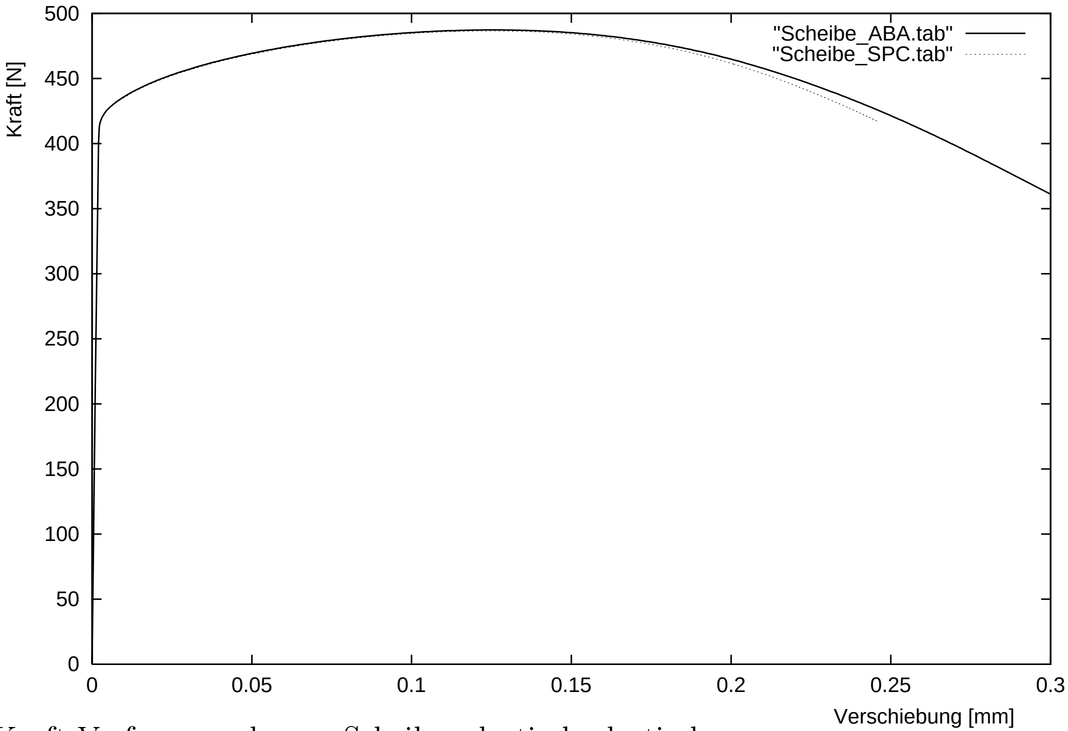
E	ν	q_1	q_2	q_3	f_0	f_c	f_F	f_N	s_N	ε_N	σ_0	ε_0	n
210000	0.3	1.5	1.0	2.25	0.001	0.05	0.3	0.01	0.1	0.3	451.4	0.3386	0.4896

Materialparameter, GTN–Modell

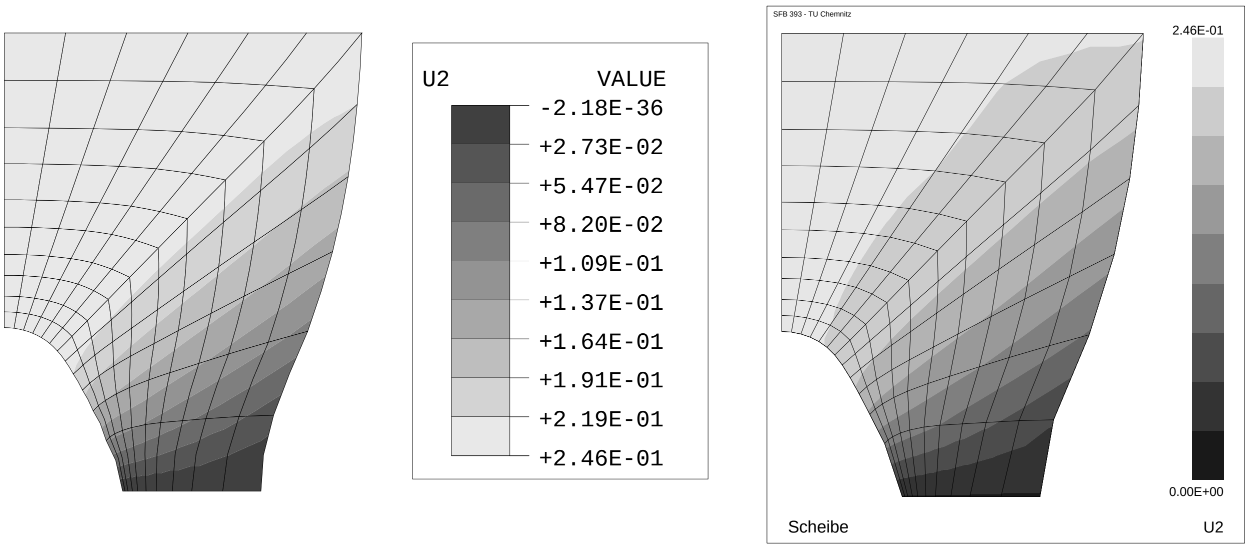
Für das plastische Verhalten des Matrixmaterials ist jeweils die gleiche Spannungs–Dehnungsbeziehung verwendet worden. Die elastisch–plastischen Berechnungen erfolgten mit dem gleichen Materialmodell unter Annahme einer Anfangsporosität $f_0 = 0$ und dem Ausschluß von Porenneubildung $f_N = 0$.

In den folgenden Darstellungen sind die Kraft–Verformungskurven, wie sie im Zugversuch gewonnen werden, sowie Konturplots der Verschiebungen ($u2$) in Belastungsrichtung aufgezeigt. Die Verfestigung kennzeichnet die plastische Vergleichsdehnung des Matrixmaterials (evm) und die Entfestigung die Porenkonzentration (f). In den Konturplots sind die Maxima und Minima von **SPC-PMHP** an denen von **ABAQUS** skaliert. Die berechneten Extrema von **SPC-PMHP** sind gesondert aufgeführt.

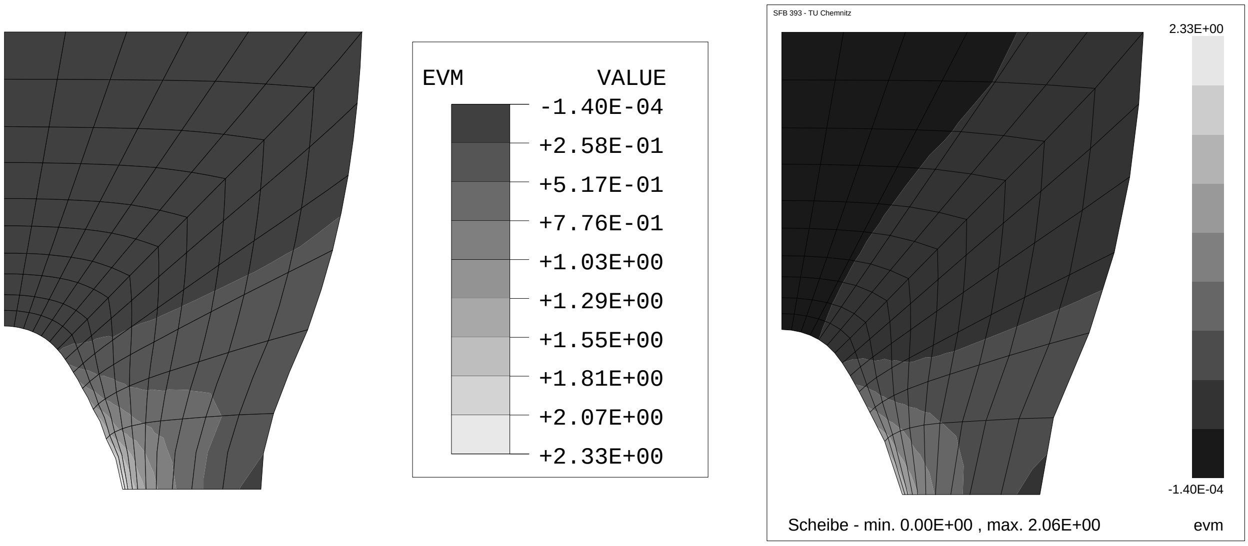
Scheibe – Elastisch-Plastisch:



Kraft-Verformungskurve, Scheibe, elastisch-plastisch

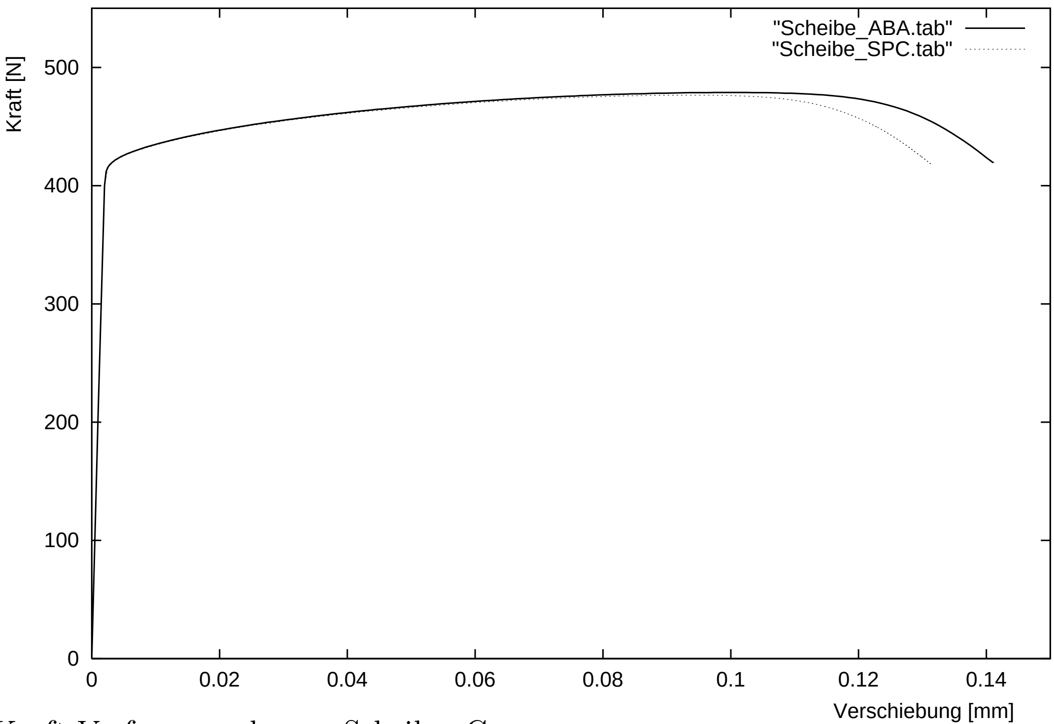


Verschiebungen $u2$, Scheibe, elastisch-plastisch

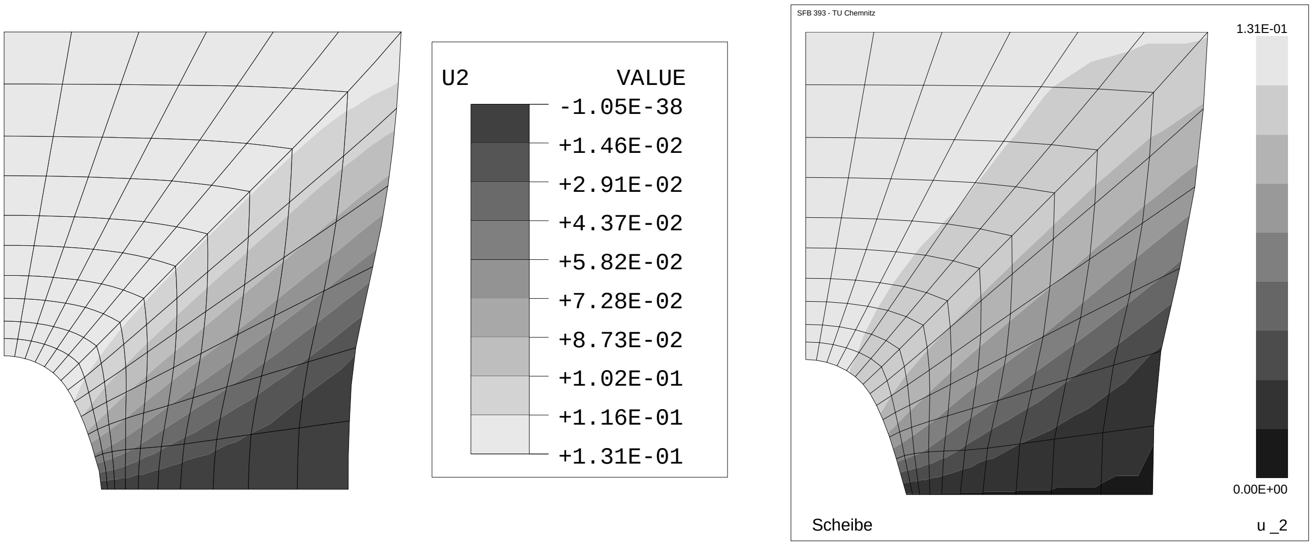


Plastische Vergleichsdehnung *evm*, Scheibe, elastisch-plastisch

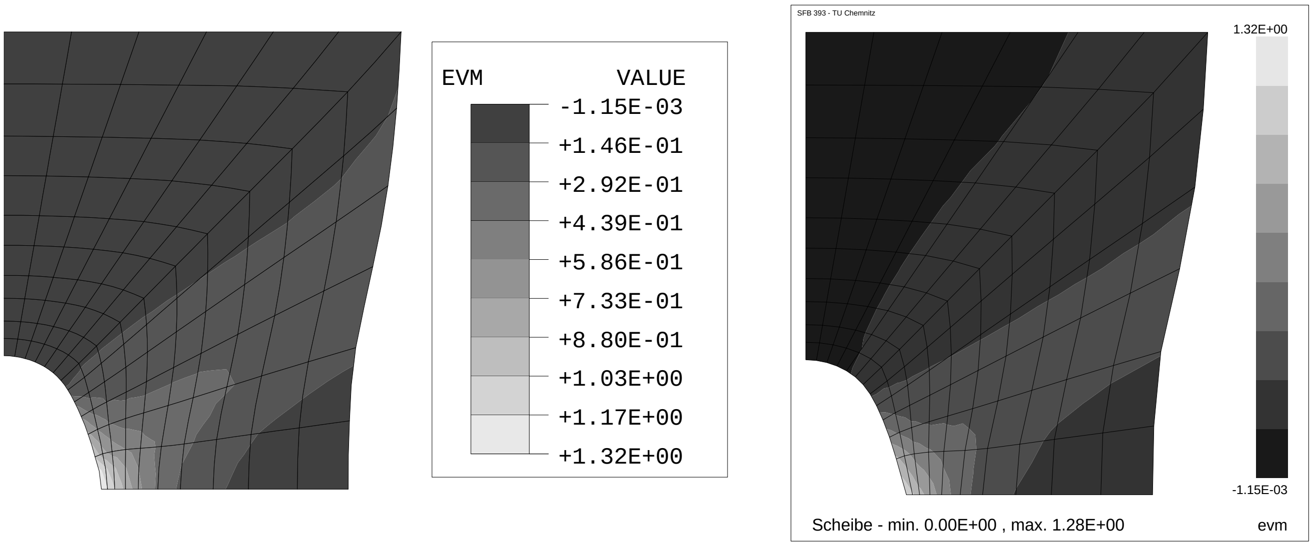
Scheibe – Gurson:



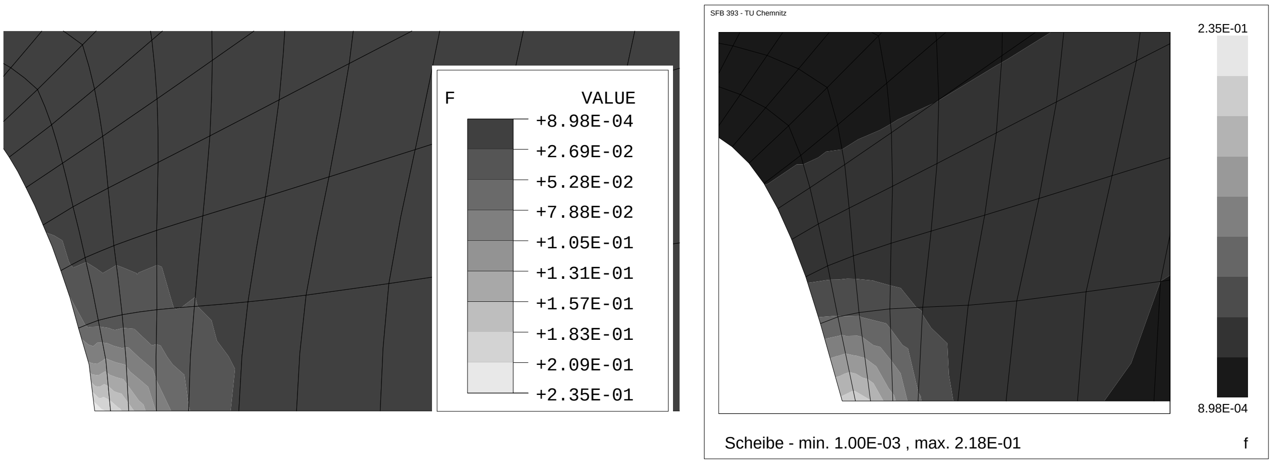
Kraft-Verformungskurve, Scheibe, Gurson



Verschiebungen $u2$, Scheibe, Gurson

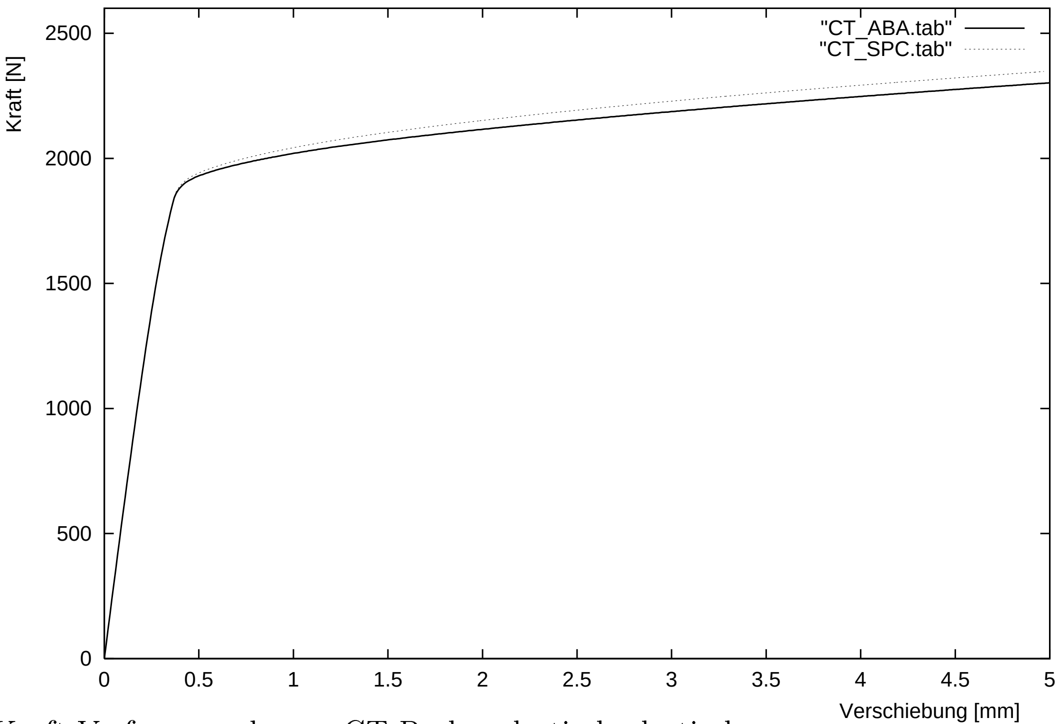


Plastische Vergleichsdehnung evm, Scheibe, Gurson

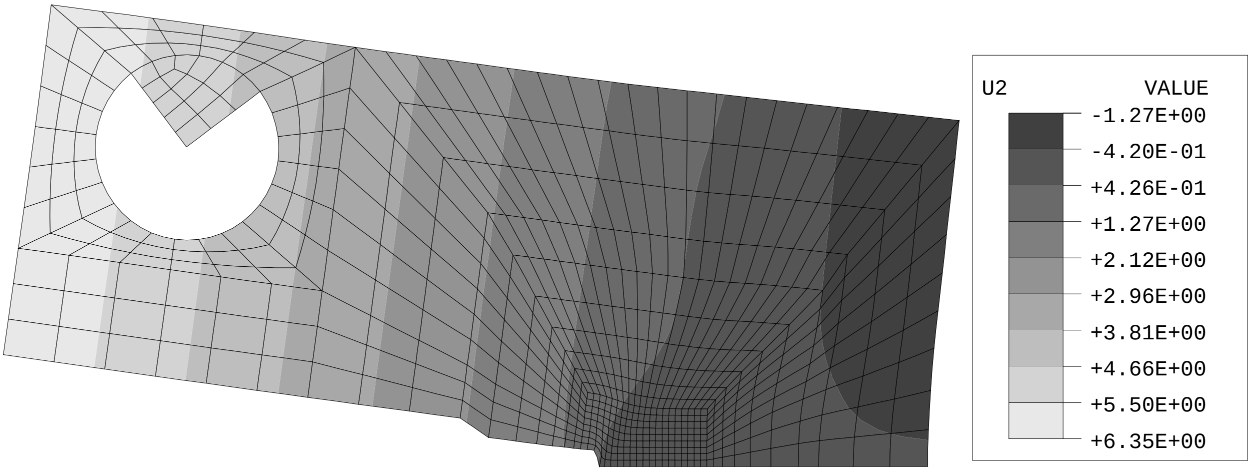


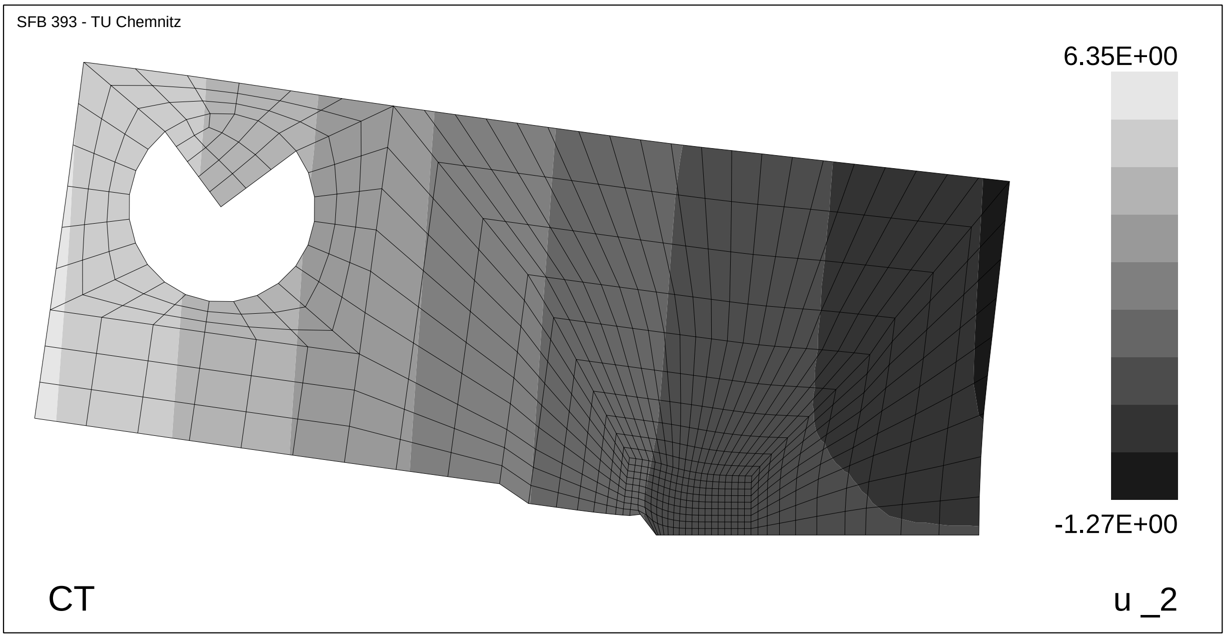
Porenkonzentration f, Scheibe, Gurson

CT – Elastisch-Plastisch:

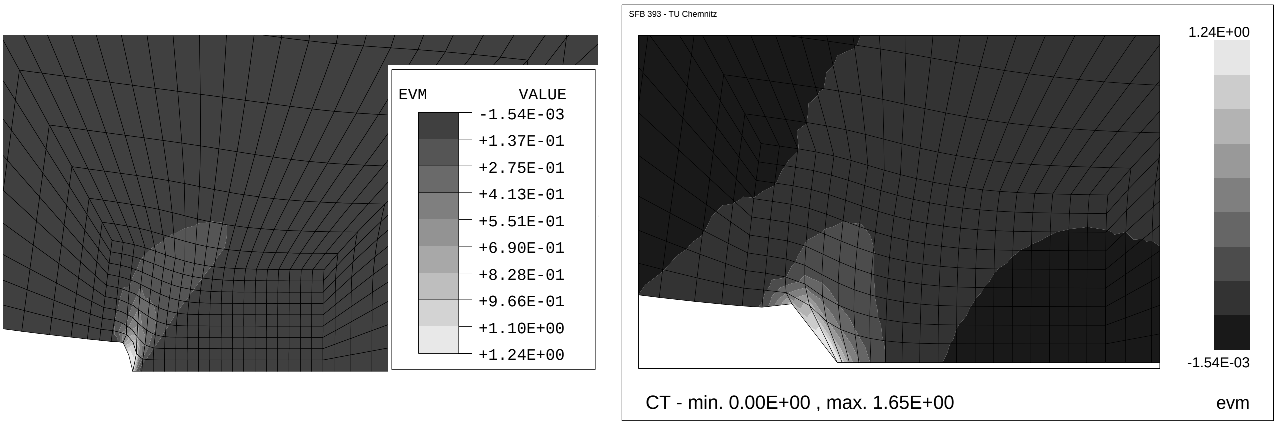


Kraft-Verformungskurve, CT-Probe, elastisch-plastisch



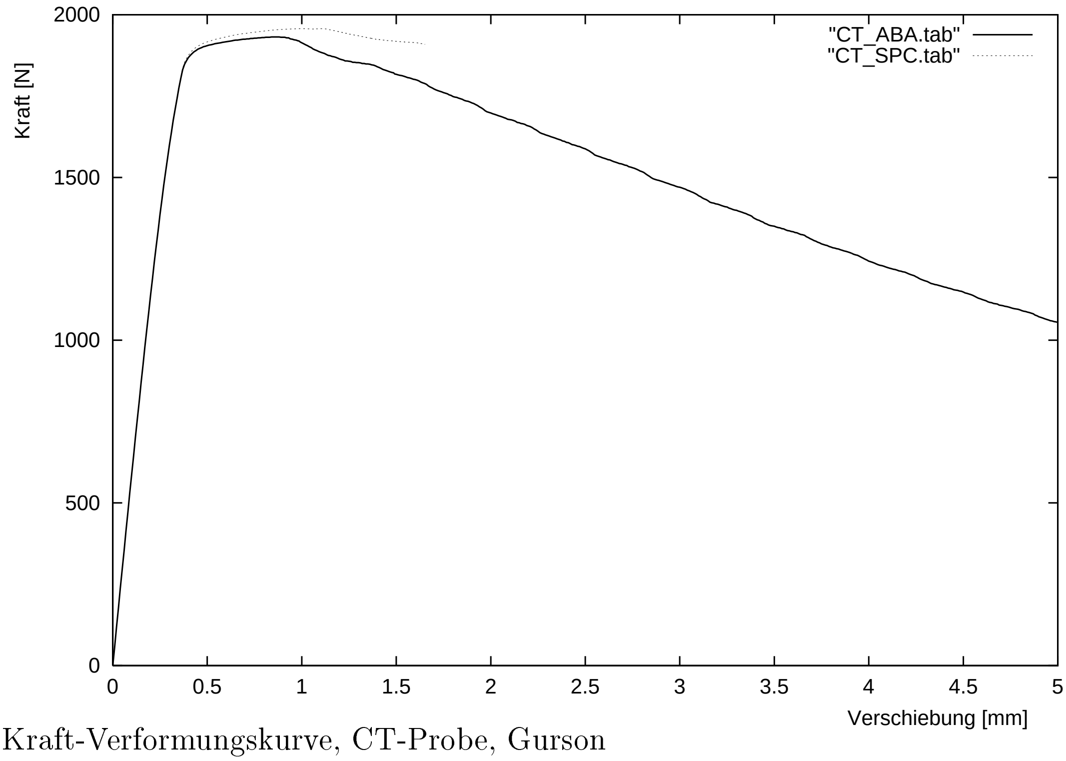


Verschiebungen $u2$, CT-Probe, elastisch-plastisch

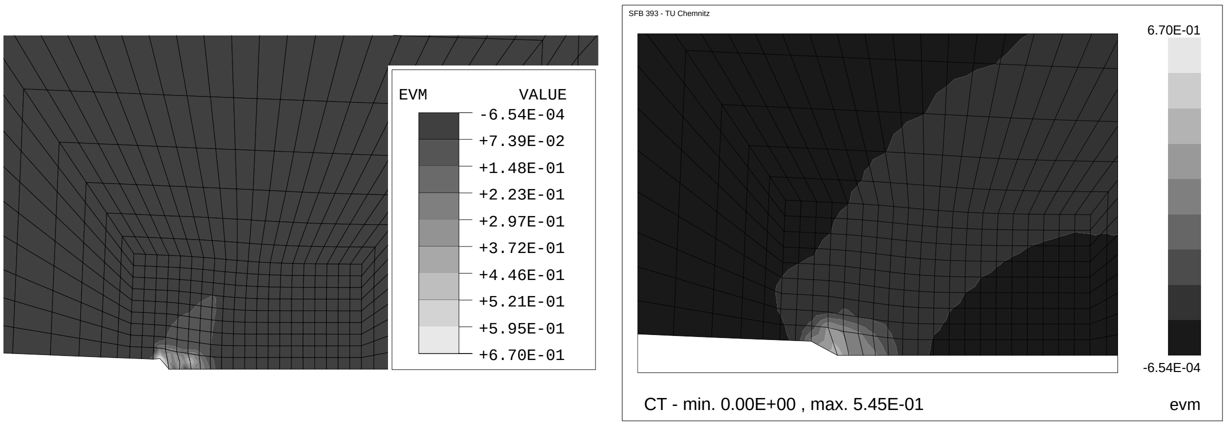


Plastische Vergleichsdehnung *evm*, CT-Probe, elastisch-plastisch

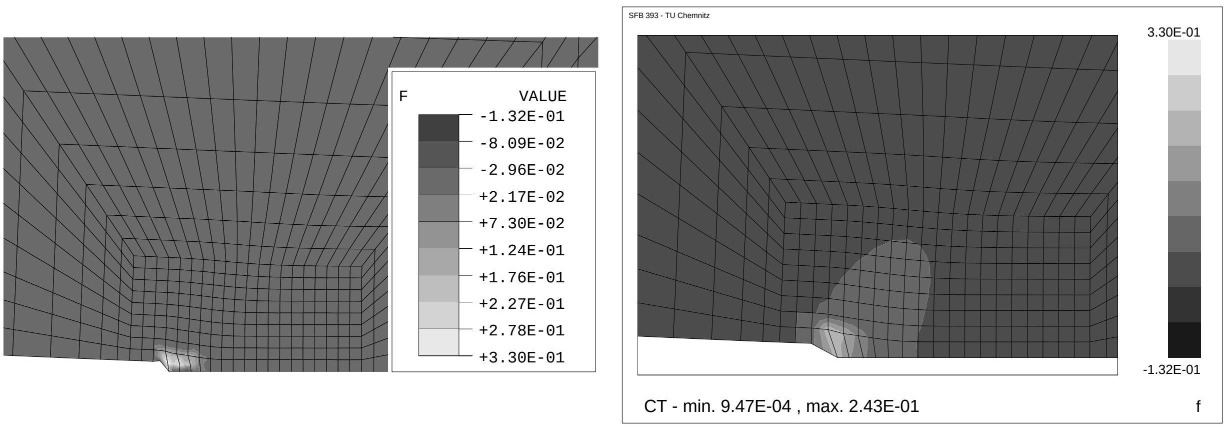
CT – Gurson:



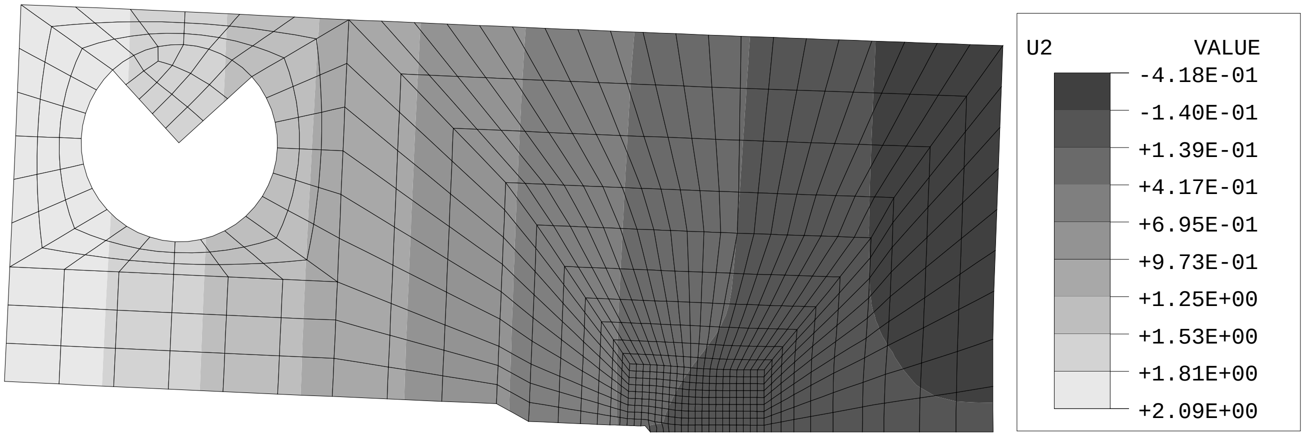
Kraft-Verformungskurve, CT-Probe, Gurson

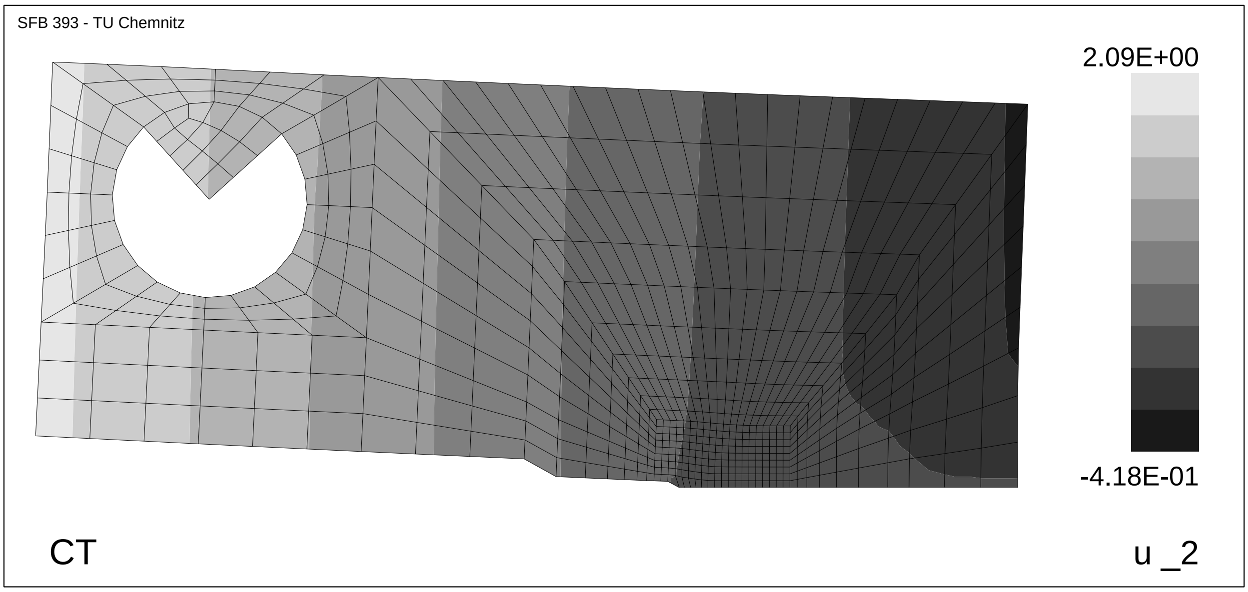


Plastische Vergleichsdehnung *evm*, CT-Probe, Gurson



Porenkonzentration f, CT-Probe, Gurson





Verschiebungen $u2$, CT-Probe, Gurson

4.2 Auswertung

Für die elastisch–plastischen Berechnungen sind die Unterschiede zwischen **ABAQUS** und **SPC-PMHP** in den Kraft–Verformungskurven klein. Geringe Differenzen treten bei der Scheibe erst mit anwachsenden Verformungen und einem Abfall der Kraft auf. Die Abweichungen sind nicht besonders signifikant, da durch die Behandlung des Randwertproblems und die nicht allzu hohen Spannungsgradienten im gesamten Modell die Kraft-Verformungskurve nur die globale Deformierbarkeit des Körpers wiedergibt. Die Unterschiede in den konstitutiven Beziehungen wirken sich nur lokal im Bereich hoher Spannungs- bzw. Deformationsgradienten aus, so daß in der globalen Kraft–Verformungskurve lokale Effekte, welche relativ große Unterschiede im Spannungszustand aufweisen, kaum erkennbar sind. Aufgrund der höheren Spannungsgradienten vor der Rißspitze macht sich der Übertragungsmechanismus vom lokalen zum globalen Verhalten bei der CT-Probe stärker bemerkbar.
Bei der Simulation mit dem GTN-Modell zeigen sich aufgrund des sensibleren Materialverhaltens gegenüber dem Integrationsalgorithmus deutlichere Unterschiede zwischen den benutzten Programmen. Während bei der Scheibe erst eine Porenkonzentration von rund 6% ($u2 = 0.1mm$) zu einer sichtlichen Differenz führt, sind bei der CT–Probe größere Unterschiede mit Einsetzen von Plastifizierung erkennbar. Die Geometrie der CT–Probe erzeugt ein stark inhomogenes Spannungsfeld, so daß schon bei kleinen globalen Verschiebungen sich der Spannungszustand vor der Rißspitze erheblich ändert.
Die lokalen Unterschiede zwischen **ABAQUS** und **SPC-PMHP** werden durch die Konturplots besser erfasst. Im allgemeinen sind die Verschiebungsverläufe ($u2$) ähnlich. Lediglich die Verformungen der Elemente vor der Rißspitze der CT–Probe weisen größere Unterschiede auf. Die Verläufe der plastischen Vergleichsdehnung im Matrixmaterial (evm) und der Porenkonkonzentration (f) sind bei der Scheibe ähnlich. An der CT-Probe erkennt man diesbezüglich vor der Rißspitze sehr hohe Abweichungen.

5 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit ist die Einbindung des Schädigungsmodells von Gurson–Tvergaard–Needleman in das Finite–Element–System **SPC-PMHP** vorgestellt worden. Zur Lösung der *Differential–Algebraischen* Gleichungen (*DAE*) für das Schädigungsgesetz wird ein implizites Mehrschrittdifferenzenverfahren verwendet. Die Evolutionsgleichungen wurden für dieses Verfahren nach der Lagrange'- bzw. Euler'schen Betrachtungsweise abgeleitet. Die Berechnung der konsistenten Tangente sowie das hyperelastische Teilstoffgesetz sind ebenfalls angegeben worden. Anschließend wurden die relevanten Ableitungen der Fließbedingung bzw. der Evolutionsgleichungen nach den Spannungen und internen Variablen zur die Linearisierung des Stoffgesetzes zusammengestellt.
Ein Vergleich von **SPC-PMHP** mit dem kommerziellen Programm **ABAQUS** wurde für einen Einheitswürfel, eine gelochte Scheibe und für eine CT-Probe durchgeführt. Während die Betrachtung der Gaußpunkte am Einheitswürfel große Unterschiede zwi-

schen den FEM–Programmen zeigt, sind die Abweichungen der Kraft–Verformungskurven gering. Die Diskrepanzen in der Formulierung des Materialverhaltens werden durch die unterschiedlich gewählten objektiven Zeitableitungen hervorgerufen.
Bei der numerischen Simulation wurde die maximale Lastschrittweite in den zu vergleichenden Fällen jeweils identisch gewählt (in etwa $1/200$ der Gesamtverschiebung). **SPC-PMHP** benötigt im Mittel mehr Gleichgewichtsiterationen pro Lastschritt als **ABAQUS**. Ein Abbruch der Berechnungen mit dem GTN–Modell erfolgte in beiden Programmen bei Unterschreitung der minimalen Schrittweite. Die Lastschrittweiten wurden von **ABAQUS** kaum oder nur kurz vor Abbruch stark verringert. **SPC-PMHP** benötigte durchschnittlich kleinere Lastschritte um ein Gleichgewichtszustand zu finden.
Die Beispiele zeigen, daß größere Abweichungen der beiden Programme nur lokal und bei der Verwendung des GTN–Modells auftreten. Zukünftige Untersuchungen sollen klären inwieweit sich der benutzte Objektivitätsbegriff und die Integrationsalgorithmen auf die Lösung des Randwertproblems bemerkbar machen.

Literatur

[1] M.H. Aliabadi, C.A. Brebbia: *Localized Damage 94.* Proc. Int. Conf. Undine, Wessex Inst. Technology, UK 1994.

[2] N. Aravas: *On the numerical integration of a class of pressure–dependent plasticity models*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 1395–1416 (1987).

[3] H. Baaser: *Dreidimensionale Simulation duktiler Schädigungsentwicklung und Rißausbreitung*, Institut für Mechanik, TH Darmstadt, Dissertation, D17, Darmstadt 1999.

[4] B.A. Bilby: *Continuous distributions of dislocations.* I.N. Sneddon, R. Hill (Eds.), Progress in Solid Mechanics, Vol.1, Amsterdam 1960, S.331–398.

[5] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, J. Xu: *Parallel multilevel preconditioners.* Mathematics of Computation, 55(191):1–22,1990.

[6] R. deWit: *Theory of disclinations: II. Continuous and discrete disclinations in anisotropic elasticity.* J.Res.Natn.Bur.Stand., 77A, 49 (1973).

[7] W.M. Garrison, N.R. Moody: *Ductile fracture.* Journal of Physics and Chemistry of Solids, 48, S.1035–1074, 1987.

[8] U.–J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig, D. Michael: *Ein Beitrag zur Lösung von Anfangs–Randwert–Problemen einschließlich der Materialmodellierung bei finiten elastisch–plastischen Verzerrungen mit Hilfe der FEM.* Preprint–Reihe des Chemnitzer SFB 393, SFB393/00-09, Chemnitz, März 2000.

[9] E. Hairer, G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential–Algebraic Problems.* Springer–Verlag, Berlin 1980.

[10] K. Kondo: *On the Geometrical and Physical Foundations of the Theory of Yielding.* Proceedings of the 2nd Japan National Congress on Applied Mechanics, Tokyo, 1952, S.41–47.

[11] K. Kondo: *Geometry of Elastic Deformation and Incombatibility.* Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry, 1955, Volume 1, Division C, S.5–17.

[12] K. Kondo: *Non–Riemannian Geometry of Imperfect Crystals from a Macroscopic Viepoint.* Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry, 1955, Volume 1, Division D, S.6–17.

[13] E. Kröner: *Plastizität und Versetzungen.* A. Sommerfeld, E. Fues, E. Kröner (Eds.), Mechanik der deformierbaren Medien, Leipzig 1970, S.310–376.

[14] K. Kußmaul (Ed.) *International Seminar on Local Approach of Fracture.* Moret–sur–Loing, Nuclear Engng. & Design, 105, S.1–156, 1987.

[15] J.E. Marsden, T.J.R. Hughes: *Mathematical Foundations of Elasticity.* Prentice–Hall International Inc., London 1983.

[16] A. Meyer, D. Michael: *A Modern Approach to the Solution of Problems of Classic Elasto–Plasticity on Parallel Computers.* Numerical Linear Algebra with Applications, Vol. 4(1), 1–16 (1997).

[17] D. Michael, M. Meisel: *Some remarks to large deformation elasto–plasticity (continuum formulation).* Preprint–Reihe des Chemnitzer SFB 393, SFB393/98-28, Chemnitz, September 1998.

[18] D. Michael: *Kontinuumstheoretische Grundlagen und algorithmische Behandlung von ausgewählten Problemen der assoziierten Fließtheorie.* Preprint–Reihe des Chemnitzer SFB 393, SFB393/01-06, Chemnitz, März 2001.

[19] U. Mühlich, W. Brocks, Th. Siegmund: *A User–Material Subroutine of the Gurson–Tvergaard–Needleman Model of Plasticity for Rate and Temperature Dependent Hardening*, Institut für Werkstofforschung, GKSS–Forschungszentrum Geesthacht, Technical Note GKSS/WMG/98/1, interner Bericht, Geesthacht 1998.

[20] A. Needleman: *Computational mechanics at the mesoscale.* Acta Materiala 48(1), S.105–124, 2000.

[21] A. Pineau, P. Joly: *Local versus global approaches to elastic–plastic fracture mechanics.* J.G. Blauel, K.H. Schwalbe (Eds.), Defect Assesment in Components–Fundamentals and Applications, ESiS Mech. Engng. Publ., S.381–414, London 1991.

[22] J.C. Simo, K.S. Pister: *Remarks on Rate Constitutive Equations for Finite Deformation Problems.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 48 (1985) 201–215.

[23] P.F. Thomason: *Ductile Fracture of Metals.* Oxford, 1990.

[24] V. Tvergaard: *Computational Micromechanics.* G. Herrmann (Ed.), Modelling of Defects and Fracture Mechanics, New York 1993.

[25] H. Yserentant: *Hierarchical basis give conjugate gradient type methods a multigrid speed of convergence.* Appl.Math. and Comp., 19:347–358, 1986.

Other titles in the SFB393 series:

00-01 G. Kunert. Anisotropic mesh construction and error estimation in the finite element method. January 2000.

00-02 V. Mehrmann, D. Watkins. Structure-preserving methods for computing eigenpairs of large sparse skew-Hamiltonian/Hamiltonian pencils. January 2000.

00-03 X. W. Guan, U. Grimm, R. A. Römer, M. Schreiber. Integrable impurities for an open fermion chain. January 2000.

00-04 R. A. Römer, M. Schreiber, T. Vojta. Disorder and two-particle interaction in low-dimensional quantum systems. January 2000.

00-05 P. Benner, R. Byers, V. Mehrmann, H. Xu. A unified deflating subspace approach for classes of polynomial and rational matrix equations. January 2000.

00-06 M. Jung, S. Nicaise, J. Tabka. Some multilevel methods on graded meshes. February 2000.

00-07 H. Harbrecht, F. Paiva, C. Perez, R. Schneider. Multiscale Preconditioning for the Coupling of FEM-BEM. February 2000.

00-08 P. Kunkel, V. Mehrmann. Analysis of over- and underdetermined nonlinear differential-algebraic systems with application to nonlinear control problems. February 2000.

00-09 U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig, D. Michael. Ein Beitrag zur Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen einschließlich der Materialmodellierung bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen mit Hilfe der FEM. März 2000.

00-10 M. J. Martins, X.-W. Guan. Integrability of the D_n^2 vertex models with open boundary. March 2000.

00-11 T. Apel, S. Nicaise, J. Schöberl. A non-conforming finite element method with anisotropic mesh grading for the Stokes problem in domains with edges. March 2000.

00-12 B. Lins, P. Meade, C. Mehl, L. Rodman. Normal Matrices and Polar Decompositions in Indefinite Inner Products. March 2000.

00-13 C. Bourgeois. Two boundary element methods for the clamped plate. March 2000.

00-14 C. Bourgeois, R. Schneider. Biorthogonal wavelets for the direct integral formulation of the heat equation. March 2000.

00-15 A. Rathsfeld, R. Schneider. On a quadrature algorithm for the piecewise linear collocation applied to boundary integral equations. March 2000.

00-16 S. Meinel. Untersuchungen zu Druckiterationsverfahren für dichteveränderliche Strömungen mit niedriger Machzahl. März 2000.

00-17 M. Konstantinov, V. Mehrmann, P. Petkov. On Fractional Exponents in Perturbed Matrix Spectra of Defective Matrices. April 2000.

00-18 J. Xue. On the blockwise perturbation of nearly uncoupled Markov chains. April 2000.

00-19 N. Arada, J.-P. Raymond, F. Tröltzsch. On an Augmented Lagrangian SQP Method for a Class of Optimal Control Problems in Banach Spaces. April 2000.

00-20 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet Galerkin Schemes for 2D-BEM. April 2000.

00-21 V. Uski, B. Mehlig, R. A. Römer, M. Schreiber. An exact-diagonalization study of rare events in disordered conductors. April 2000.

00-22 V. Uski, B. Mehlig, R. A. Römer, M. Schreiber. Numerical study of eigenvector statistics for random banded matrices. May 2000.

00-23 R. A. Römer, M. Raikh. Aharonov-Bohm oscillations in the exciton luminescence from a semiconductor nanoring. May 2000.

00-24 R. A. Römer, P. Ziesche. Hellmann-Feynman theorem and fluctuation-correlation analysis of i the Calogero-Sutherland model. May 2000.

00-25 S. Beuchler. A preconditioner for solving the inner problem of the p-version of the FEM. May 2000.

00-26 C. Villagonzalo, R.A. Römer, M. Schreiber, A. MacKinnon. Behavior of the thermopower in amorphous materials at the metal-insulator transition. June 2000.

00-27 C. Mehl, V. Mehrmann, H. Xu. Canonical forms for doubly structured matrices and pencils. June 2000. S. I. Solov'ev. Preconditioned gradient iterative methods for nonlinear eigenvalue problems. June 2000.

00-29 A. Eilmes, R. A. Römer, M. Schreiber. Exponents of the localization lengths in the bipartite Anderson model with off-diagonal disorder. June 2000.

00-30 T. Grund, A. Rösch. Optimal control of a linear elliptic equation with a supremum-norm functional. July 2000.

00-31 M. Bollhöfer. A Robust ILU Based on Monitoring the Growth of the Inverse Factors. July 2000.

00-32 N. Arada, E. Casas, F. Tröltzsch. Error estimates for a semilinear elliptic control problem. July 2000.

00-33 T. Penzl. LYAPACK Users Guide. August 2000.

00-34 B. Heinrich, K. Pietsch. Nitsche type mortaring for some elliptic problem with corner singularities. September 2000.

00-35 P. Benner, R. Byers, H. Faßbender, V. Mehrmann, D. Watkins. Cholesky-like Factorizations of Skew-Symmetric Matrices. September 2000.

00-36 C. Villagonzalo, R. A. Römer, M. Schreiber, A. MacKinnon. Critical Behavior of the Thermoelectric Transport Properties in Amorphous Systems near the Metal-Insulator Transition. September 2000.

00-37 F. Milde, R. A. Römer, M. Schreiber. Metal-insulator transition in anisotropic systems. October 2000.

00-38 T. Stykel. Generalized Lyapunov Equations for Descriptor Systems: Stability and Inertia Theorems. October 2000.

00-39 G. Kunert. Robust a posteriori error estimation for a singularly perturbed reaction-diffusion equation on anisotropic tetrahedral meshes. November 2000.

01-01 G. Kunert. Robust local problem error estimation for a singularly perturbed problem on anisotropic finite element meshes. January 2001.

01-02 G. Kunert. A note on the energy norm for a singularly perturbed model problem. January 2001.

01-03 U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig. Ein Beitrag zur Materialparameteridentifikation bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen durch Analyse inhomogener Verschiebungsfelder mit Hilfe der FEM. Februar 2001.

01-04 R. A. Römer. Percolation, Renormalization and the Quantum-Hall Transition. February 2001.

01-05 A. Eilmes, R. A. Römer, C. Schuster, M. Schreiber. Two and more interacting particles at a metal-insulator transition. February 2001.

01-06 D. Michael. Kontinuumstheoretische Grundlagen und algorithmische Behandlung von ausgewählten Problemen der assoziierten Fließtheorie. März 2001.

The complete list of current and former preprints is available via
`http://www.tu-chemnitz.de/sfb393/preprints.html`.