Technische Universität Chemnitz

Sonderforschungsbereich 393

Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern

U.-J. Görke A. Bucher R. Kreißig D. Michael

Ein Beitrag zur Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen einschließlich der Materialmodellierung bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen mit Hilfe der FEM

Preprint SFB393/00-09

Abstract

The non-linear boundary and initial value problem of finite elasto-plastic deformations is solved using a Total Lagrangean Finite Element description. Based on the local rate formulation of the balance law of linear momentum, the rate formulation of the principle of virtual work is obtained. Introducing the shape functions of Finite Elements and their derivatives with respect to the coordinates, the basic relations for an incremental Finite Element approach solving the boundary value problem are given. The stiffness matrix for physically and geometrically non-linear problems contains the consistent material matrix and the geometrical stiffness matrix.

Based on the multiplicative split of the deformation gradient into an elastic and a plastic part as well as some physically and mathematically useful assumptions, a thermodynamically consistent deformation law for finite elasto-plastic deformations is formulated. The deformation law represents a system of differential and algebraic equations which is numerically solved using a generalized one-step time integration method. Consequently, the initial value problem is solved with a local Newton procedure. The presented integration method for the deformation law allows a simple and efficient computation of the consistent material matrix.

Some examples of FE-computations using the experimental code PMHP on a parallel computer are shown.

Key words: Finite Plasticity; Constitutive Equations; Thermodynamics; Finite Element Method; Principle of Virtual Work; Implicit Integration
MSC codes: 73B05; 75E05; 73G20; 73V05

Preprint-Reihe des Chemnitzer SFB 393

SFB393/00-09 **März 2000**

Contents

Author's addresses:

Uwe-Jens Görke
Anke Bucher
Reiner Kreißig
TU Chemnitz
Institut für Mechanik
D-09107 Chemnitz
e-mail: uj.goerke@mb1.tu-chemnitz.de
e-mail: anke.bucher@mb1.tu-chemnitz.de
e-mail: r.kreissig@mb1.tu-chemnitz.de

http://www.tu-chemnitz.de/sfb393/

Detlef Michael
TU Bergakademie Freiberg
Institut für Mechanik und Maschinenelemente
D-09596 Freiberg

e-mail: detlef.michael@mathematik.tu-chemnitz.de

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beinhaltet zwei grundlegende Aspekte der Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen mit Hilfe der Finite Elemente Methode. Neben der Darstellung der Linearisierung des Randwertproblems, aus der das globale FEM-Steifigkeitssystem abgeleitet wird, erfolgt die Herleitung eines thermodynamisch konsistenten Deformationsgesetzes der Elasto-Plastizität finiter Verzerrungen, das zur Lösung des eingebetteten Anfangswertproblems numerisch integriert wird. Die vorgestellten Beziehungen und Verfahren wurden im experimentellen FEM-Programm PMHP realisiert.

2 Grundlagen

Truesdell und Noll [11] folgend, stellt der Körper $\mathcal{B}$ eine dreidimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit dar, dessen Elemente als Partikel $\boldsymbol{X}$ bezeichnet werden. Die der Mannigfaltigkeit zugehörigen lokalen Koordinatensysteme vermitteln umkehrbar eindeutige Abbildungen $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(X^1, X^2, X^3)$ bzw. $X^\alpha = X^\alpha(\boldsymbol{X})$ mit $\alpha = 1, 2, 3$ zwischen den Partikeln $\boldsymbol{X}$ und den Tripeln (X^1, X^2, X^3) der rellen Zahlen, die materielle Koordinaten heißen.

Unter einer beliebigen Konfiguration $\boldsymbol{\Phi}$ des Körpers $\mathcal{B}$ wird ein C^k-Diffeomorphismus $(k \geq 1)$ von $\mathcal{B}$ auf ein Gebiet des dreidimensionalen Euklidischen Raumes verstanden.

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, t), \qquad \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t). \tag{1}$$

Der Punkt $\boldsymbol{x}$ kennzeichnet dann den vom Partikel $\boldsymbol{X}$ eingenommenen Platz. Sind allgemeine Koordinaten im Raum gegeben, wobei x^β mit $\beta = 1, 2, 3$ die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ darstellen, gelten die zu (1) äquivalenten Gleichungen.

$$x^\beta = \Phi^\beta(X^\alpha, t), \qquad X^\alpha = \left(\Phi^{-1}\right)^\alpha (x^\beta, t) \tag{2}$$

Hier entsprechen die x^β den räumlichen Koordinaten des Partikels $\boldsymbol{X}$ in der Konfiguration $\boldsymbol{\Phi}$.

Eine Konfiguration $\boldsymbol{\Phi}_t$ zu einem fixierten Zeitpunkt t sei Momentankonfiguration mit $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{X})$ genannt. Für die Ausgangskonfiguration $\boldsymbol{\Phi}_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $\boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{\Phi}_0(\boldsymbol{X})$.

Betrachtet man ein von differentiellen Linienelementen in Richtung der Basisvektoren der Koordinatensysteme aufgespanntes Volumenelement, ergeben sich in der Ausgangskonfiguration

$$dV_o = \sqrt{\det \boldsymbol{G}^\flat}\, dX^1\, dX^2\, dX^3 \tag{3}$$

und in der Momentankonfiguration

$$dV = \sqrt{\det \boldsymbol{g}^\flat}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \tag{4}$$

mit den kovarianten Metriktensoren $\boldsymbol{G}^\flat$ bzw. $\boldsymbol{g}^\flat$. Wird der Übergang von der Ausgangs- zur Momentankonfiguration mit der Abbildung (2) betrachtet, gilt für die Transformation von Volumendifferentialen die nachstehende Gleichung:

$$dx^1\,dx^2\,dx^3 \;=\; \det\left(\frac{\partial\,\Phi_t^i}{\partial\,X^I}\right)\,dX^1\,dX^2\,dX^3 \;=\; \det\boldsymbol{F}\;dX^1\,dX^2\,dX^3 \tag{5}$$

mit dem Deformationsgradienten $\boldsymbol{F}$. Aus (3)-(5) folgt eine Beziehung für das Verhältnis von differentiellen Volumenelementen in der Momentan- und Ausgangskonfiguration.

$$\frac{dV}{dV_o} \;=\; \frac{\rho_o}{\rho} \;=\; \frac{\sqrt{\det\boldsymbol{g}^\flat}}{\sqrt{\det\boldsymbol{G}^\flat}}\,\det\boldsymbol{F} \;=\; J\,. \tag{6}$$

In den weiteren Betrachtungen wird die kovariante Ableitung $a^k|_i$ eines kontravarianten Vektors $\boldsymbol{a}^\sharp \;=\; a^k\,\boldsymbol{g}_k$ (Ableitung nach den Koordinaten der Momentankonfiguration)

$$\frac{\partial\,\left(a^k\,\boldsymbol{g}_k\right)}{\partial\,x^i} \;=\; a^k|_i\,\boldsymbol{g}_k \;=\; \left[\frac{\partial\,a^k}{\partial\,x^i} \;+\; a^l\,\Gamma^k_{li}\right]\boldsymbol{g}_k \tag{7}$$

mit den Christoffel-Symbolen zweiter Art

$$\Gamma^k_{li} \;=\; \boldsymbol{g}^k\frac{\partial\,\boldsymbol{g}_l}{\partial\,x^i} \;=\; \frac{1}{2}\,g^{kj}\left[\frac{\partial\,g_{jl}}{\partial\,x^i} \;+\; \frac{\partial\,g_{ji}}{\partial\,x^l} \;-\; \frac{\partial\,g_{li}}{\partial\,x^j}\right]. \tag{8}$$

benötigt. Die Definition kontravarianter Basisvektoren

$$\boldsymbol{g}^l\,\boldsymbol{g}_k \;=\; \delta^l_k \tag{9}$$

führt auf den Zusammenhang zwischen den Christoffel-Symbolen zweiter Art und den Ableitungen der kontravarianten Basisvektoren nach den Koordinaten

$$\Gamma^l_{ki} \;=\; -\boldsymbol{g}_k\frac{\partial\,\boldsymbol{g}^l}{\partial\,x^i}\,. \tag{10}$$

3 Impulserhaltungssatz

Werden mit $\boldsymbol{v}^\sharp$ die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes, $\boldsymbol{k}^\sharp$ die im materiellen Punkt angreifende Volumenkraft, $\boldsymbol{t}^\sharp$ die Oberflächenkraft, $\boldsymbol{n}^\sharp$ die Einheitsnormale in Punkten auf der Körperoberfläche und mit $\boldsymbol{\sigma}^\sharp$ der Cauchysche Spannungstensor bezeichnet, dann ist der Satz von der Erhaltung des Impulses in der Momentankonfiguration (räumliche Formulierung) in seiner globalen Form durch folgende Beziehung definiert [1]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\int\limits_V \varrho\,\boldsymbol{v}^\sharp\,dV \;&=\; \int\limits_V \varrho\,\boldsymbol{k}^\sharp\,dV \;+\; \int\limits_{\delta V} \boldsymbol{t}^\sharp_{(n)}\,d(\delta V) \;= \\ &=\; \int\limits_V \varrho\,\boldsymbol{k}^\sharp\,dV \;+\; \int\limits_{\delta V} \langle\boldsymbol{\sigma}^\sharp,\boldsymbol{n}^\sharp\rangle\,d(\delta V)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

[1] Es gilt $\langle\boldsymbol{\sigma}^\sharp,\boldsymbol{n}^\sharp\rangle = \sigma^{ij}g_{jk}n^k$.

Nach Anwendung des Satzes von Gauß und Ostrogradski auf das Integral der Oberflächenkräfte

$$\int_{\delta V} \langle \boldsymbol{\sigma}^\sharp, \boldsymbol{n}^\flat \rangle \, d(\delta V) \;=\; \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\sharp \, dV \tag{12}$$

wird (11) in der nachstehenden Art und Weise modifiziert:

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, \boldsymbol{v}^\sharp \, dV \;=\; \int_V \varrho \, \boldsymbol{k}^\sharp \, dV \;+\; \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\sharp \, dV \,. \tag{13}$$

Unter Berücksichtigung des Satzes von der Erhaltung der Masse in seiner lokalen Formulierung

$$\dot{\varrho} \;+\; \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v}^\sharp \;=\; 0 \tag{14}$$

folgt aus Gleichung (13) nach einigen Umformungen:

$$\int_V \left(\varrho \, \dot{\boldsymbol{v}}^\sharp \;-\; \varrho \, \boldsymbol{k}^\sharp \;-\; \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\sharp \right) dV \;=\; \mathbf{0} \,. \tag{15}$$

Da diese Beziehung für jedes beliebige Volumen gilt, ergibt sich unmittelbar der Impulserhaltungssatz in seiner räumlichen lokalen Formulierung zu

$$\varrho \, \dot{\boldsymbol{v}}^\sharp \;-\; \varrho \, \boldsymbol{k}^\sharp \;-\; \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\sharp \;=\; \mathbf{0} \tag{16}$$

bzw.

$$\varrho \, \boldsymbol{a}^\sharp \;-\; \varrho \, \boldsymbol{k}^\sharp \;-\; \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\sharp \;=\; \mathbf{0} \tag{17}$$

mit dem Vektor der Beschleunigung $\boldsymbol{a}^\sharp$. In Koordinatenschreibweise folgt daraus das Differentialgleichungssystem

$$\sigma^{ij}|_i \;+\; \varrho \, \left(k^j \;-\; a^j \right) \;=\; 0 \,. \tag{18}$$

Mit den Definitionen des 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors in seiner Koordinatendarstellung

$$P^{Ij} \;=\; J \, \left(F^{-1} \right)^I_i \, \sigma^{ij} \tag{19}$$

und des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$T^{IJ} \;=\; P^{Ij} \, \left(F^{-1} \right)^J_j \quad \Rightarrow \quad P^{Ij} \;=\; T^{IJ} \, F^j_J \tag{20}$$

unter Berücksichtigung von Herleitungen in [9] werden die Zusammenhänge

$$P^{Ij}|_I \;=\; \left[J \, \left(F^{-1} \right)^I_i \, \sigma^{ij} \right] |_I \;=\; J \, \left(F^{-1} \right)^I_i \, \sigma^{ij}|_I \;=\; J \, \left(F^{-1} \right)^I_i \, \sigma^{ij}|_k \, F^k_I \;=\; J \, \sigma^{ij}|_i \tag{21}$$

erhalten. Damit kann die Beziehung (18) unter Verwendung von Zweipunkt- bzw. räumlichen Tensoren dargestellt werden:

$$P^{Ij}|_I \;+\; \varrho_o \, \left(k^j \;-\; a^j \right) \;=\; 0 \tag{22}$$

bzw.

$$\left(T^{IJ}\,F^j_J\right)|_I \;+\; \varrho_o\,\left(k^j \;-\; a^j\right) \;=\; 0\,. \tag{23}$$

In der symbolischen Schreibweise ergeben sich die nachstehenden Gleichungen:

$$\mathrm{DIV}\boldsymbol{P}^\sharp \;+\; \varrho_o\,\left(\boldsymbol{k}^\sharp \;-\; \boldsymbol{a}^\sharp\right) \;=\; \boldsymbol{0} \tag{24}$$

bzw.

$$\mathrm{DIV}\left(\boldsymbol{T}^\sharp\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right) \;+\; \varrho_o\,\left(\boldsymbol{k}^\sharp \;-\; \boldsymbol{a}^\sharp\right) \;=\; \boldsymbol{0}\,. \tag{25}$$

Dabei ist zu bemerken, daß alle Vektoren in den Gleichungen (22) und (23) weiterhin auf Basisvektoren der Momentankonfiguration bezogen sind. Die Vektoren der Oberflächen- und Volumenkräfte als auch der Geschwindigkeit und Beschleunigung sind als physikalische Größen originär in der Momentankonfiguration definiert. Ihre Präsentation in Vektorräumen der Ausgangskonfiguration ist mittels eines Paralleltransports realisierbar, der durch Transformation mit dem *Shifter* ausgeführt wird. Der Shifter ist ein Zweipunkttensor – seine Koordinaten sind als Skalarprodukte von Basisvektoren der verschiedenen Koordinatensysteme definiert:

$$\mathcal{G}^i_I \;=\; \boldsymbol{g}^i\,\boldsymbol{G}_I, \quad \left(\mathcal{G}^{-1}\right)^I_i \;=\; \boldsymbol{G}^I\,\boldsymbol{g}_i\,. \tag{26}$$

Bei dieser Transformation bleiben Richtung und Betrag der Vektoren erhalten.

Für die weiteren Darstellungen wird die kovariante Ableitung des Shifters benötigt. Zunächst ergeben sich die partiellen Ableitungen seiner Koordinaten nach den Koordinaten der Ausgangskonfiguration unter Berücksichtigung von (8), (10) und (26) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial\,\mathcal{G}^i_I}{\partial\,X^L} \;&=\; \frac{\partial\,(\boldsymbol{g}^i\,\boldsymbol{G}_I)}{\partial\,X^L} \;=\; \frac{\partial\,\boldsymbol{g}^i}{\partial\,x^l}\,\frac{\partial\,x^l}{\partial\,X^L}\,\boldsymbol{G}_I \;+\; \boldsymbol{g}^i\,\frac{\partial\,\boldsymbol{G}_I}{\partial\,X^L} \;=\\ &=\; -\boldsymbol{g}^m\,\Gamma^i_{ml}\,F^l_L\,\boldsymbol{G}_I \;+\; \boldsymbol{g}^i\,\boldsymbol{G}_M\,\Gamma^M_{IL} \;=\; -\mathcal{G}^m_I\,\Gamma^i_{ml}\,F^l_L \;+\; \mathcal{G}^i_M\,\Gamma^M_{IL}\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Daraus folgt für die vollständige kovariante Ableitung des Shifters nach den Koordinaten der Ausgangskonfiguration

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\, \mathcal{G}^i_I\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^I}{\partial\, X^L} \;&=\; \frac{\partial\, \mathcal{G}^i_I}{\partial\, X^L}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^I \,+\, \mathcal{G}^i_I\, \frac{\partial\, \boldsymbol{g}_i}{\partial\, x^l}\, \frac{\partial\, x^l}{\partial\, X^L} \otimes \boldsymbol{G}^I \,+\, \mathcal{G}^i_I\, \boldsymbol{g}_i \otimes \frac{\partial\, \boldsymbol{G}^I}{\partial\, X^L} \;= \\
&=\; \frac{\partial\, \mathcal{G}^i_I}{\partial\, X^L}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^I \,+\, \mathcal{G}^i_I\, \boldsymbol{g}_m\, \Gamma^m_{il}\, F^l_L \otimes \boldsymbol{G}^I \,-\, \mathcal{G}^i_I\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^M\, \Gamma^I_{ML} \;= \\
&=\; \left[\frac{\partial\, \mathcal{G}^i_I}{\partial\, X^L} \,+\, \mathcal{G}^m_I\, \Gamma^i_{ml}\, F^l_L \,-\, \mathcal{G}^i_M\, \Gamma^M_{IL}\right] \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^I \;= \\
&=\; \left[-\mathcal{G}^m_I\, \Gamma^i_{ml}\, F^l_L \,+\, \mathcal{G}^i_M\, \Gamma^M_{IL} \,+\, \mathcal{G}^m_I\, \Gamma^i_{ml}\, F^l_L \,-\, \mathcal{G}^i_M\, \Gamma^M_{IL}\right] \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^I \;= \\
&=\; \mathcal{G}^i_I|_L\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^I \;=\; \mathbf{0}\,. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Für den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}^\sharp$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^\sharp \;&=\; u^k\, \boldsymbol{g}_k \;=\; \left(\mathcal{G}^{-1}\right)^K_k\, u^k\, \boldsymbol{G}_K \;=\; U^K\, \boldsymbol{G}_K \;= \\
&=\; x^k\, \boldsymbol{g}_k \,-\, X^K\, \boldsymbol{G}_K \;=\; \left[\left(\mathcal{G}^{-1}\right)^K_k\, x^k \,-\, X^K\right] \boldsymbol{G}_K\,. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung von (27) und (29) kann der Deformationsgradient in der nachstehenden Form dargestellt werden:

$$
F^j_J \;=\; \frac{\partial\, x^j}{\partial\, X^J} \;=\; \frac{\partial}{\partial\, X^J}\left[\mathcal{G}^j_K\left(U^K \,+\, X^K\right)\right] \;=\; \mathcal{G}^j_K\left(U^K|_J \,+\, \delta^K_J\right)\,. \qquad (30)
$$

Nach Einsetzen der Beziehung (30) in den lokalen Impulserhaltungssatz (23) entsteht unter Beachtung von (28):

$$
\begin{aligned}
&\left(T^{IJ}\, F^j_J\right)|_I \,+\, \rho_o\left(k^j \,-\, a^j\right) \;= \\
&= \left[T^{IJ}\, \mathcal{G}^j_K\, \left(U^K|_J \,+\, \delta^K_J\right)\right]|_I \,+\, \rho_o\left(k^j \,-\, a^j\right) \;= \\
&= T^{IJ}|_I\, \mathcal{G}^j_K\, \left(U^K|_J \,+\, \delta^K_J\right) \,+\, T^{IJ}\, \mathcal{G}^j_K|_I\, \left(U^K|_J \,+\, \delta^K_J\right) \,+ \\
&+ T^{IJ}\, \mathcal{G}^j_K\, \left(U^K|_J \,+\, \delta^K_J\right)|_I \,+\, \rho_o\left(k^j \,-\, a^j\right) \;= \\
&= \mathcal{G}^j_K\, T^{IJ}|_I\, \left(U^K|_J \,+\, \delta^K_J\right) \,+\, \mathcal{G}^j_K\, T^{IJ}\, U^K|_{JI} \,+\, \rho_o\left(k^j \,-\, a^j\right) \;=\; 0\,. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt nach Multiplikation mit den Koordinaten des inversen Shifters $\left(\mathcal{G}^{-1}\right)^K_j$

$$
\begin{aligned}
\left(T^{IJ} F^{j}_{J}\right)|_{I} + \rho_o \left(k^j - a^j\right) &= T^{IJ}|_{I}\left(U^K|_{J} + \delta^K_J\right) + T^{IJ}U^K|_{JI} + \\
&\quad + \rho_o \left(\mathcal{G}^{-1}\right)^{K}_{j}\left(k^j - a^j\right) = \\
&= T^{IJ}|_{I}\left(U^K|_{J} + \delta^K_J\right) + T^{IJ}U^K|_{JI} + \\
&\quad + \rho_o \left(K^K - A^K\right) = 0\,. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Die Vernachlässigung der Beschleunigungsterme führt auf

$$
T^{IJ}|_{I}\left(U^K|_{J} + \delta^K_J\right) + T^{IJ}U^K|_{JI} + \varrho_o K^K = 0\,. \qquad (33)
$$

Durch materielle Differentiation entsteht daraus die Geschwindigkeitsformulierung der Bewegungsgleichung in konsequent materieller Beschreibung

$$
\dot{T}^{IJ}|_{I}\left(U^K|_{J} + \delta^K_J\right) + T^{IJ}|_{I}\dot{U}^K|_{J} + \dot{T}^{IJ}U^K|_{JI} + T^{IJ}\dot{U}^K|_{JI} + \varrho_o \dot{K}^K = 0\,. \qquad (34)
$$

4 Prinzip der virtuellen Arbeit

Gegeben sei die Ausgangskonfiguration eines deformierbaren Körpers mit dem Volumen V_o und der Oberfläche δV_o. Dieser Körper soll sich im Gleichgewicht befinden, wobei Diskontinuitäten in den Verschiebungen und Verzerrungen nicht berücksichtigt werden. An den materiellen Punkten des Körpers greifen spezifische Volumenkräfte mit den Koordinaten K^K an, während auf dem Teil δV_{o1} der Oberfläche des Körpers Oberflächenkräfte mit den Koordinaten R^K und auf dem übrigen Teil δV_{o2} der Oberfläche mit $\delta V_{o1} \cup \delta V_{o2} = \delta V_o$ Verschiebungen als Randbedingungen vorgeschrieben sind.

Für *"gerichtete"* Flächenelemente $d\boldsymbol{a}$ mit dem Flächeninhalt da und dem Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}$ gilt in der Momentankonfiguration

$$
da_i = da\, n_i\,. \qquad (35)
$$

Dabei bezeichnen die da_i die Projektionen von $d\boldsymbol{a}$ auf die Koordinatenflächen und n_i die Projektionen von $\boldsymbol{n}$ auf die Normalen dieser Flächen. Zwischen den gerichteten Flächenelementen der Ausgangs- und der Momentankonfiguration besteht die Nansonsche Beziehung [9]

$$
da_i = J\left(F^{-1}\right)^{I}_{i} dA_I \qquad (36)
$$

mit

$$
dA_I = dA\, N_I\,. \qquad (37)
$$

Der Schnittkraftvektor ist in der Momentankonfiguration unter Berücksichtigung der Cauchyschen Formel und von (35) durch die nachstehende Definition gegeben, wobei $\boldsymbol{t}$ den Spannungsvektor darstellt:

$$d\boldsymbol{F}_S \;=\; \boldsymbol{t}\,da \;=\; t^i\,da\,\boldsymbol{g}_i \;=\; \sigma^{ij}\,da\,n_j\,\boldsymbol{g}_i \;=\; \sigma^{ij}\,da_j\,\boldsymbol{g}_i\,. \tag{38}$$

In der Ausgangskonfiguration lautet der entsprechende Zusammenhang mit dem zu $\boldsymbol{t}$ parallelen Spannungsvektor $\boldsymbol{T}$

$$d\boldsymbol{F}_S \;=\; \boldsymbol{T}\,dA \;=\; T^I\,dA\,\boldsymbol{G}_I\,. \tag{39}$$

Werden die Beziehungen (38) und (39) gleichgesetzt, gilt bei Beachtung von (26), (36) und (38)

$$T^I\,dA \;=\; \left(\mathcal{G}^{-1}\right)^I_i\,\sigma^{ij}\,da_j \;=\; \left(\mathcal{G}^{-1}\right)^I_i\,J\,\left(F^{-1}\right)^J_j\,\sigma^{ij}\,N_J\,dA\,. \tag{40}$$

Damit folgen unter Berücksichtigung der Beziehungen (19), (20) und (30) für die Koordinaten des Spannungsvektors in der Ausgangskonfiguration

$$T^I \;=\; \left(\mathcal{G}^{-1}\right)^I_i\,P^{Ji}\,N_J \;=\; \left(\mathcal{G}^{-1}\right)^I_i\,T^{JK}\,F^i_K\,N_J \;=\; T^{JK}\,\left(U^I|_K \,+\, \delta^I_K\right)\,N_J \tag{41}$$

bzw. für deren materielle Ableitung

$$\dot{T}^I \;=\; \left[\dot{T}^{JK}\,U^I|_K \,+\, \dot{T}^{JI} \,+\, T^{JK}\,\dot{U}^I|_K\right]\,N_J\,. \tag{42}$$

Die Beziehungen (41) und (42) gelten ebenfalls für die Darstellung der Randkräfte R^K auf der Teiloberfläche δV_{o1} des Körpers

$$T^K \;=\; T^{IJ}\,\left(U^K|_J \,+\, \delta^K_J\right)\,N_I \;=\; R^K \tag{43}$$

bzw. deren materielle Ableitung

$$\dot{R}^K \;=\; \left[\dot{T}^{IJ}\,U^K|_J \,+\, \dot{T}^{IK} \,+\, T^{IJ}\,\dot{U}^K|_J\right]\,N_I\,. \tag{44}$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit beschreibt für Gleichgewichtszustände die Gleichheit der Arbeit der äußeren und inneren Kräfte, die diese auf dem Wege einer beliebigen virtuellen Verschiebung mit den Koordinaten δU_K, welche die geometrischen Randbedingungen auf dem Oberflächenabschnitt δV_{o2} erfüllen, verrichten. Durch Überschieben der Bewegungsgleichung (33) mit $\delta\boldsymbol{U}$ und der Integration über das gesamte Körpervolumen sowie der Berücksichtigung von (43) wird die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{V_o} \left[T^{IJ}|_I\,\left(U^K|_J \,+\, \delta^K_J\right) \,+\, T^{IJ}\,U^K|_{JI}\right]\,\delta U_K\,dV_o \,+\\
&+\int\limits_{\delta V_o} \left[R^K \,-\, T^{IJ}\,\left(U^K|_J \,+\, \delta^K_J\right)\,N_I\right]\,\delta U_K\,d\left(\delta V_o\right) \,+\\
&+\int\limits_{V_o} \varrho_o\,K^K\,\delta U_K\,dV_o \;=\; 0
\end{aligned} \tag{45}$$

erhalten. Unter Verwendung des Satzes von Gauß und Ostrogradski folgt aus (45) mit

$$\begin{aligned}\int\limits_{\delta V_o} T^{IJ}\,\left(U^K|_J\,+\,\delta^K_J\right)\,\delta U_K\,N_I\,d\,(\delta V_o) \;&=\; \int\limits_{V_o} T^{IJ}|_I\,\left(U^K|_J\,+\,\delta^K_J\right)\,\delta U_K\,dV_o\;+\\ &+\;\int\limits_{V_o} T^{IJ}\,U^K|_{JI}\,\delta U_K\,dV_o\;+\\ &+\;\int\limits_{V_o} T^{IJ}\,\left(U^K|_J\,+\,\delta^K_J\right)\,(\delta U_K)\,|_I\,dV_o \qquad (46)\end{aligned}$$

letztlich die neue Darstellung des Prinzips der virtuellen Arbeit:

$$\int\limits_{V_o} T^{IJ}\,\left(U^K|_J\,+\,\delta^K_J\right)\,(\delta U_K)\,|_I\,dV_o \;=\; \int\limits_{\delta V_o} R^K\,\delta U_K\,d\,(\delta V_o)\;+\;\int\limits_{V_o} \varrho_o\,K^K\,\delta U_K\,dV_o\,. \qquad (47)$$

In analoger Weise läßt sich aus (34) und (44) die Geschwindigkeitsformulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit ableiten:

$$\begin{aligned}\int\limits_{V_o} \left[\dot{T}^{IJ}\,\left(U^K|_J\,+\,\delta^K_J\right)\,+\,T^{IJ}\,\dot{U}^K|_J\right]\left(\delta\dot{U}_K\right)|_I\,dV_o \;&=\; \int\limits_{\delta V_o} \dot{R}^K\,\delta\dot{U}_K\,d\,(\delta V_o)\;+\\ &+\;\int\limits_{V_o} \varrho_o\,\dot{K}^K\,\delta\dot{U}_K\,dV_o\,. \qquad (48)\end{aligned}$$

Aus der Beziehung für den Greenschen Verzerrungstensor

$$2\,\boldsymbol{E}^\flat \;=\; \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}^\flat\boldsymbol{F}\;-\;\boldsymbol{G}^\flat \;=\; F^k_K\,\boldsymbol{G}^K\otimes\boldsymbol{g}_k\,g_{ij}\,\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j\,F^l_L\,\boldsymbol{g}_l\otimes\boldsymbol{G}^L\;-\;G_{KL}\,\boldsymbol{G}^K\otimes\boldsymbol{G}^L \qquad (49)$$

kann unter Berücksichtigung von (30) und der kovarianten Ableitung

$$U^K|_L \;=\; \left(G^{KM}\,U_M\right)|_L \;=\; G^{KM}\,U_M|_L\;+\;G^{KM}|_L\,U_M \quad \text{mit} \quad G^{KM}|_L\;=\;0 \qquad (50)$$

gezeigt werden, daß gilt:

$$2\,E_{KL} \;=\; U_K|_L\;+\;U_L|_K\;+\;U^M|_K\,U_M|_L\,. \qquad (51)$$

Daraus ergeben sich für die materielle Zeitableitung

$$2\,\dot{E}_{KL} \;=\; \dot{U}_K|_L\;+\;\dot{U}_L|_K\;+\;\dot{U}^M|_K\,U_M|_L\;+\;U^M|_K\,\dot{U}_M|_L \qquad (52)$$

und die Variation des Verzerrungstensors

$$2\,\delta E_{KL} \;=\; (\delta U_K)\,|_L\;+\;(\delta U_L)\,|_K\;+\;\left(\delta U^M\right)|_K\,U_M|_L\;+\;U^M|_K\,(\delta U_M)\,|_L\,. \qquad (53)$$

Der Integrand auf der linken Seite von (47) kann mit (53) ungeformt werden:

$$
\begin{aligned}
& T^{IJ}\left[U^K|_J\,(\delta U_K)\,|_I \,+\, (\delta U_J)\,|_I\right] \,= \\
= \;& \frac{1}{2}\left\{T^{IJ}\left[U^K|_J\,(\delta U_K)\,|_I \,+\, (\delta U_J)\,|_I\right] \,+\, T^{JI}\left[U^K|_I\,(\delta U_K)\,|_J \,+\, (\delta U_I)\,|_J\right]\right\} \,= \\
= \;& T^{IJ}\,\frac{1}{2}\left[(\delta U_I)\,|_J \,+\, (\delta U_J)\,|_I \,+\, U^K|_J\,(\delta U_K)\,|_I \,+\, U^K|_I\,(\delta U_K)\,|_J\right] \,= \\
= \;& T^{IJ}\,\frac{1}{2}\left[(\delta U_I)\,|_J \,+\, (\delta U_J)\,|_I \,+\, U^K|_J\,(\delta U_K)\,|_I \,+\, U_K|_I\,\left(\delta U^K\right)|_J\right] \,= \\
= \;& T^{IJ}\,\delta E_{IJ}\,. \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Aus (47) entsteht mittels (54) die endgültige Form des Prinzips der virtuellen Arbeit:

$$\int\limits_{V_o} T^{IJ}\,\delta E_{IJ}\,dV_o \,=\, \int\limits_{\delta V_o} R^K\,\delta U_K\,d\,(\delta V_o) \,+\, \int\limits_{V_o} \varrho_o\,K^K\,\delta U_K\,dV_o\,. \qquad (55)$$

Die Variation eines Potentials $\Pi(\boldsymbol{a})$ als skalare Funktion eines Tensors $\boldsymbol{a}$ ist durch die Beziehung

$$\delta\Pi \,=\, \frac{\partial\,\Pi}{\partial\,\boldsymbol{a}} \cdot\cdot\, \delta\boldsymbol{a} \qquad (56)$$

definiert. Wenn das Deformationsgesetz aus einem Energiepotential abgeleitet werden kann, wie es z. B. im Fall der thermodynamisch begründeten Hyperelastizität mit

$$T^{KL} \,=\, \frac{\partial\,W}{\partial\,E_{KL}} \qquad (57)$$

möglich ist, dann gilt für die Variation der Formänderungsenergie

$$\delta W \,=\, \frac{\partial\,W}{\partial\,E_{KL}}\,\delta E_{KL} \,=\, T^{KL}\,\delta E_{KL}\,. \qquad (58)$$

Unter der Annahme, daß die Oberflächen- und Volumenkräfte $\boldsymbol{R}^\sharp$ und $\boldsymbol{K}^\sharp$ nicht von den Verschiebungen abhängen, geht das Prinzip der virtuellen Arbeit (55) in das äquivalente Prinzip vom stationären Wert des elastischen Gesamtpotentials über:

$$\delta\Pi(\boldsymbol{U}) \,=\, \delta\left\{\int\limits_{V_o} \frac{\partial\,W}{\partial\,E_{KL}}\,E_{KL}\,dV_o \,-\, \int\limits_{\delta V_o} R^K\,U_K\,d\,(\delta V_o) \,-\, \int\limits_{V_o} \varrho_o\,K^K\,U_K\,dV_o\right\} \,=\, 0\,. \qquad (59)$$

Werden analoge Überlegungen mit einer zu (54) äquivalenten Beziehung für die Gleichung (48) durchgeführt, folgt die Geschwindigkeitsformulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

$$\int\limits_{V_o} \left[\dot{T}^{IJ}\,\delta\dot{E}_{IJ} + T^{IJ}\,\dot{U}^K|_J\left(\delta\dot{U}_K\right)|_I\right] dV_o = \int\limits_{\delta V_o} \dot{R}^K\,\delta\dot{U}_K\,d\left(\delta V_o\right) + \\ + \int\limits_{V_o} \varrho_o\,\dot{K}^K\,\delta\dot{U}_K\,dV_o \tag{60}$$

mit

$$2\,\delta\dot{E}_{IJ} = \left(\delta\dot{U}_I\right)|_J + \left(\delta\dot{U}_J\right)|_I + \left(\delta\dot{U}^M\right)|_I\,U_M|_J + U^M|_I\,\left(\delta\dot{U}_M\right)|_J\,. \tag{61}$$

Auch diese Formulierung kann auf der Basis analoger Annahmen und Schlußfolgerungen, wie sie beim Prinzip der virtuellen Arbeit Anwendung fanden, als äquivalentes Prinzip vom stationären Wert der Geschwindigkeit des Gesamtpotentials angegeben werden:

$$\delta\dot{\Pi} = \delta\Pi(\dot{\boldsymbol{U}}) = \delta\left\{\int\limits_{V_o}\left[\frac{d\,T^{IJ}}{d\,E_{KL}}\,\dot{E}_{IJ}\,\dot{E}_{KL} + T^{IJ}\,\dot{U}^K|_J\dot{U}_K|_I\right] dV_o - \right. \\ \left. - \int\limits_{\delta V_o} \dot{R}^K\,\dot{U}_K\,d\left(\delta V_o\right) - \int\limits_{V_o} \varrho_o\,\dot{K}^K\,\dot{U}_K\,dV_o\right\} = 0\,. \tag{62}$$

In symbolischer Darstellung lautet die Beziehung (60)

$$\int\limits_{V_o}\left\{\dot{\boldsymbol{T}}^\sharp\cdot\cdot\,\delta\dot{\boldsymbol{E}}^\flat + \boldsymbol{T}^\sharp\cdot\cdot\left[\left(\boldsymbol{GRAD}\left(\dot{\boldsymbol{U}}^\sharp\right)\right)^T\cdot\boldsymbol{GRAD}\left(\delta\dot{\boldsymbol{U}}^\flat\right)\right]\right\} dV_o = \\ = \int\limits_{\delta V_o} \dot{\boldsymbol{R}}^\sharp\cdot\delta\dot{\boldsymbol{U}}^\flat\,d\left(\delta V_o\right) + \int\limits_{V_o} \varrho_o\,\dot{\boldsymbol{K}}^\sharp\cdot\delta\dot{\boldsymbol{U}}^\flat\,dV_o\,. \tag{63}$$

Wird die materielle Zeitableitung des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors durch

$$\dot{\boldsymbol{T}}^\sharp = \frac{d\,\boldsymbol{T}^\sharp}{d\,\boldsymbol{E}^\flat}\cdot\cdot\,\dot{\boldsymbol{E}}^\flat \tag{64}$$

ersetzt, entstehen

$$\int\limits_{V_o}\left\{\left(\frac{d\,\boldsymbol{T}^\sharp}{d\,\boldsymbol{E}^\flat}\cdot\cdot\,\dot{\boldsymbol{E}}^\flat\right)\cdot\cdot\,\delta\dot{\boldsymbol{E}}^\flat + \boldsymbol{T}^\sharp\cdot\cdot\left[\left(\boldsymbol{GRAD}\left(\dot{\boldsymbol{U}}^\sharp\right)\right)^T\cdot\boldsymbol{GRAD}\left(\delta\dot{\boldsymbol{U}}^\flat\right)\right]\right\} dV_o = \\ = \int\limits_{\delta V_o} \dot{\boldsymbol{R}}^\sharp\cdot\delta\dot{\boldsymbol{U}}^\flat\,d\left(\delta V_o\right) + \int\limits_{V_o} \varrho_o\,\dot{\boldsymbol{K}}^\sharp\cdot\delta\dot{\boldsymbol{U}}^\flat\,dV_o \tag{65}$$

bzw.

$$\int\limits_{V_o} \left[\frac{d\,T^{IJ}}{d\,E_{KL}}\,\dot{E}_{KL}\,\delta\dot{E}_{IJ} + T^{IJ}\,\dot{U}^K|_J \left(\delta\dot{U}_K\right)|_I \right] dV_o \;=\; \int\limits_{\delta V_o} \dot{R}^K\,\delta\dot{U}_K\,d\,(\delta V_o) \;+$$

$$+ \int\limits_{V_o} \varrho_o\,\dot{K}^K\,\delta\dot{U}_K\,dV_o\,. \qquad (66)$$

Darin verkörpert $d\boldsymbol{T}^\sharp/d\boldsymbol{E}^\flat$ die konsistente Materialmatrix, die durch Ableitung des in der Zeit diskretisierten Deformationsgesetzes nach dem Verzerrungstensor ermittelt werden kann.

Die schwache Formulierung (62) bzw. ihre äquivalente Form (66) dient im folgenden Abschnitt als Grundlage für die Herleitung des inkrementellen FEM-Steifigkeitssystems zur Simulation finiter elastisch-plastischer Deformationen.

5 FEM-Steifigkeitssystem auf der Grundlage einer Variationsformulierung

Die Lösung von Anfangs-Randwert-Aufgaben der Festkörpermechanik erfolgt unter der Nutzung sowohl von Ortsdiskretisierungsverfahren, wie z. B. der Methode der Finiten Elemente (FEM), als auch von Zeitdiskretisierungsmethoden. Dabei soll im weiteren von einer inkrementellen Betrachtungsweise ausgegangen werden, die sich in geeigneter Form aus den entsprechenden Geschwindigkeitsformulierungen ableiten läßt.

Das Randwertproblem besteht in der Lösung der den Gleichgewichtsbedingungen äquivalenten Ausdrücke (60) und (62) der Geschwindigkeitsformulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit. Dabei sind die Randwerte der inkrementellen Feldgrößen für den Spannungs- und Verschiebungszustand zu berücksichtigen. Das Anfangswertproblem bezieht sich auf die Lösung des Algebro-Differentialgleichungssytems (DAE) für das Deformationsgesetz, welches zur Berechnung der Spannungen, internen Variablen und des plastischen Multiplikators zeitlich diskretisiert wird.

5.1 FEM-Diskretisierung – Formfunktionen und deren Ableitungen

Gegeben sei die Ortsdiskretisierung eines zu untersuchenden Kontinuums durch Finite Elemente. Die Lösung des Randwertproblems soll in Form der Verschiebungen in den

FE-Knoten vorliegen. Unter Nutzung der Formfunktionen sind damit die Verschiebungen innerhalb der Elemente bekannt. Anschließend werden die Verzerrungen aus den Verschiebungen durch geometrisch motivierte Beziehungen (siehe z. B. (51)) in den Integrationsstützstellen der Elemente ermittelt. Dort sind ebenfalls die Werte für die Spannungen und internen Variablen aus der Lösung des Anfangswertproblems gegeben. Im weiteren wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit der dreidimensionale Fall in kartesischen Koordinaten dargestellt, wobei kovariante Ableitungen auf ihren partiellen Teil reduziert werden. Damit können neben 3D-Problemen auch der ebene Verzerrungs- und der ebene Spannungszustand beschrieben werden. Lediglich der axialsymmetrische Fall nimmt wegen der Verwendung eines Zylinderkoordinatensystems eine gewisse Sonderstellung ein, ohne daß sich die prinzipielle Vorgehensweise ändert. Alle folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Verwendung isoparametrischer Elemente. Hier werden zur Ermittlung der Funktionswerte von Feldgrößen (Verschiebungen, Verzerrungen etc.) die gleichen Formfunktionen herangezogen wie für die Berechnung der Elementkoordinaten.

Die weiteren Betrachtungen zur Ermittlung der Freiwerte der Formfunktionen werden in den lokalen Koordianten $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ eines Referenzelementes von einfacher Gestalt im Bildbereich durchgeführt. Aus den Knotenkoordinaten $\tilde{\boldsymbol{X}}$ und den für alle Koordinatenrichtungen gleichen Formfunktionen $\boldsymbol{N}$ lassen sich die globalen Koordinaten $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ eines Punktes mit den lokalen Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ im Element mit nen Knoten auf der Basis folgender Beziehungen näherungsweise berechnen:

$$X_1(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{J=1}^{nen} N^J(\boldsymbol{\xi})\, \tilde{X}_1^J \,; \quad \text{analog } X_2,\, X_3 \,. \tag{67}$$

Die dreidimensionale Darstellung ergibt:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})\, \tilde{\boldsymbol{X}} \tag{68}$$

mit

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} X_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ X_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ X_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} N^1(\boldsymbol{\xi}) \dots N^{nen}(\boldsymbol{\xi}) & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & N^1(\boldsymbol{\xi}) \dots N^{nen}(\boldsymbol{\xi}) & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & N^1(\boldsymbol{\xi}) \dots N^{nen}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$\boldsymbol{N}^T(\boldsymbol{\xi}) = \left(N^1(\boldsymbol{\xi}) \dots N^{nen}(\boldsymbol{\xi})\right) \tag{71}$$

und

$$\tilde{\boldsymbol{X}}^T = \left(\tilde{X}_1^1 \dots \tilde{X}_1^{nen}\ \tilde{X}_2^1 \dots \tilde{X}_2^{nen}\ \tilde{X}_3^1 \dots \tilde{X}_3^{nen}\right) . \tag{72}$$

Wegen des vorausgesetzten isoparametrischen Konzepts der eingesetzten Elemente entsteht für den Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsvektor $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$ in einem beliebigen Punkt des Elementes und den Knotenverschiebungen $\tilde{\boldsymbol{U}}$ ein analoger Zusammenhang

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})\,\tilde{\boldsymbol{U}} \tag{73}$$

mit seiner ausgeschriebenen Form

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^1 & \dots & N^{nen} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N^1 & \dots & N^{nen} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & N^1 & \dots & N^{nen} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_1^1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_1^{nen} \\ \tilde{U}_2^1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_2^{nen} \\ \tilde{U}_3^1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_3^{nen} \end{pmatrix} \tag{74}$$

Für die partiellen Ableitungen einer Verschiebungskomponente nach den Elementkoordinaten gilt:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial X_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial X_2}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial X_2}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial X_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial X_1} \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial X_3} \end{pmatrix} \tag{75}$$

bzw. in kompakter Schreibweise

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi}) \left(\frac{\partial U_1}{\partial \boldsymbol{X}}\right). \tag{76}$$

Unter Beachtung von (67) und (71) kann die Jakobi-Matrix $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi})$ wie folgt dargestellt werden:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{,1}^T \tilde{\boldsymbol{X}}_1 & \boldsymbol{N}_{,1}^T \tilde{\boldsymbol{X}}_2 & \boldsymbol{N}_{,1}^T \tilde{\boldsymbol{X}}_3 \\ \boldsymbol{N}_{,2}^T \tilde{\boldsymbol{X}}_1 & \boldsymbol{N}_{,2}^T \tilde{\boldsymbol{X}}_2 & \boldsymbol{N}_{,2}^T \tilde{\boldsymbol{X}}_3 \\ \boldsymbol{N}_{,3}^T \tilde{\boldsymbol{X}}_1 & \boldsymbol{N}_{,3}^T \tilde{\boldsymbol{X}}_2 & \boldsymbol{N}_{,3}^T \tilde{\boldsymbol{X}}_3 \end{pmatrix} \tag{77}$$

mit

$$\boldsymbol{N}_{,1}^T = \frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial \xi_1} \qquad \text{usw.} \tag{78}$$

In der ausgeschriebenen Form besitzt die Jakobi-Matrix (77) die Struktur

$$\begin{pmatrix} N^1_{,1}\tilde{X}^1_1 + \ldots + N^{nen}_{,1}\tilde{X}^{nen}_1 & N^1_{,1}\tilde{X}^1_2 + \ldots + N^{nen}_{,1}\tilde{X}^{nen}_2 & N^1_{,1}\tilde{X}^1_3 + \ldots + N^{nen}_{,1}\tilde{X}^{nen}_3 \\ N^1_{,2}\tilde{X}^1_1 + \ldots + N^{nen}_{,2}\tilde{X}^{nen}_1 & N^1_{,2}\tilde{X}^1_2 + \ldots + N^{nen}_{,2}\tilde{X}^{nen}_2 & N^1_{,2}\tilde{X}^1_3 + \ldots + N^{nen}_{,2}\tilde{X}^{nen}_3 \\ N^1_{,3}\tilde{X}^1_1 + \ldots + N^{nen}_{,3}\tilde{X}^{nen}_1 & N^1_{,3}\tilde{X}^1_2 + \ldots + N^{nen}_{,3}\tilde{X}^{nen}_2 & N^1_{,3}\tilde{X}^1_3 + \ldots + N^{nen}_{,3}\tilde{X}^{nen}_3 \end{pmatrix} . \qquad (79)$$

Die Umstellung von (76) führt auf

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial \boldsymbol{X}}\right) = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \left(\frac{\partial U_1}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) , \qquad (80)$$

wobei die Ableitungen von U_1 nach den Elementkoordinaten aus (67) und (73) erhalten werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} &= N^1_{,1}\,\tilde{U}^1_1 + \ldots + N^{nen}_{,1}\,\tilde{U}^{nen}_1 \\ \frac{\partial U_1}{\partial \xi_2} &= N^1_{,2}\,\tilde{U}^1_1 + \ldots + N^{nen}_{,2}\,\tilde{U}^{nen}_1 \\ \frac{\partial U_1}{\partial \xi_3} &= N^1_{,3}\,\tilde{U}^1_1 + \ldots + N^{nen}_{,3}\,\tilde{U}^{nen}_1 \end{aligned} \qquad (81)$$

Die verkürzte Darstellung von (81) führt auf

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}^T_{,1} \\ \boldsymbol{N}^T_{,2} \\ \boldsymbol{N}^T_{,3} \end{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{U}}_1 . \qquad (82)$$

Entsprechend (80) ist die Inverse der Jakobi-Matrix mit der Matrix $(\boldsymbol{N}^T_{,1}, \boldsymbol{N}^T_{,2}, \boldsymbol{N}^T_{,3})^T$ laut (82) zu multiplizieren.

$$
\boldsymbol{J}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{N}^T_{,1} \\ \boldsymbol{N}^T_{,2} \\ \boldsymbol{N}^T_{,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^{-1}_{11} & J^{-1}_{12} & J^{-1}_{13} \\ J^{-1}_{21} & J^{-1}_{22} & J^{-1}_{23} \\ J^{-1}_{31} & J^{-1}_{32} & J^{-1}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^1_{,1} & \dots & N^{nen}_{,1} \\ N^1_{,2} & \dots & N^{nen}_{,2} \\ N^1_{,3} & \dots & N^{nen}_{,3} \end{pmatrix} = \tag{83}
$$

$$
= \begin{pmatrix} J^{-1}_{11}N^1_{,1} + \ldots + J^{-1}_{13}N^1_{,3} & \dots & J^{-1}_{11}N^{nen}_{,1} + \ldots + J^{-1}_{13}N^{nen}_{,3} \\ J^{-1}_{21}N^1_{,1} + \ldots + J^{-1}_{23}N^1_{,3} & \dots & J^{-1}_{21}N^{nen}_{,1} + \ldots + J^{-1}_{23}N^{nen}_{,3} \\ J^{-1}_{31}N^1_{,1} + \ldots + J^{-1}_{33}N^1_{,3} & \dots & J^{-1}_{31}N^{nen}_{,1} + \ldots + J^{-1}_{33}N^{nen}_{,3} \end{pmatrix} = \tag{84}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \bar{N}^1_1 & \dots & \bar{N}^{nen}_1 \\ \bar{N}^1_2 & \dots & \bar{N}^{nen}_2 \\ \bar{N}^1_3 & \dots & \bar{N}^{nen}_3 \end{pmatrix} \tag{85}
$$

Schließlich führen (80) und (82) bis (85) auf

$$
\begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{1,2} \\ U_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{N}^1_1 & \dots & \bar{N}^{nen}_1 \\ \bar{N}^1_2 & \dots & \bar{N}^{nen}_2 \\ \bar{N}^1_3 & \dots & \bar{N}^{nen}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}^1_1 \\ \vdots \\ \tilde{U}^{nen}_1 \end{pmatrix} \tag{86}
$$

mit

$$
U_{1,1} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \qquad \text{usw.} \tag{87}
$$

Die Verallgemeinerung auf das räumliche Problem lautet

$$
\begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{1,2} \\ U_{1,3} \\ U_{2,1} \\ U_{2,2} \\ U_{2,3} \\ U_{3,1} \\ U_{3,2} \\ U_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\bar{N}^1_1 & \dots & \bar{N}^{nen}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\bar{N}^1_2 & \dots & \bar{N}^{nen}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\bar{N}^1_3 & \dots & \bar{N}^{nen}_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \bar{N}^1_1 & \dots & \bar{N}^{nen}_1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \bar{N}^1_2 & \dots & \bar{N}^{nen}_2 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \bar{N}^1_3 & \dots & \bar{N}^{nen}_3 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{N}^1_1 & \dots & \bar{N}^{nen}_1 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{N}^1_2 & \dots & \bar{N}^{nen}_2 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{N}^1_3 & \dots & \bar{N}^{nen}_3
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}^1_1 \\ \vdots \\ \tilde{U}^{nen}_1 \\ \tilde{U}^1_2 \\ \vdots \\ \tilde{U}^{nen}_2 \\ \tilde{U}^1_3 \\ \vdots \\ \tilde{U}^{nen}_3 \end{pmatrix} \tag{88}
$$

mit der kompakten Formulierung

$$
\boldsymbol{U}_{,\boldsymbol{X}} = \bar{\boldsymbol{G}}\,\tilde{\boldsymbol{U}}\,. \tag{89}
$$

Aus (73) und (89) folgen für die materiellen Zeitableitungen

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \left(\boldsymbol{G}\,\tilde{\boldsymbol{U}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \boldsymbol{G}\,\dot{\tilde{\boldsymbol{U}}} \tag{90}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{,\boldsymbol{X}} = \left(\bar{\boldsymbol{G}}\,\tilde{\boldsymbol{U}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \bar{\boldsymbol{G}}\,\dot{\tilde{\boldsymbol{U}}}\,. \tag{91}$$

Werden die Zeitableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt, entstehen analoge Ausdrücke für die Verschiebungsinkremente.

$$\Delta\boldsymbol{U} = \boldsymbol{G}\,\Delta\tilde{\boldsymbol{U}} \tag{92}$$

$$(\Delta\boldsymbol{U})_{,\boldsymbol{X}} = \bar{\boldsymbol{G}}\,\Delta\tilde{\boldsymbol{U}} \tag{93}$$

5.2 FEM-Diskretisierung – Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung

Die Koordinaten des Verzerrungstensors $\boldsymbol{E}$ seien in einem Vektor der Form

$$\boldsymbol{E} = (E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{23}, 2E_{31})^T \tag{94}$$

gegeben. Dabei ist zu beachten, daß bei der Integration des Deformationsgesetzes die Schubkoordinaten E_{IJ} mit $I \neq J$ nicht mit dem Faktor 2 auftreten. Aus diesem Grund müssen entsprechende Komponenten der konsistenten Materialmatrix mit dem Faktor $0,5$ multipliziert werden, um Übereinstimmung mit den hier abgeleiteten Beziehungen herzustellen.

Werden in der Gleichung (52) die materiellen Zeitableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt, erhält man die folgende Relation zwischen den Inkrementen des Verzerrungstensors und den Inkrementen der Verschiebungsableitungen:

$$
\begin{pmatrix} \Delta E_{11} \\ \Delta E_{22} \\ \Delta E_{33} \\ 2\Delta E_{12} \\ 2\Delta E_{23} \\ 2\Delta E_{31} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1+U_{1,1} & 0 & 0 & U_{2,1} & 0 & 0 & U_{3,1} & 0 & 0 \\
0 & U_{1,2} & 0 & 0 & 1+U_{2,2} & 0 & 0 & U_{3,2} & 0 \\
0 & 0 & U_{1,3} & 0 & 0 & U_{2,3} & 0 & 0 & 1+U_{3,3} \\
U_{1,2} & 1+U_{1,1} & 0 & 1+U_{2,2} & U_{2,1} & 0 & U_{3,2} & U_{3,1} & 0 \\
0 & U_{1,3} & U_{1,2} & 0 & U_{2,3} & 1+U_{2,2} & 0 & 1+U_{3,3} & U_{3,2} \\
U_{1,3} & 0 & 1+U_{1,1} & U_{2,3} & 0 & U_{2,1} & 1+U_{3,3} & 0 & U_{3,1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \Delta U_{1,1} \\ \Delta U_{1,2} \\ \Delta U_{1,3} \\ \Delta U_{2,1} \\ \Delta U_{2,2} \\ \Delta U_{2,3} \\ \Delta U_{3,1} \\ \Delta U_{3,2} \\ \Delta U_{3,3} \end{pmatrix}
\tag{95}
$$

Die symbolische Darstellung führt auf

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{E} \;&=\; \boldsymbol{A}\,(\Delta \boldsymbol{U})_{,\boldsymbol{X}} \;=\; \boldsymbol{A}\,\bar{\boldsymbol{G}}\,\Delta\tilde{\boldsymbol{U}} \;=\; (\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_N)\,\bar{\boldsymbol{G}}\,\Delta\tilde{\boldsymbol{U}} \;= \\ &=\; (\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_N)\,\Delta\tilde{\boldsymbol{U}} \;=\; \boldsymbol{B}\,\Delta\tilde{\boldsymbol{U}}\end{aligned} \tag{96}$$

mit

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{97}$$

und

$$\boldsymbol{A}_N = \begin{pmatrix} U_{1,1} & 0 & 0 & U_{2,1} & 0 & 0 & U_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & U_{1,2} & 0 & 0 & U_{2,2} & 0 & 0 & U_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & U_{1,3} & 0 & 0 & U_{2,3} & 0 & 0 & U_{3,3} \\ U_{1,2} & U_{1,1} & 0 & U_{2,2} & U_{2,1} & 0 & U_{3,2} & U_{3,1} & 0 \\ 0 & U_{1,3} & U_{1,2} & 0 & U_{2,3} & U_{2,2} & 0 & U_{3,3} & U_{3,2} \\ U_{1,3} & 0 & U_{1,1} & U_{2,3} & 0 & U_{2,1} & U_{3,3} & 0 & U_{3,1} \end{pmatrix}. \tag{98}$$

Durch die Gleichungen

$$\boldsymbol{B}_0 \;=\; \boldsymbol{A}_0\,\bar{\boldsymbol{G}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B}_N \;=\; \boldsymbol{A}_N\,\bar{\boldsymbol{G}} \tag{99}$$

werden der lineare und der nichtlineare Anteil der inkrementellen Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_N$ definiert. Für den Fall kleiner Verzerrungen gilt $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0$. Die einzelnen Komponenten der inkrementellen Verzerrungs-Verschiebungs-Matrizen werden unter Beachtung von (88) in den folgenden Beziehungen angegeben:

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} \bar{N}_1^1 & \dots & \bar{N}_1^{nen} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \bar{N}_2^1 & \dots & \bar{N}_2^{nen} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{N}_3^1 & \dots & \bar{N}_3^{nen} \\ \bar{N}_2^1 & \dots & \bar{N}_2^{nen} & \bar{N}_1^1 & \dots & \bar{N}_1^{nen} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \bar{N}_3^1 & \dots & \bar{N}_3^{nen} & \bar{N}_2^1 & \dots & \bar{N}_2^{nen} \\ \bar{N}_3^1 & \dots & \bar{N}_3^{nen} & 0 & \dots & 0 & \bar{N}_1^1 & \dots & \bar{N}_1^{nen} \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$\boldsymbol{B}_N = \begin{pmatrix} \bar{N}_1^1 U_{1,1} & \dots & \bar{N}_1^{nen} U_{1,1} & \bar{N}_1^1 U_{2,1} & \dots & \bar{N}_1^{nen} U_{2,1} & \bar{N}_1^1 U_{3,1} & \dots & \bar{N}_1^{nen} U_{3,1} \\ \bar{N}_2^1 U_{1,2} & \dots & \bar{N}_2^{nen} U_{1,2} & \bar{N}_2^1 U_{2,2} & \dots & \bar{N}_2^{nen} U_{2,2} & \bar{N}_2^1 U_{3,2} & \dots & \bar{N}_2^{nen} U_{3,2} \\ \bar{N}_3^1 U_{1,3} & \dots & \bar{N}_3^{nen} U_{1,3} & \bar{N}_3^1 U_{2,3} & \dots & \bar{N}_3^{nen} U_{2,3} & \bar{N}_3^1 U_{3,3} & \dots & \bar{N}_3^{nen} U_{3,3} \\ \bar{N}_1^1 U_{1,2} + \bar{N}_2^1 U_{1,1} & \dots & \bar{N}_1^{nen} U_{1,2} + \bar{N}_2^{nen} U_{1,1} & \bar{N}_1^1 U_{2,2} + \bar{N}_2^1 U_{2,1} & \dots & \bar{N}_1^{nen} U_{2,2} + \bar{N}_2^{nen} U_{2,1} & \bar{N}_1^1 U_{3,2} + \bar{N}_2^1 U_{3,1} & \dots & \bar{N}_1^{nen} U_{3,2} + \bar{N}_2^{nen} U_{3,1} \\ \bar{N}_2^1 U_{1,3} + \bar{N}_3^1 U_{1,2} & \dots & \bar{N}_2^{nen} U_{1,3} + \bar{N}_3^{nen} U_{1,2} & \bar{N}_2^1 U_{2,3} + \bar{N}_3^1 U_{2,2} & \dots & \bar{N}_2^{nen} U_{2,3} + \bar{N}_3^{nen} U_{2,2} & \bar{N}_2^1 U_{3,3} + \bar{N}_3^1 U_{3,2} & \dots & \bar{N}_2^{nen} U_{3,3} + \bar{N}_3^{nen} U_{3,2} \\ \bar{N}_1^1 U_{1,3} + \bar{N}_3^1 U_{1,1} & \dots & \bar{N}_1^{nen} U_{1,3} + \bar{N}_3^{nen} U_{1,1} & \bar{N}_1^1 U_{2,3} + \bar{N}_3^1 U_{2,1} & \dots & \bar{N}_1^{nen} U_{2,3} + \bar{N}_3^{nen} U_{2,1} & \bar{N}_1^1 U_{3,3} + \bar{N}_3^1 U_{3,1} & \dots & \bar{N}_1^{nen} U_{3,3} + \bar{N}_3^{nen} U_{3,1} \end{pmatrix} \tag{101}$$

Die Komponenten $\bar{N}_I^J$ und $U_{I,J}$ sind dabei mit den Gleichungen (83)-(85) bzw. (86) zu berechnen.

5.3 FEM-Diskretisierung – lokale und globale Steifigkeitsbeziehungen

Aus den Beziehungen (92), (93) und (96) folgen für die Variation des Vektors der Verschiebungsinkremente und dessen Ortsableitung bzw. die Variation des Tensors der Verzerrungsinkremente

$$\delta(\Delta\boldsymbol{U}) \;=\; \boldsymbol{G}\,\delta(\Delta\tilde{\boldsymbol{U}}) \tag{102}$$

$$\delta\left((\Delta\boldsymbol{U})_{,\boldsymbol{X}}\right) \;=\; \bar{\boldsymbol{G}}\,\delta(\Delta\tilde{\boldsymbol{U}}) \tag{103}$$

$$\delta(\Delta\boldsymbol{E}) \;=\; \boldsymbol{B}\,\delta(\Delta\tilde{\boldsymbol{U}})\,. \tag{104}$$

Materielle Zeitableitungen in der Geschwindigkeitsformulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit (65) werden zunächst durch Differenzenquotienten ersetzt. Eine genauere Zeitdiskretisierung mit Mehrschrittverfahren ist ohne prinzipielle Änderungen möglich. Durch Verwendung einer für die numerische Behandlung des FEM-Problems günstigen Darstellung der Koordinaten von zweistufigen Tensoren als Vektoren und von vierstufigen Tensoren als Matrizen kann (72) in folgender Form modifiziert werden:

$$\int\limits_{V_o^e}\left[(\delta(\Delta\boldsymbol{E}))^T\left(\frac{d\,\boldsymbol{T}}{d\,\boldsymbol{E}}\right)\Delta\boldsymbol{E} + \left(\delta(\Delta\boldsymbol{U})_{,\boldsymbol{X}}\right)^T\boldsymbol{T}^*\,(\Delta\boldsymbol{U})_{,\boldsymbol{X}}\right]dV_o^e \;-$$

$$-\int\limits_{\delta V_o^e}(\delta(\Delta\boldsymbol{U}))^T\,(\Delta\boldsymbol{R})\,d\,(\delta V_o^e) - \int\limits_{V_o^e}\varrho_o\,(\delta(\Delta\boldsymbol{U}))^T\,(\Delta\boldsymbol{K})\,dV_o^e \;=\; 0 \tag{105}$$

mit

$$(\delta(\Delta\boldsymbol{E}))^T \;=\; (\delta(\Delta E_{11}),\, \delta(\Delta E_{22}),\, \delta(\Delta E_{33}),\, \delta(2\Delta E_{12}),\, \delta(2\Delta E_{23}),\, \delta(2\Delta E_{31})) \tag{106}$$

$$\Delta\boldsymbol{E} \;=\; \begin{pmatrix} \Delta E_{11} \\ \Delta E_{22} \\ \Delta E_{33} \\ 2\Delta E_{12} \\ 2\Delta E_{23} \\ 2\Delta E_{31} \end{pmatrix} \tag{107}$$

$$\left(\frac{d\,\boldsymbol{T}}{d\,\boldsymbol{E}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{dT^{11}}{dE_{11}} & \frac{dT^{11}}{dE_{22}} & \frac{dT^{11}}{dE_{33}} & \frac{dT^{11}}{dE_{12}} & \frac{dT^{11}}{dE_{23}} & \frac{dT^{11}}{dE_{31}} \\ \frac{dT^{22}}{dE_{11}} & \frac{dT^{22}}{dE_{22}} & \frac{dT^{22}}{dE_{33}} & \frac{dT^{22}}{dE_{12}} & \frac{dT^{22}}{dE_{23}} & \frac{dT^{22}}{dE_{31}} \\ \frac{dT^{33}}{dE_{11}} & \frac{dT^{33}}{dE_{22}} & \frac{dT^{33}}{dE_{33}} & \frac{dT^{33}}{dE_{12}} & \frac{dT^{33}}{dE_{23}} & \frac{dT^{33}}{dE_{31}} \\ \frac{dT^{12}}{dE_{11}} & \frac{dT^{12}}{dE_{22}} & \frac{dT^{12}}{dE_{33}} & \frac{1}{2}\left(\frac{dT^{12}}{dE_{12}} + \frac{dT^{12}}{dE_{21}}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{dT^{12}}{dE_{23}} + \frac{dT^{12}}{dE_{32}}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{dT^{12}}{dE_{31}} + \frac{dT^{12}}{dE_{13}}\right) \\ \frac{dT^{23}}{dE_{11}} & \frac{dT^{23}}{dE_{22}} & \frac{dT^{23}}{dE_{33}} & \frac{1}{2}\left(\frac{dT^{23}}{dE_{12}} + \frac{dT^{23}}{dE_{21}}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{dT^{23}}{dE_{23}} + \frac{dT^{23}}{dE_{32}}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{dT^{23}}{dE_{31}} + \frac{dT^{23}}{dE_{13}}\right) \\ \frac{dT^{31}}{dE_{11}} & \frac{dT^{31}}{dE_{22}} & \frac{dT^{31}}{dE_{33}} & \frac{1}{2}\left(\frac{dT^{31}}{dE_{12}} + \frac{dT^{31}}{dE_{21}}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{dT^{31}}{dE_{23}} + \frac{dT^{31}}{dE_{32}}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{dT^{31}}{dE_{31}} + \frac{dT^{31}}{dE_{13}}\right) \end{pmatrix} \tag{108}$$

$$\left(\delta(\Delta \boldsymbol{U}), \boldsymbol{X}\right)^T = \left(\delta\left(\frac{\partial\,(\Delta U_1)}{\partial\,X_1}\right), \delta\left(\frac{\partial\,(\Delta U_1)}{\partial\,X_2}\right), \delta\left(\frac{\partial\,(\Delta U_1)}{\partial\,X_3}\right), \delta\left(\frac{\partial\,(\Delta U_2)}{\partial\,X_1}\right), \delta\left(\frac{\partial\,(\Delta U_2)}{\partial\,X_2}\right), \delta\left(\frac{\partial\,(\Delta U_2)}{\partial\,X_3}\right), \delta\left(\frac{\partial\,(\Delta U_3)}{\partial\,X_1}\right), \delta\left(\frac{\partial\,(\Delta U_3)}{\partial\,X_2}\right), \delta\left(\frac{\partial\,(\Delta U_3)}{\partial\,X_3}\right)\right) \tag{109}$$

$$
\boldsymbol{T}^* = \begin{pmatrix}
T^{11} & T^{12} & T^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
T^{21} & T^{22} & T^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
T^{31} & T^{32} & T^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & T^{11} & T^{12} & T^{13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & T^{21} & T^{22} & T^{23} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & T^{31} & T^{32} & T^{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T^{31} & T^{32} & T^{33}
\end{pmatrix} \tag{110}
$$

$$
(\Delta \boldsymbol{U})_{\boldsymbol{,X}} = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial\,(\Delta U_1)}{\partial\,X_1} \\
\dfrac{\partial\,(\Delta U_1)}{\partial\,X_2} \\
\dfrac{\partial\,(\Delta U_1)}{\partial\,X_3} \\
\dfrac{\partial\,(\Delta U_2)}{\partial\,X_1} \\
\dfrac{\partial\,(\Delta U_2)}{\partial\,X_2} \\
\dfrac{\partial\,(\Delta U_2)}{\partial\,X_3} \\
\dfrac{\partial\,(\Delta U_3)}{\partial\,X_1} \\
\dfrac{\partial\,(\Delta U_3)}{\partial\,X_2} \\
\dfrac{\partial\,(\Delta U_3)}{\partial\,X_3}
\end{pmatrix} \tag{111}
$$

$$
(\delta(\Delta \boldsymbol{U}))^T = (\delta(\Delta U_1),\, \delta(\Delta U_2),\, \delta(\Delta U_3)) \tag{112}
$$

$$
\Delta \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \Delta R^1 \\ \Delta R^2 \\ \Delta R^3 \end{pmatrix}, \qquad \Delta \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \Delta K^1 \\ \Delta K^2 \\ \Delta K^3 \end{pmatrix}. \tag{113}
$$

Unter Berücksichtigung von (93), (96) und (102)-(104) ergibt sich für die inkrementelle Darstellung der schwachen Formulierung des Gleichgewichts:

$$\int\limits_{V_o^e} \left[\left(\delta(\Delta\tilde{\boldsymbol{U}})\right)^T \boldsymbol{B}^T \left(\frac{d\,\boldsymbol{T}}{d\,\boldsymbol{E}}\right) \boldsymbol{B}\,\Delta\tilde{\boldsymbol{U}} \,+\, \left(\delta(\Delta\tilde{\boldsymbol{U}})\right)^T \bar{\boldsymbol{G}}^T \boldsymbol{T}^* \bar{\boldsymbol{G}}\,\Delta\tilde{\boldsymbol{U}} \right] dV_o^e \,-$$

$$-\int\limits_{\delta V_o^e} \left(\delta(\Delta\tilde{\boldsymbol{U}})\right)^T \boldsymbol{G}^T (\Delta\boldsymbol{R})\, d\,(\delta V_o^e) \,-\, \int\limits_{V_o^e} \varrho_o \left(\delta(\Delta\tilde{\boldsymbol{U}})\right)^T \boldsymbol{G}^T (\Delta\boldsymbol{K})\, dV_o^e \,=$$

$$= \left(\delta(\Delta\tilde{\boldsymbol{U}})\right)^T \left\{ \int\limits_{V_o^e} \left[\boldsymbol{B}^T \left(\frac{d\,\boldsymbol{T}}{d\,\boldsymbol{E}}\right) \boldsymbol{B} \,+\, \bar{\boldsymbol{G}}^T \boldsymbol{T}^* \bar{\boldsymbol{G}} \right] \Delta\tilde{\boldsymbol{U}}\, dV_o^e \,- \right.$$

$$\left. -\int\limits_{\delta V_o^e} \boldsymbol{G}^T (\Delta\boldsymbol{R})\, d\,(\delta V_o^e) \,-\, \int\limits_{V_o^e} \varrho_o\, \boldsymbol{G}^T (\Delta\boldsymbol{K})\, dV_o^e \right\} \,=\, 0\,. \tag{114}$$

Die Beziehung (114) gilt für beliebige Werte der virtuellen Verschiebungsinkremente $\delta(\Delta\tilde{\boldsymbol{U}})$. Damit folgt aus (114) das inkrementelle FE-Steifigkeitssystem als System nichtlinearer algebraischer Gleichungen, die z. B. mit Hilfe des Newton-Verfahrens linearisiert werden.

$$\left\{ \int\limits_{V_o^e} \left[\boldsymbol{B}^T \left(\frac{d\,\boldsymbol{T}}{d\,\boldsymbol{E}}\right) \boldsymbol{B} \,+\, \bar{\boldsymbol{G}}^T \boldsymbol{T}^* \bar{\boldsymbol{G}} \right] dV_o^e \right\} \Delta\tilde{\boldsymbol{U}} \,-$$

$$-\int\limits_{\delta V_o^e} \boldsymbol{G}^T (\Delta\boldsymbol{R})\, d\,(\delta V_o^e) \,-\, \int\limits_{V_o^e} \varrho_o\, \boldsymbol{G}^T (\Delta\boldsymbol{K})\, dV_o^e \,=\, 0 \tag{115}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{K}^e\,\Delta\tilde{\boldsymbol{U}} \,=\, \Delta\tilde{\boldsymbol{P}}^e\,. \tag{116}$$

Hierbei stellt $\Delta\tilde{\boldsymbol{P}}^e = (\Delta P_1^1 \ldots \Delta P_1^{nen}\, \Delta P_2^1 \ldots \Delta P_2^{nen}\, \Delta P_3^1 \ldots \Delta P_3^{nen})^T$ den Vektor der Knotenkraftinkremente eines Elementes dar, der sowohl Anteile aus Oberflächenkraftinkrementen

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{P}}_A = \int\limits_{\delta V_o^e} \boldsymbol{G}^T (\Delta\boldsymbol{R})\, d\,(\delta V_o^e) \tag{117}$$

als auch aus Volumenkraftinkrementen

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{P}}_V = \int\limits_{V_o^e} \varrho_o\, \boldsymbol{G}^T (\Delta\boldsymbol{K})\, dV_o^e \tag{118}$$

enthält.

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ und der Belastungsvektor $\Delta\tilde{\boldsymbol{P}}$ ergeben sich als FEM-Akkumulation ($\biguplus$) aller Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementbelastungsvektoren

$$\boldsymbol{K} = \biguplus_{e=1}^{numel} \boldsymbol{K}^e, \qquad \Delta\tilde{\boldsymbol{P}} = \biguplus_{e=1}^{numel} \Delta\tilde{\boldsymbol{P}}^e. \tag{119}$$

Mit dem Vektor aller Knotenverschiebungsinkremente

$$\Delta\boldsymbol{U} = (\Delta U_1^1 \ldots \Delta U_1^{nk}\, \Delta U_2^1 \ldots \Delta U_2^{nk}\, \Delta U_3^1 \ldots \Delta U_3^{nk})^T \tag{120}$$

lautet das nichtlineare FEM-Gleichungssystem für die Gesamtstruktur

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{U})\, \Delta\boldsymbol{U} = \Delta\tilde{\boldsymbol{P}}\,. \tag{121}$$

In

$$\boldsymbol{K}^e = \int\limits_{V_o^e} \left[\boldsymbol{B}^T \left(\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{E}} \right) \boldsymbol{B} + \bar{\boldsymbol{G}}^T \boldsymbol{T}^* \bar{\boldsymbol{G}} \right] dV_o^e = \boldsymbol{K}^e{}_{M0} + \boldsymbol{K}^e{}_{MN} + \boldsymbol{K}^e{}_T \tag{122}$$

verkörpern $\boldsymbol{K}^e{}_{M0}$ und $\boldsymbol{K}^e{}_{MN}$ den linearen und den nichtlinearen Anteil der materiellen Elementsteifigkeitsmatrix sowie $\boldsymbol{K}^e{}_T$ die geometrische Elementsteifigkeitsmatrix mit den folgenden Bildungsvorschriften (unter Berücksichtigung von (93)-(96)):

$$\boldsymbol{K}^e{}_{M0} = \int\limits_{V_o^e} \boldsymbol{B}_0^T \left(\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{E}} \right) \boldsymbol{B}_0\, dV_o^e \tag{123}$$

$$\boldsymbol{K}^e{}_{MN} = \int\limits_{V_o^e} \left[\boldsymbol{B}_0{}^T \left(\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{E}} \right) \boldsymbol{B}_N + \boldsymbol{B}_N^T \left(\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{E}} \right) \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_N^T \left(\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{E}} \right) \boldsymbol{B}_N \right] dV_o^e \tag{124}$$

$$\boldsymbol{K}^e{}_T = \int\limits_{V_o^e} \bar{\boldsymbol{G}}^T \boldsymbol{T}^* \bar{\boldsymbol{G}}\, dV_o^e\,. \tag{125}$$

Für kleine Deformationen sind $\boldsymbol{K}^e{}_{MN}$ und $\boldsymbol{K}^e{}_T$ gleich Null.

Bei der numerischen Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix wird das Integral (122) über das Elementvolumen näherungsweise durch eine Gaußsche Quadraturformel ersetzt:

$$\boldsymbol{K}^e \approx \sum_{j=1}^{ngp} \omega_j \left[\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{\xi}_j) \left(\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{E}} \right)_{\boldsymbol{\xi}_j} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}_j) + \bar{\boldsymbol{G}}^T(\boldsymbol{\xi}_j)\, \boldsymbol{T}^*\, \bar{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{\xi}_j) \right] \det\left(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\xi}} \right). \tag{126}$$

Darin bedeuten $\boldsymbol{\xi}_j$ die lokalen Koordinaten und ω_j die Wichtungsfaktoren der einzelnen Integrationsstützstellen. Außerdem ist die Transformation von Volumenintegralen zwischen dem realen Element und dem mittels lokaler Koordinaten dargestellten Referenzelement zu berücksichtigen.

$$dV(\boldsymbol{X}) = dX_1\, dX_2\, dX_3 = \det\left(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\xi}} \right) d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = \det\left(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\xi}} \right) dV(\boldsymbol{\xi})\,. \tag{127}$$

Analoge Beziehungen können auch für die Integrale der Oberflächen- und Volumenkräfte abgeleitet werden.

6 Kinematik finiter elastisch-plastischer Verzerrungen

Den Ausgangspunkt der kinematischen Betrachtungen zur Herleitung eines allgemeinen Stoffgesetzes für große elastisch-plastische Verformungen stellt der Deformationsgradient $\boldsymbol{F}$ mit

$$\boldsymbol{F} \;=\; F^i_I\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^I}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^i \tag{128}$$

dar [11]. Er bildet ein materielles, infinitesimales Linienelement d$\boldsymbol{X}$ von der Ausgangskonfiguration in die Momentankonfiguration ab und beschreibt damit die Streckungen und Drehungen, die dieses Linienelement während der Bewegung erfährt.

Bei elastisch-plastischer Deformation kann eine sogenannte Zwischenkonfiguration definiert werden, indem lokal eine fiktive elastische Entlastung der materiellen Teilchen vorgenommen wird [6]. Mit Hilfe dieser Konfiguration ist es möglich, eine konsequente Trennung von elastischen und plastischen Größen im Deformationsgesetz zu erreichen.

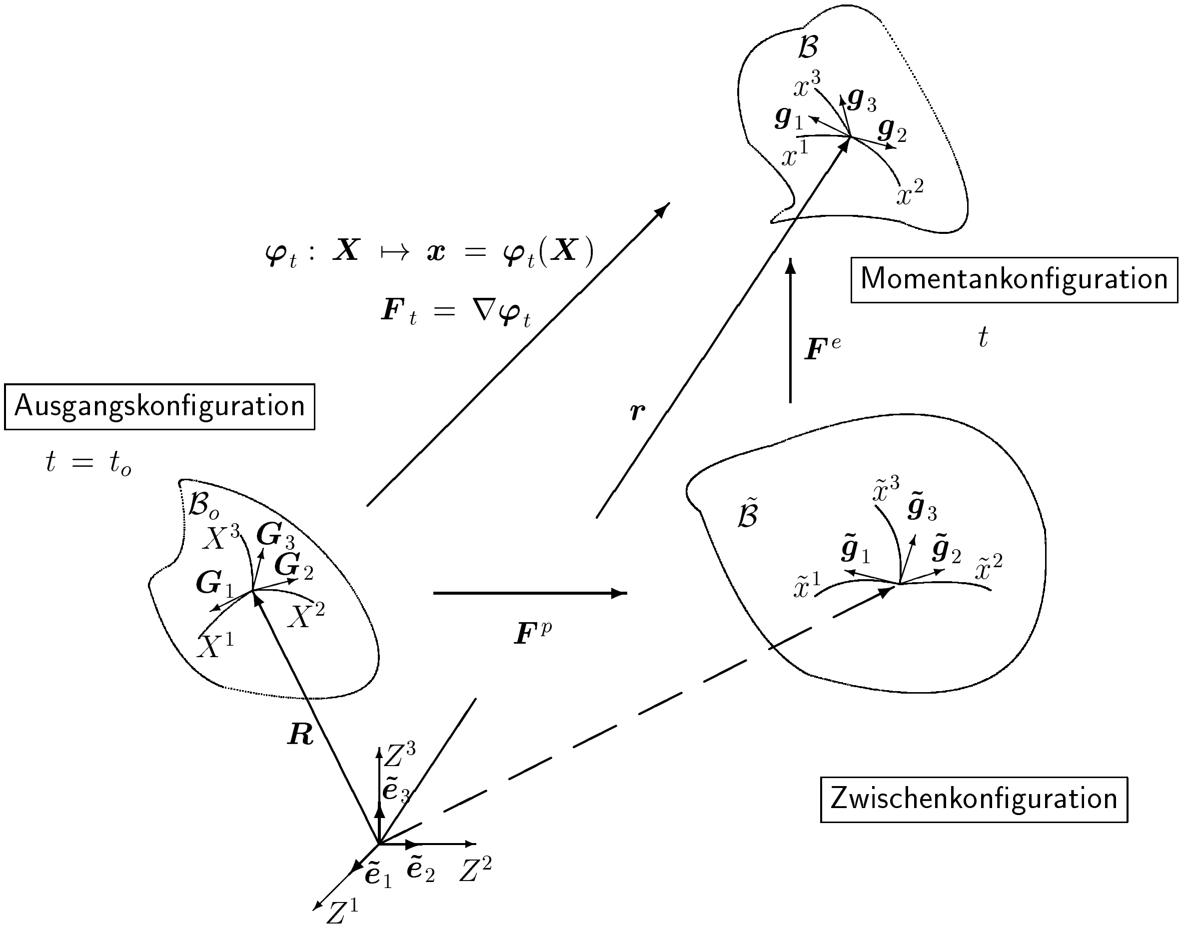

Figure 1: Ausgangs-, Zwischen- und Momentankonfiguration

Dazu wird die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen Anteil $\boldsymbol{F}^e$ und in einen plastischen Anteil $\boldsymbol{F}^p$ genutzt. Aus der angegebenen Definition der Zwischenkonfiguration wird deutlich, daß sie in der Regel nicht kompatibel ist.

Mit Hilfe des Deformationsgradienten bzw. seiner einzelnen Anteile ist es möglich, Tensoren zwischen den Konfigurationen abzubilden. Die folgenden Beziehungen zeigen dieses anhand des Greenschen Verzerrungstensors $\boldsymbol{E}^\flat$. Auf die Ausgangskonfiguration bezogene Größen werden jeweils mit Großbuchstaben gekennzeichnet, Tensoren der Zwischenkonfiguration sind mit einer Tilde versehen, während die zur Momentankonfiguration gehörenden Variablen durch Kleinbuchstaben charakterisiert sind. Gemischtvariante Tensoren werden lediglich durch ihr Symbol dargestellt, ko- und kontravariante Tensoren dagegen noch zusätzlich mit der hochgestellten Markierung $()^\flat$ bzw. $()^\sharp$.

$$\begin{aligned}
&& \boldsymbol{E}^\flat &= \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}^\flat - \boldsymbol{G}^\flat\right) &&= \boldsymbol{E}^{e\flat} + \boldsymbol{E}^{p\flat} &&= \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}^\flat - \boldsymbol{C}^{p\flat}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}^{p\flat} - \boldsymbol{G}^\flat\right)\\
\tilde{\boldsymbol{E}}^\flat &= & \boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^\flat\boldsymbol{F}^{p-1} &= \tfrac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{C}}^{e\flat} - \tilde{\boldsymbol{G}}^\flat\right) &&= \tilde{\boldsymbol{E}}^{e\flat} + \tilde{\boldsymbol{E}}^{p\flat} &&= \tfrac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{C}}^{e\flat} - \tilde{\boldsymbol{G}}^\flat\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{G}}^\flat - \tilde{\boldsymbol{c}}^{p\flat}\right)\\
\boldsymbol{e}^\flat &= & \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^\flat\boldsymbol{F}^{-1} &= \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{g}^\flat - \boldsymbol{c}^\flat\right) &&= \boldsymbol{e}^{e\flat} + \boldsymbol{e}^{p\flat} &&= \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{g}^\flat - \boldsymbol{c}^{e\flat}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{c}^{e\flat} - \boldsymbol{c}^\flat\right)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{G}^\flat$, $\tilde{\boldsymbol{G}}^\flat$ und $\boldsymbol{g}^\flat$ stellen die Metriktensoren in der Ausgangs-, Zwischen bzw. der Momentankonfiguration, $\boldsymbol{C}^\flat$, $\boldsymbol{C}^{p\flat}$, $\tilde{\boldsymbol{C}}^{e\flat}$, $\tilde{\boldsymbol{c}}^{p\flat}$, $\boldsymbol{c}^{e\flat}$ und $\boldsymbol{c}^\flat$ deren unterschiedliche Abbildungen in die verschiedenen Konfigurationen und $\boldsymbol{e}^\flat$ den Almansischen Verzerrungstensor dar.

7 Hauptsätze der Thermodynamik

Der Energieerhaltungssatz

$$\varrho\,\dot{\epsilon} = \boldsymbol{\sigma}^\sharp \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}^\flat - \operatorname{div}\boldsymbol{q} + \varrho\,h \tag{129}$$

und die Entropieungleichung

$$\varrho\,\dot{\eta} + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) - \varrho\frac{h}{\theta} \geq 0 \tag{130}$$

bilden die Grundlage einer physikalisch konsistenten Formulierung des Stoffgesetzes [4, 9]. Hierbei verkörpern ϱ die Dichte, $\boldsymbol{\sigma}^\sharp$ den Cauchyschen Spannungstensor und $\boldsymbol{d}^\flat$ die Deformationsgeschwindigkeit in der Momentankonfiguration. Weiterhin beschreiben die spezifischen Größen ϵ die innere Energie, η die Entropie, $\boldsymbol{q}$ den Wärmefluß und h die Wärmequellendichte. Die Variable θ steht für die absolute Temperatur.

Die Kombination der beiden oben genannten Beziehungen, verbunden mit der Definition der freien Helmholtz-Energie

$$\psi = \epsilon - \theta\eta \tag{131}$$

führt auf die Clausius-Duhem-Ungleichung

$$-\varrho\left(\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta\right) + \boldsymbol{\sigma}^{\sharp} \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}^{\flat} - \frac{1}{\theta}\,\boldsymbol{q} \cdot \operatorname{grad}\theta \geq 0\,. \tag{132}$$

Im isothermen Fall vereinfacht sich diese in der folgenden Art und Weise:

$$-\varrho\dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma}^{\sharp} \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}^{\flat} \geq 0\,. \tag{133}$$

8 Annahmen zur Herleitung des Deformationsgesetzes

Für die Formulierung des Deformationsgesetzes ist es notwendig, bestimmte Annahmen zu treffen, die sowohl physikalisch sinnvoller, als auch mathematisch praktischer Natur sein können.

8.1 Additive Zerlegung der Energiefunktion

Es wird festgelegt, daß die freie Helmholtz-Energie additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespalten werden kann. Bei der Formulierung der Energie in der Zwischenkonfiguration enthalten die beiden Anteile jeweils nur rein elastische bzw. rein plastische Größen. In der folgenden Darstellung steht $\tilde{\boldsymbol{a}}^{\flat}$ für eine beliebige, in der Zwischenkonfiguration definierte innere Variable.

$$\psi = \psi_e\left(\tilde{\boldsymbol{C}}^{e\flat}, \tilde{\boldsymbol{g}}^{\flat}\right) + \psi_p\left(\tilde{\boldsymbol{a}}^{\flat}\right) \tag{134}$$

8.2 Wahl der Konfiguration

Wichtig ist im weiteren die Auswahl der Konfiguration, in der das komplette Deformationsgesetz letztendlich verwendet werden soll. Im vorliegenden Fall wird es für ein FEM-Programm entwickelt, welches auf einer Total-Lagrangeschen Beschreibungsweise basiert. Damit steht fest, daß die endgültige Formulierung des Deformationsgesetzes ebenfalls in materieller Beschreibungsweise erfolgt.

8.3 Bildung von Tensorinvarianten

Für die Herleitung des Deformationsgesetzes ist es notwendig, Ansätze für bestimmte Funktionen ($\longrightarrow$ Fließfunktion, freie Helmholtz-Energie) aufzustellen. Diese Ansätze sollen dem Objektivitätsprinzip genügen. Daher bieten sich isotrope Tensorfunktionen an, die aus den Invarianten der Tensoren gebildet werden [2]. Hierbei ist allerdings folgende Eigenschaft von Tensorinvarianten bei der Abbildung in andere Konfigurationen zu beachten:

$$J_1\left(\boldsymbol{A}^\flat\right) = \boldsymbol{A}^\flat \cdot\cdot\, \boldsymbol{G}^\sharp = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{a}^\flat\,\boldsymbol{F} \cdot\cdot\, \boldsymbol{F}^{-1}\,\boldsymbol{b}^\sharp\,\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} = \boldsymbol{a}^\flat \cdot\cdot\, \boldsymbol{b}^\sharp \neq \boldsymbol{a}^\flat \cdot\cdot\, \boldsymbol{g}^\sharp\,. \tag{135}$$

Die dargestellte Abbildung der ersten Invariante des Tensors $\boldsymbol{A}^\flat$ von der Ausgangs- in die Momentankonfiguration erhält zwar deren invarianten Charakter, führt jedoch zu einer Bildungsvorschrift, die von der Verwendung der jeweiligen Konfigurationsmetrik abweicht. Deshalb sollte gründlich überlegt werden, welche Konfiguration für die Formulierung der Invarianten zu bevorzugen ist. Im vorliegenden Fall werden die Invarianten für die in der Fließbedingung auftretenden unabhängigen Variablen in der Momentankonfiguration gebildet. Der Grund für diese Vorgehensweise liegt in der physikalisch sinnvollen Definition des hydrostatischen Spannungszustandes, der das plastische Fließen nicht beeinflußt. Das bedeutet, daß die Fließbedingung nur mit Spannungsgrößen gebildet wird, von denen der hydrostatische Spannungsanteil abgespalten wurde ($\longrightarrow$ Deviatoren). Genau dieser hydrostatische Anteil wird durch die erste Spannungsinvariante in der Momentankonfiguration dargestellt. Das heißt, daß bei Verwendung von anderen Invarianten als denen der Momentankonfiguration der hydrostatische Spannungszustand nicht korrekt widergespiegelt wird.

Beim Formulieren der freien Energiedichte wird im Gegensatz dazu die Ausgangskonfiguration für die Bildung der Invarianten für die zum Spannungstensor arbeitskonjugierten Verzerrungen herangezogen. Diese Vorgehensweise liegt darin begründet, daß Invarianten für den zum 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor arbeitskonjugierten rechten Cauchy-Green-Tensor nur in der Ausgangskonfiguration gebildet werden können und alle kinematischen Variablen gleich behandelt werden.

8.4 Kovarianzprinzip

Weiterhin wird verlangt, daß sich die Struktur des Deformationsgesetzes gegenüber Abbildungen in beliebige andere Konfigurationen nicht ändern soll [10]. Diese Forderung führt in ihrer Konsequenz auf die Verwendung von Lie-Ableitungen, die das push-forward der materiellen Zeitableitung eines Tensors von der Ausgangs- in eine andere Konfiguration realisieren.

Für die Definition der zeitlichen Änderung der freien Helmholtz-Energie soll das im folgenden verdeutlicht werden. Die Variable $\boldsymbol{A}^\flat$ stellt wiederum eine beliebige innere Variable dar, $\Phi^p_\star$ bzw. $\Phi_\star$ charakterisieren die push-forward-Operation, d.h. die Abbildung von Tensoren der Ausgangskonfiguration in die Zwischen- bzw. Momentankonfiguration.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Ausgangskonfiguration:} & \psi & = & \psi\left(\boldsymbol{C}^\flat, \boldsymbol{C}^{p\flat}, \boldsymbol{A}^\flat\right) \\
\text{Zwischenkonfiguration:} & \psi & = & \psi\left(\Phi^p{}_\star\left(\boldsymbol{C}^\flat\right), \Phi^p{}_\star\left(\boldsymbol{C}^{p\flat}\right), \Phi^p{}_\star\left(\boldsymbol{A}^\flat\right)\right) = \psi\left(\tilde{\boldsymbol{C}}^{e\flat}, \tilde{\boldsymbol{g}}^\flat, \tilde{\boldsymbol{a}}^\flat\right) \\
\text{Momentankonfiguration:} & \psi & = & \psi\left(\Phi_\star\left(\boldsymbol{C}^\flat\right), \Phi_\star\left(\boldsymbol{C}^{p\flat}\right), \Phi_\star\left(\boldsymbol{A}^\flat\right)\right) = \psi\left(\boldsymbol{g}^\flat, \boldsymbol{c}^{e\flat}, \boldsymbol{a}^\flat\right)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \dot{\psi} \; &= \; \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}^\flat} \cdot\cdot\, \boldsymbol{C}^\flat + \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}^{p\flat}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{C}^{p\flat} + \frac{\partial \psi_p}{\partial \boldsymbol{A}^\flat} \cdot\cdot\, \boldsymbol{A}^\flat \; = \\
&= \; \frac{\partial \psi_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{C}}^{e\flat}} \cdot\cdot\, \mathcal{L}^p\left(\tilde{\boldsymbol{C}}^{e\flat}\right) + \frac{\partial \psi_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{g}}^\flat} \cdot\cdot\, \mathcal{L}^p\left(\tilde{\boldsymbol{g}}^\flat\right) + \frac{\partial \psi_p}{\partial \tilde{\boldsymbol{a}}^\flat} \cdot\cdot\, \mathcal{L}^p\left(\tilde{\boldsymbol{a}}^\flat\right)
\end{aligned}$$

8.5 Konzept der dualen Variablen

Eine weitere Annahme betrifft das Konzept der dualen Variablen [5], welches bei der Herleitung des Deformationsgesetzes angewendet werden soll.

Verzerrungen und deren zeitliche Ableitungen werden mit Hilfe der jeweils gleichen Abbildungstensoren $\boldsymbol{H}$ von der Ausgangskonfiguration in beliebige andere Konfigurationen abgebildet.

$$\hat{\boldsymbol{E}}^\flat = \boldsymbol{H}^{-\mathrm{T}}\, \boldsymbol{E}^\flat\, \boldsymbol{H}^{-1} \quad \text{und} \quad \overset{\triangle}{\hat{\boldsymbol{E}}^\flat} = \boldsymbol{H}^{-\mathrm{T}}\, \dot{\boldsymbol{E}}^\flat\, \boldsymbol{H}^{-1} \tag{136}$$

Mit der Invarianzeigenschaft der spezifischen Größen Formänderungsleistung, Ergänzungsleistung und inkrementelle Leistung können zugeordnete Spannungen und Spannungsgeschwindigkeiten definiert werden, was am Beispiel des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors verdeutlicht werden soll.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}^\sharp \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{E}}^\flat &= \hat{\boldsymbol{T}}^\sharp \cdot\cdot\, \overset{\triangle}{\hat{\boldsymbol{E}}^\flat} \\
\dot{\boldsymbol{T}}^\sharp \cdot\cdot\, \boldsymbol{E}^\flat &= \overset{\triangledown}{\hat{\boldsymbol{T}}^\sharp} \cdot\cdot\, \hat{\boldsymbol{E}}^\flat \\
\dot{\boldsymbol{T}}^\sharp \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{E}}^\flat &= \overset{\triangledown}{\hat{\boldsymbol{T}}^\sharp} \cdot\cdot\, \overset{\triangle}{\hat{\boldsymbol{E}}^\flat}
\end{aligned} \tag{137}$$

Es gilt damit

$$\hat{\boldsymbol{T}}^\sharp = \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{T}^\sharp\, \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \quad \text{und} \quad \overset{\triangledown}{\hat{\boldsymbol{T}}^\sharp} = \boldsymbol{H}\, \dot{\boldsymbol{T}}^\sharp\, \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}. \tag{138}$$

Die Befolgung dieses Prinzips schließt so z.B. die Anwendung der Jaumannschen Zeitableitung auf den Cauchyschen Spannungstensor aus.

9 Ein thermodynamisch konsistentes Deformationsgesetz

Nach diesen vorbereitenden Überlegungen kann die Herleitung des Deformationsgesetzes beginnen. Den Ausgangspunkt bildet die Clausius-Duhem-Ungleichung für den isothermen Fall in der Ausgangskonfiguration.

$$-\varrho_0 \dot{\psi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{T}^\sharp \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}^\flat \geq 0 \tag{139}$$

Für die freie Energiedichte soll gelten

$$\psi = \psi_e \left(\boldsymbol{C}^\flat - \boldsymbol{C}^{p\flat} \right) + \psi_p \left(\boldsymbol{A}_1^\flat \right) = \psi_e \left(\boldsymbol{E}^{e\flat} \right) + \psi_p \left(\boldsymbol{A}_1^\flat \right) . \tag{140}$$

Beim Einsetzen der Zeitableitung von (140) in (139) wird folgender Ausdruck erhalten:

$$-\varrho_0 \left\{ \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{E}^{e\flat}} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{E}}^{e\flat} + \frac{\partial \psi_p}{\partial \boldsymbol{A}_1^\flat} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{A}}_1^\flat \right\} + \boldsymbol{T}^\sharp \cdot\cdot \left(\dot{\boldsymbol{E}}^{e\flat} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{C}}^{p\flat} \right) \geq 0 . \tag{141}$$

Es ist möglich, ein hyperelastisches Deformationsgesetz aus der Ungleichung (141) abzuspalten.

$$\boldsymbol{T}^\sharp = \varrho_0 \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{E}^{e\flat}} \tag{142}$$

Die verbleibenden Terme bilden die Dissipationsungleichung:

$$\mathcal{D}^p = -\varrho_0 \left\{ \frac{\partial \psi_p}{\partial \boldsymbol{A}_1^\flat} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{A}}_1^\flat \right\} + \frac{1}{2} \boldsymbol{T}^\sharp \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}^{p\flat} \geq 0 . \tag{143}$$

Mit weiteren konstitutiven Annahmen

$$\boldsymbol{\alpha}^\sharp = \varrho_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial \boldsymbol{A}_1^\flat} = \frac{\partial \left(c J_2 \left(\boldsymbol{A}_1^\flat \right) \right)}{\partial \boldsymbol{A}_1^\flat} = c\, \boldsymbol{G}^\sharp \boldsymbol{A}_1^\flat \boldsymbol{G}^\sharp \tag{144}$$

kann die Dissipationsungleichung auch geschrieben werden als

$$\mathcal{D}^p = -\boldsymbol{\alpha}^\sharp \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{A}}_1^\sharp + \frac{1}{2} \boldsymbol{T}^\sharp \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}^{p\flat} \;\rightarrow\; \max . \tag{145}$$

$\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ sei die zu $\boldsymbol{A}^\flat$ arbeitskonjugierte Variable in der Ausgangskonfiguration und soll den Rückspannungstensor darstellen.

Entsprechend dem Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation wird verlangt, daß die unbekannten Tensorvariablen so bestimmt werden müssen, daß die Ungleichung (143) einen maximalen Wert annimmt. Vorausgesetzt wird dabei die Erfüllung der Fließbedingung.

Damit ergibt sich ein Extremwertproblem mit Nebenbedingung in der folgenden Art:

$$\mathcal{F} \;=\; \mathcal{D}^p \left(\boldsymbol{\alpha}^\sharp, \boldsymbol{T}^\sharp\right) \;-\; \lambda F \left(\boldsymbol{\alpha}^\sharp, \boldsymbol{T}^\sharp\right) \tag{146}$$

$$\mathcal{F} \quad \rightarrow \quad \max \tag{147}$$

Als Fließbedingung wird ein für große Deformationen modifizierter Ansatz nach Baltov-Sawczuk [1] verwendet, mit dem es möglich ist, sowohl isotrope und kinematische als auch Distorsionsverfestigung zu berücksichtigen. Die Fließbedingung wird in der Momentankonfiguration formuliert und anschließend in die Ausgangskonfiguration zurückgezogen. Der vierstufige Tensor $\underset{\mathbf{4}}{\boldsymbol{K}}^\flat$ dient der Beschreibung von Anfangsanisotropien bzw. einer Distorsionsverfestigung.

$$F \;=\; \left(\grave{\boldsymbol{T}}^\sharp \;-\; \grave{\boldsymbol{\alpha}}^\sharp\right) \cdot\cdot\; \underset{\mathbf{4}}{\boldsymbol{K}}^\flat \;\cdot\cdot\; \left(\grave{\boldsymbol{T}}^\sharp \;-\; \grave{\boldsymbol{\alpha}}^\sharp\right) \;-\; \frac{2}{3} T_F^2 \;=\; 0 \tag{148}$$

$$\text{mit} \quad \grave{\boldsymbol{T}}^\sharp \;=\; \boldsymbol{T}^\sharp \;-\; \frac{1}{3} \left(\boldsymbol{T}^\sharp \cdot\cdot\, \boldsymbol{C}^\flat\right) \boldsymbol{B}^\sharp \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B}^\sharp \;=\; \left(\boldsymbol{C}^\flat\right)^{-1} \tag{149}$$

Das Extremwertproblem wird gelöst, indem die Ableitungen von (146) nach den unbekannten Tensorvariablen $\boldsymbol{T}^\sharp$, $\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ und dem Lagrangeschen Multiplikator λ gleich Null gesetzt werden. Diese Vorgehensweise in Verbindung mit der inkrementellen Formulierung des hyperelastischen Materialgesetzes liefert ein Algebro-Differentialgleichungssystem, dessen Lösung u.a. die (146) maximierenden Spannungen und Rückspannungen sind.

$$\dot{\boldsymbol{T}}^\sharp \;=\; \frac{\partial^2 \left(\bar{\psi}_e\right)}{\partial \boldsymbol{E}^{e\flat} \partial \boldsymbol{E}^{e\flat}} \cdot\cdot\, \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{C}}^\flat - \frac{\partial^2 \left(\bar{\psi}_e\right)}{\partial \boldsymbol{E}^{e\flat} \boldsymbol{E}^{e\flat}} \cdot\cdot\, \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{C}}^{p\flat} \tag{150}$$

$$\dot{\boldsymbol{C}}^{p\flat} \;=\; 2\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp} \tag{151}$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}_1^\flat \;=\; -\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}^\sharp} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}^\sharp \;=\; c\, \boldsymbol{G}^\sharp \left(-\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}^\sharp}\right) \boldsymbol{G}^\sharp \tag{152}$$

$$\dot{E}_v^p \;=\; \lambda \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{B}^\sharp \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B}^\sharp \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^\sharp}} \tag{153}$$

$$F \;=\; \left(\grave{\boldsymbol{T}}^\sharp \;-\; \grave{\boldsymbol{\alpha}}^\sharp\right) \cdot\cdot\; \underset{\mathbf{4}}{\boldsymbol{K}}^\flat \;\cdot\cdot\; \left(\grave{\boldsymbol{T}}^\sharp \;-\; \grave{\boldsymbol{\alpha}}^\sharp\right) \;-\; \frac{2}{3} T_F^2 \;=\; 0 \tag{154}$$

Die Gleichung (153)[2] für die plastische Bogenlänge wird dem System hinzugefügt, da z.B. die isotrope Verfestigung, charakterisiert durch die Entwicklung der Fließspannung, von E_v^p abhängt. Deshalb ist eine Entwicklungsgleichung für E_v^p notwendig.

Nach dem Übergang von mathematischen auf physikalische Tensorkoordinaten kann im

[2] (153) entsteht aus $\dot{E}_v^p = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{B}^\sharp \dot{\boldsymbol{E}}^{p\flat} \cdot\cdot \boldsymbol{B}^\sharp \dot{\boldsymbol{E}}^{p\flat}}$ unter Berücksichtigung von (151).

weiteren für beliebig orthogonale krummlinige Koordinatensysteme, wie sie in der FEM Verwendung finden, auf die Kennzeichnung ko- und kontravarianter Tensoren verzichtet werden. Damit kann das Algebro-Differentialgleichungssystem (150-154) wie folgt

$$\dot{\boldsymbol{T}} + \lambda \underset{4}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} - \frac{1}{2} \underset{4}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{0} \tag{155}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \lambda\, c \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} = \boldsymbol{0} \tag{156}$$

$$\dot{E}_v^p - \lambda \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{B} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot \boldsymbol{B} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}} = 0 \tag{157}$$

$$F = \left(\dot{\boldsymbol{T}} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}\right) \cdot\cdot \underset{4}{\boldsymbol{K}} \cdot\cdot \left(\dot{\boldsymbol{T}} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}\right) - \frac{2}{3} T_F^2(E_v^p) = 0 \tag{158}$$

bzw. in der verallgemeinerten Form

$$\dot{\boldsymbol{T}} + \lambda \underset{4}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} - \frac{1}{2} \underset{4}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{0} \tag{159}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \lambda\, \boldsymbol{Q}_1 (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0} \tag{160}$$

$$\dot{E}_v^p + \lambda\, Q_2 (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \tag{161}$$

$$F (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, E_v^p) = 0 \tag{162}$$

dargestellt werden.

10 Numerische Simulation

Einleitend soll erwähnt werden, daß bei der numerischen Umsetzung des Deformationsgesetzes die Koordinaten zweistufiger Tensoren als Vektoren und vierstufiger Tensoren als Matrizen verarbeitet werden.

Das Algebro-Differentialgleichungssystem (159)-(162) kann nur mit numerischen Verfahren gelöst werden. Zuerst erfolgt die Diskretisierung der Gleichungen (159)-(162) nach der Zeit unter Nutzung des folgenden numerischen Integrationsalgorithmus für eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = f(t, y) \tag{163}$$

$$y_{n+1} = y_n + (\alpha\, f_{n+1} + (1 - \alpha)\, f_n)\, \Delta t \tag{164}$$

mit

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \tag{165}$$

und

$$\alpha \in [0,1], \qquad \alpha = \begin{cases} 0.0 & : \text{ Euler vorwärts} \\ 1.0 & : \text{ Euler rückwärts} \\ 0.5 & : \text{ Crank-Nicolson (Trapezregel)} \end{cases} \tag{166}$$

Mit (163)-(165) folgt aus dem System (159)-(162)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_{n+1} - \boldsymbol{T}_n - \left[\alpha \frac{1}{2} \underset{4}{\boldsymbol{D}}_{n+1} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}_{n+1} + (1-\alpha) \frac{1}{2} \underset{4}{\boldsymbol{D}}_n \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}_n \right] \Delta t + & \\
+ \left[\alpha \lambda_{n+1} \underset{4}{\boldsymbol{D}}_{n+1} \cdot\cdot \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{n+1} + (1-\alpha) \lambda_n \underset{4}{\boldsymbol{D}}_n \cdot\cdot \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_n \right] \Delta t &= \boldsymbol{0} & (167) \\
\boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n + \left[\alpha \lambda_{n+1} \boldsymbol{Q}_{1_{n+1}} + (1-\alpha) \lambda_n \boldsymbol{Q}_{1_n} \right] \Delta t &= \boldsymbol{0} & (168) \\
E^p_{v_{n+1}} - E^p_{v_n} + \left[\alpha \lambda_{n+1} Q_{2_{n+1}} + (1-\alpha) \lambda_n Q_{2_n} \right] \Delta t &= \boldsymbol{0} & (169) \\
F(\boldsymbol{T}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}, E^p_{v_{n+1}}) &= 0\,. & (170)
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird $\dot{\boldsymbol{C}}_{n+1}$ nach Anwendung der Zeitdiskretisierung (164) durch

$$\dot{\boldsymbol{C}}_{n+1} = \frac{1}{\alpha \Delta t} \left[\Delta \boldsymbol{C}_{n+1} - (1-\alpha)\, \dot{\boldsymbol{C}}_n \Delta t \right] \tag{171}$$

ersetzt. Während α in den folgenden Iterationen beliebig ist, gilt für den 1. Schritt stets $\alpha = 1$. Damit entsteht das folgende nichtlineare System algebraischer Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_{n+1} - \boldsymbol{T}_n + \left[\alpha \lambda_{n+1} \underset{4}{\boldsymbol{D}}_{n+1} \cdot\cdot \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{n+1} + (1-\alpha) \lambda_n \underset{4}{\boldsymbol{D}}_n \cdot\cdot \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_n \right] \Delta t \;\; - & \\
- \left[\frac{1}{2} (1-\alpha) \left(\underset{4}{\boldsymbol{D}}_n - \underset{4}{\boldsymbol{D}}_{n+1} \right) \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}_n \right] \Delta t \; - \; \frac{1}{2} \underset{4}{\boldsymbol{D}}_{n+1} \cdot\cdot \Delta \boldsymbol{C}_{n+1} &= \boldsymbol{0} & (172) \\
\boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n + \left[\alpha \lambda_{n+1} \boldsymbol{Q}_{1_{n+1}} + (1-\alpha) \lambda_n \boldsymbol{Q}_{1_n} \right] \Delta t &= \boldsymbol{0} & (173) \\
E^p_{v_{n+1}} - E^p_{v_n} + \left[\alpha \lambda_{n+1} Q_{2_{n+1}} + (1-\alpha) \lambda_n Q_{2_n} \right] \Delta t &= \boldsymbol{0} & (174) \\
F(\boldsymbol{T}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}, E^p_{v_{n+1}}) &= 0\,. & (175)
\end{aligned}$$

Für die verkürzte Darstellung der weiteren Lösungsschritte wird ein Variablen-Vektor $\boldsymbol{z}$ eingeführt.

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, E^p_v, \lambda)^T \tag{176}$$

Ebenso wird ein Operator $\boldsymbol{G}$ definiert, der die linke Seite des Gleichungssystems (172)-(175) repräsentiert.

$$\boldsymbol{G} \left(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z}_{n+1}, \Delta \boldsymbol{C}_{n+1}, \dot{\boldsymbol{C}}_n \right) \tag{177}$$

Gesucht wird letztendlich der Variablen-Vektor für den Lastschritt $n+1$

$$\boldsymbol{z}_{n+1} \;=\; \left(\boldsymbol{T}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}, E^p_{v_{n+1}}, \lambda_{n+1}\right)^T \quad \text{als Lösung von} \quad \boldsymbol{G}_{n+1} \;=\; \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{z}_{n+1}\right) = \boldsymbol{0}\,. \tag{178}$$

Die Berechnung von $\boldsymbol{z}_{n+1}$ erfolgt mit Hilfe des Newtonverfahrens

$$\boldsymbol{z}^{i+1}_{n+1} \;=\; \boldsymbol{z}^{i}_{n+1} \;-\; \left(\nabla_{\boldsymbol{z}^i_{n+1}} \boldsymbol{G}\right)^{-1} \boldsymbol{G}^i_{n+1}\,, \tag{179}$$

wobei die Jakobi-Matrix $(\nabla_{\boldsymbol{z}}\, \boldsymbol{G})$ die Form

$$(\nabla_{\boldsymbol{z}}\, \boldsymbol{G}) = \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{1} + \alpha\lambda \underset{4}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{T}^2}\,\Delta t\right) & \alpha\lambda \underset{4}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{T}\,\partial \boldsymbol{\alpha}}\,\Delta t & \boldsymbol{0} & \alpha \underset{4}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\,\Delta t \\ \alpha\lambda \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{T}}\,\Delta t & \left(\boldsymbol{1} \;+\; \alpha\lambda \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\,\Delta t\right) & \boldsymbol{0} & \alpha \boldsymbol{Q}_1\,\Delta t \\ \alpha\lambda \dfrac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{T}}\,\Delta t & \alpha\lambda \dfrac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\,\Delta t & 1 & \alpha Q_2\,\Delta t \\ \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} & \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} & \dfrac{\partial F}{\partial E^p_v} & 0 \end{pmatrix} \tag{180}$$

annimmt. Das Newtonverfahren (179) führt mit $\Delta\boldsymbol{z}^{i+1}_{n+1} \;=\; \boldsymbol{z}^{i+1}_{n+1} - \boldsymbol{z}^{i}_{n+1}$ auf das lineare Gleichungssystem

$$\left(\nabla_{\boldsymbol{z}^i_{n+1}} \boldsymbol{G}\right) \Delta\boldsymbol{z}^{i+1}_{n+1} \;=\; -\,\boldsymbol{G}^i_{n+1}\,, \tag{181}$$

das mittels eines direkten Verfahrens nach Gauß gelöst wird.

Wie im 4. Abschnitt gezeigt wurde, erfordert die Lösung des Steifigkeitssystems der FEM basierend auf der Geschwindigkeitsformulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit (65) in jeder Gleichgewichtsiteration die Bildung der konsistenten Materialmatrix $d\boldsymbol{T}/d\boldsymbol{E}$. Ein bedeutender Vorteil des vorgestellten Verfahrens zur numerischen Integration des Deformationsgesetzes besteht in der ihm innewohnenden einfachen algorithmischen Möglichkeit der Ermittlung der konsistenten Materialmatrix. Zu diesem Zweck wird das ausiterierte nichtlineare Gleichungssystem (178) nach dem Tensor der Gesamtverzerrungen implizit differenziert

$$\frac{d\,\boldsymbol{G}}{d\,\boldsymbol{E}_{n+1}} \;=\; \frac{\partial\,\boldsymbol{G}}{\partial\,\boldsymbol{E}_{n+1}} \;+\; \left(\nabla_{\boldsymbol{z}_{n+1}} \boldsymbol{G}\right) \frac{d\,\boldsymbol{z}_{n+1}}{d\,\boldsymbol{E}_{n+1}} \;=\; \boldsymbol{0}\,. \tag{182}$$

Nach Umstellung repräsentiert (182) wiederum ein System linearer algebraischer Gleichungen

$$\left(\nabla_{\boldsymbol{z}_{n+1}} \boldsymbol{G}\right) \begin{pmatrix} \left.\dfrac{d\,\boldsymbol{T}}{d\,\boldsymbol{E}}\right|_{n+1} \\ \left.\dfrac{d\,\boldsymbol{\alpha}}{d\,\boldsymbol{E}}\right|_{n+1} \\ \left.\dfrac{d\,E_v^p}{d\,\boldsymbol{E}}\right|_{n+1} \\ \left.\dfrac{d\,\lambda}{d\,\boldsymbol{E}}\right|_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\mathbf{4}}{\boldsymbol{D}}_{n+1} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{183}$$

mit der bekannten Jakobi-Matrix (180) und einer rechten Seite, welche neben Nullkomponenten die ebenfalls bereits bekannte hyperelastische Materialmatrix $\underset{\mathbf{4}}{\boldsymbol{D}}{}^j_{n+1}$ enthält. Unter Nutzung eines direkten Lösungsverfahrens kann die konsistente Materialmatrix durch Multiplikation der rechten Seite des Gleichungssystems (182) mit der invertierten Jakobi-Matrix effizient und mit der gleichen Genauigkeit wie die Integration des Deformationsgesetzes ermittelt werden.

11 Beispiele

Das beschriebene Deformationsgesetz wurde in ein FEM-Programm für Parallelrechner eingebaut. Im folgenden sollen einige Ergebnisse für zwei Beispiele vorgestellt werden. Zu bemerken ist, daß für kleine Deformationen die numerischen Resultate mit einem am Bereich vorhandenen FEM-Programm validiert wurden.

11.1 Gelochte Scheibe

Als erstes Beispiel wurde eine gelochte Scheibe für eine gleichverteilte Normalverschiebung am oberen Rand unter Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes (EVZ) betrachtet.

Die unterschiedlich eingefärbten Bereiche im Bild 2 kennzeichnen die Aufteilung des Gebietes auf die Prozessoren des Parallelrechners.

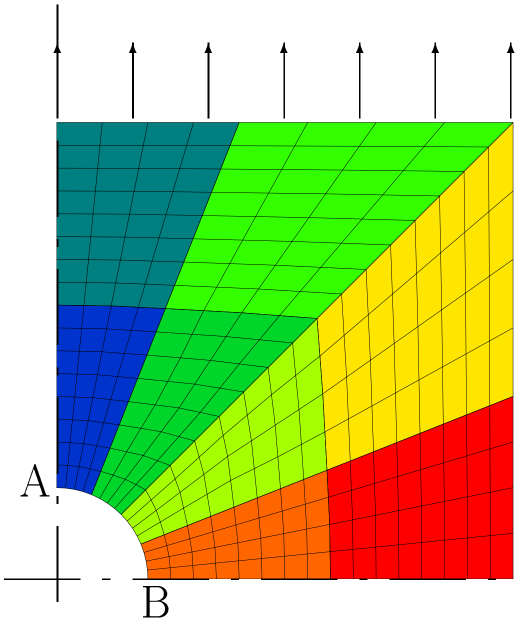

Figure 2: Gelochte Scheibe (ein Viertel des Querschnittes). Vernetzung und Richtung der Belastung

Die folgenden Abbildungen zeigen die Entwicklung der plastischen Bogenlänge bei zunehmender Verschiebung. Deutlich erkennbar ist, wie die Plastizierung ausgehend vom Punkt B fortschreitet und lediglich die Zone bei Punkt A elastisch bleibt. Die maximale plastische Bogenlänge beläuft sich bei 100% Verschiebung auf 110%.

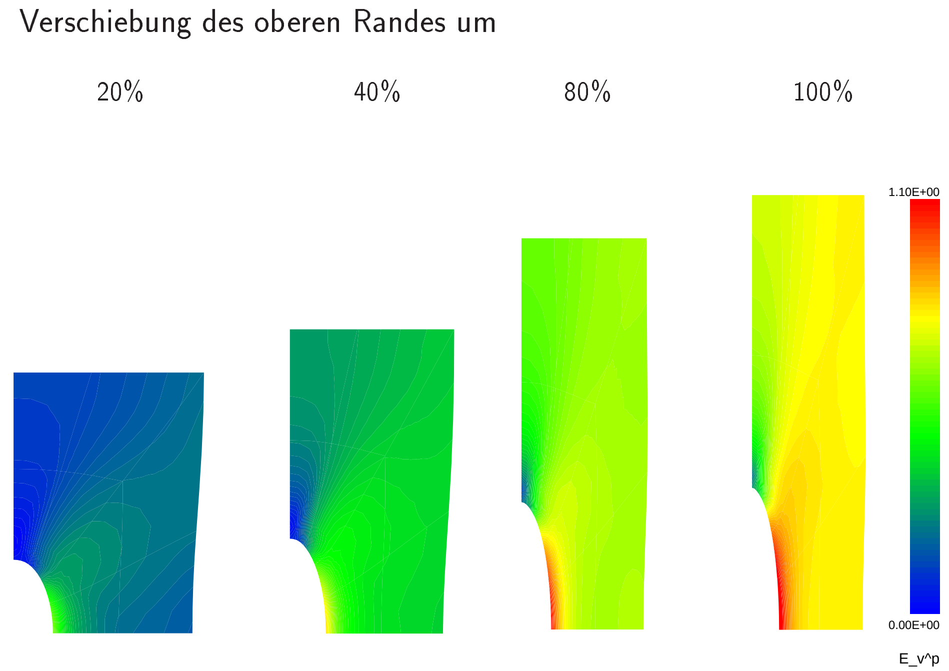

Figure 3: Gelochte Scheibe. Entwicklung der plastischen Bogenlänge (Darstellung der verformten Geometrie im Originalmaßstab)

11.2 Freies Stauchen

Das zweite Beispiel betrifft den Stauchversuch mit freien Seitenrändern und vollständiger Haftung an den belasteten Rändern im EVZ. Es wurde wiederum mit 8 Prozessoren gerechnet.

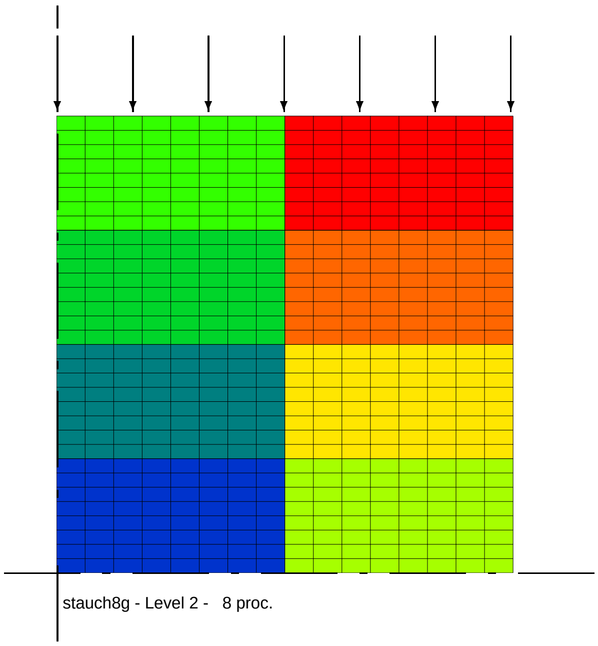

Figure 4: Freies Stauchen (ein Viertel des Querschnitts). Vernetzung und Richtung der Belastung

Die folgenden Abbildungen zeigen die Entwicklung der plastischen Bogenlänge bei einer Verschiebung des oberen Randes bis maximal 19% der Ausgangshöhe. Auch hier kann die Ausbildung der plastischen Zonen gut verfolgt werden. Sie entwickeln sich ausgehend von den Eckpunkten hin zur Mitte des Bauteils. Die erreichte maximale plastische Bogenlänge beträgt 67 %.

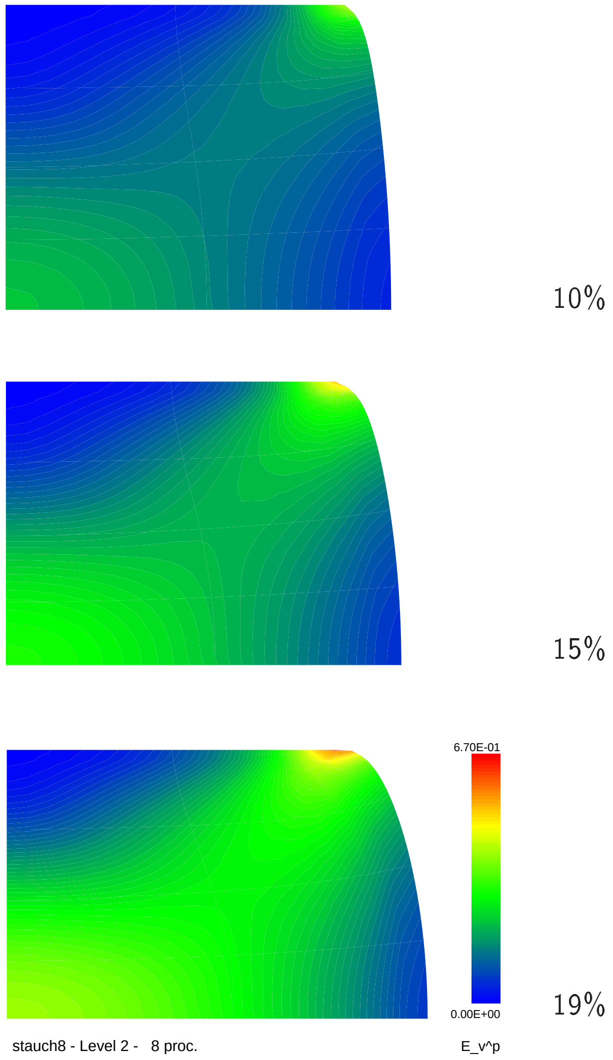

Figure 5: Freies Stauchen. Entwicklung der plastischen Vergleichsdehnung (Darstellung der verformten Geometrie im Originalmaßstab)

12 Zusammenfassung und Ausblick

Entsprechend der Aufgabenstellung wurde für ein Finite-Elemente-Programm eine Materialschnittstelle entwickelt, welche die Berücksichtigung von Deformationsgesetzen für große elastisch-plastische Verformungen in einer verallgemeinerten Formulierung ermöglicht. Auf der Basis dieses Programmes werden zukünftig Materialparameteridentifikationen durch Analyse inhomogener Verschiebungsfelder realisiert.

Bei der Herleitung wurde eine thermodynamisch konsistente Formulierung angestrebt. Dabei kamen u.a. das Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation, das Konzept der dualen Variablen wie auch das Kovarianzprinzip zur Anwendung. Im plastischen Anteil des Deformationsgesetzes können neben isotroper und kinematischer Verfestigung auch Anfangsanisotropien berücksichtigt werden. Der elastische Anteil beschreibt nichtlinear-hyperelastisches Materialverhalten.

Das Deformationsgesetz wurde als Algebro-Differentialgleichungssystem formuliert, dessen zeitdiskretisierte Form erfolgreich numerisch umgesetzt wurde.

Zwei Beispiele, an denen die Eignung des entwickelten Deformationsgesetzes zur Berechnung großer Verformungen gezeigt werden konnte, wurden präsentiert. Zukünftige Aufgaben sind die Einbeziehung einer unterliegenden Substruktur [3, 7] und die erfolgreiche numerische Umsetzung eines derartigen Deformationsgesetzes.

References

[1] Baltov, A., Sawczuk, A.; A rule of anisotropic hardening, *Acta Mechanica* **1**, 1965, 81-92.

[2] Boehler, J.P.; Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics, *Courses and Lectures*, Vol. 292, Springer Verlag, 1987.

[3] Dafalias, Y.F.; Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations, Part1: Kinematics, *Acta Mechanica* **69**, 1987, 119-138.

[4] Eringen, A.C.; *Mechanics of Continua*, John Wiley and Sons, New York 1967.

[5] Haupt, P., Tsakmakis, Ch.; On the application of dual variables in continuum mechanics, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* **1**, 1989, 165-196.

[6] Lee, E.H.; Elastic-plastic deformation at finite strains, *Journal of applied mechanics* **36**, 1969, 1-6.

[7] Mandel, J.; Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques, *Int. J. Solids and Structures* **9**, 1973, 725.

[8] D. Michael, M. Meisel, *Some remarks to large deformation elasto-plasticity (continuum formulation)*, TU Chemnitz-Zwickau, Preprint SFB393/98-28 (1998).

[9] Narasimhan, M.N.L.; *Principles of Continuum Mechanics*, John Wiley and Sons, New York 1993.

[10] Simo, J.C.; A framework for finite strain elastoplasticity based on the maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum Formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **66**, 1988, 199-219.

[11] Truesdell, C., Noll, W.; *The non-linear field theories of mechanics*, second ed., Springer Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 1992.

Other titles in the SFB393 series:

99-01 P. Kunkel, V. Mehrmann, W. Rath. Analysis and numerical solution of control problems in descriptor form. January 1999.

99-02 A. Meyer. Hierarchical preconditioners for higher order elements and applications in computational mechanics. January 1999.

99-03 T. Apel. Anisotropic finite elements: local estimates and applications (Habilitationsschrift). January 1999.

99-04 C. Villagonzalo, R. A. Römer, M. Schreiber. Thermoelectric transport properties in disordered systems near the Anderson transition. February 1999.

99-05 D. Michael. Notizen zu einer geometrisch motivierten Plastizitätstheorie. Februar 1999.

99-06 T. Apel, U. Reichel. SPC-PM Po 3D V 3.3, User's Manual. February 1999.

99-07 F. Tröltzsch, A. Unger. Fast solution of optimal control problems in the selective cooling of steel. March 1999.

99-08 W. Rehm, T. Ungerer (Eds.). Ausgewählte Beiträge zum 2. Workshop Cluster-Computing 25./26. März 1999, Universität Karlsruhe. März 1999.

99-09 M. Arav, D. Hershkowitz, V. Mehrmann, H. Schneider. The recursive inverse eigenvalue problem. March 1999.

99-10 T. Apel, S. Nicaise, J. Schöberl. Crouzeix-Raviart type finite elements on anisotropic meshes. May 1999.

99-11 M. Jung. Einige Klassen iterativer Auflösungsverfahren (Habilitationsschrift). Mai 1999.

99-12 V. Mehrmann, H. Xu. Numerical methods in control, from pole assignment via linear quadratic to H_∞ control. June 1999.

99-13 K. Bernert, A. Eppler. Two-stage testing of advanced dynamic subgrid-scale models for Large-Eddy Simulation on parallel computers. June 1999.

99-14 R. A. Römer, M. E. Raikh. The Aharonov-Bohm effect for an exciton. June 1999.

99-15 P. Benner, R. Byers, V. Mehrmann, H. Xu. Numerical computation of deflating subspaces of embedded Hamiltonian pencils. June 1999.

99-16 S. V. Nepomnyaschikh. Domain decomposition for isotropic and anisotropic elliptic problems. July 1999.

99-17 T. Stykel. On a criterion for asymptotic stability of differential-algebraic equations. August 1999.

99-18 U. Grimm, R. A. Römer, M. Schreiber, J. X. Zhong. Universal level-spacing statistics in quasiperiodic tight-binding models. August 1999.

99-19 R. A. Römer, M. Leadbeater, M. Schreiber. Numerical results for two interacting particles in a random environment. August 1999.

99-20 C. Villagonzalo, R. A. Römer, M. Schreiber. Transport Properties near the Anderson Transition. August 1999.

99-21 P. Cain, R. A. Römer, M. Schreiber. Phase diagram of the three-dimensional Anderson model of localization with random hopping. August 1999.

99-22 M. Bollhöfer, V. Mehrmann. A new approach to algebraic multilevel methods based on sparse approximate inverses. August 1999.

99-23 D. S. Watkins. Infinite eigenvalues and the QZ algorithm. September 1999.

99-24 V. Uski, R. A. Römer, B. Mehlig, M. Schreiber. Incipient localization in the Anderson model. August 1999.

99-25 A. Meyer. Projected PCGM for handling hanging in adaptive finite element procedures. September 1999.

99-26 F. Milde, R. A. Römer, M. Schreiber. Energy-level statistics at the metal-insulator transition in anisotropic system. September 1999.

99-27 F. Milde, R. A. Römer, M. Schreiber, V. Uski. Critical properties of the metal-insulator transition in anisotropic systems. October 1999.

99-28 M. Theß. Parallel multilevel preconditioners for thin shell problems. November 1999.

99-29 P. Biswas, P. Cain, R. A. Römer, M. Schreiber. Off-diagonal disorder in the Anderson model of localization. November 1999.

99-30 C. Mehl. Anti-triangular and anti-m-Hessenberg forms for Hermitian matrices and pencils. November 1999.

99-31 A. Barinka, T. Barsch, S. Dahlke, M. Konik. Some remarks for quadrature formulas for refinable functions and wavelets. November 1999.

99-32 H. Harbrecht, C. Perez, R. Schneider. Biorthogonal wavelet approximation for the coupling of FEM-BEM. November 1999.

99-33 C. Perez, R. Schneider. Wavelet Galerkin methods for boundary integral equations and the coupling with finite element methods. November 1999.

99-34 W. Dahmen, A. Kunoth, R. Schneider. Wavelet least squares methods for boundary value problems. November 1999.

99-35 S. I. Solovev. Convergence of the modified subspace iteration method for nonlinear eigenvalue problems. November 1999.

99-36 B. Heinrich, B. Nkemzi. The Fourier-finite-element method for the Lamé equations in axisymmetric domains. December 1999.

99-37 T. Apel, F. Milde, U. Reichel. SPC-PM Po 3D v 4.0 - Programmers Manual II. December 1999.

99-38 B. Nkemzi. Singularities in elasticity and their treatment with Fourier series. December 1999.

99-39 T. Penzl. Eigenvalue decay bounds for solutions of Lyapunov equations: The symmetric case. December 1999.

99-40 T. Penzl. Algorithms for model reduction of large dynamical systems. December 1999.

00-01 G. Kunert. Anisotropic mesh construction and error estimation in the finite element method. January 2000.

00-02 V. Mehrmann, D. Watkins. Structure-preserving methods for computing eigenpairs of large sparse skew-Hamiltonian/Hamiltonian pencils. January 2000.

00-03 X. W. Guan, U. Grimm, R. A. Römer, M. Schreiber. Integrable impurities for an open fermion chain. January 2000.

00-04 R. A. Römer, M. Schreiber, T. Vojta. Disorder and two-particle interaction in low-dimensional quantum systems. January 2000.

00-05 P. Benner, R. Byers, V. Mehrmann, H. Xu. A unified deflating subspace approach for classes of polynomial and rational matrix equations. January 2000.

00-06 M. Jung, S. Nicaise, J. Tabka. Some multilevel methods on graded meshes. February 2000.

00-07 H. Harbrecht, F. Paiva, C. Perez, R. Schneider. Multiscale Preconditioning for the Coupling of FEM-BEM. February 2000.

00-08 P. Kunkel, V. Mehrmann. Analysis of over- and underdetermined nonlinear differential-algebraic systems with application to nonlinear control problems. February 2000.

00-09 U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig, D. Michael. Ein Beitrag zur Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen einschließlich der Materialmodellierung bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen mit Hilfe der FEM. März 2000.

00-10 M. J. Martins, X.-W. Guan. Integrability of the D_n^2 vertex models with open boundary. March 2000.

00-11 T. Apel, S. Nicaise, J. Schöberl. A non-conforming finite element method with anisotropic mesh grading for the Stokes problem in domains with edges. March 2000.

00-12 B. Lins, P. Meade, C. Mehl, L. Rodman. Normal Matrices and Polar Decompositions in Indefinite Inner Products. March 2000.

00-13 C. Bourgeois. Two boundary element methods for the clamped plate. March 2000.

00-14 C. Bourgeois, R. Schneider. Biorthogonal wavelets for the direct integral formulation of the heat equation. March 2000.

00-15 A. Rathsfeld, R. Schneider. On a quadrature algorithm for the piecewise linear collocation applied to boundary integral equations. March 2000.

00-16 S. Meinel. Untersuchungen zu Druckiterationsverfahren für dichteveränderliche Strömungen mit niedriger Machzahl. März 2000.

00-17 M. Konstantinov, V. Mehrmann, P. Petkov. On Fractional Exponents in Perturbed Matrix Spectra of Defective Matrices. April 2000.

The complete list of current and former preprints is available via
`http://www.tu-chemnitz.de/sfb393/preprints.html`.