Technische Universität Chemnitz
Institut für Physik
Dr. H.-R. Berger

Wintersemester 2010/11
M0, 01.11.2010

Computergestützte Mechanik

1. Projekt

Abgabe: Montag, 06.12.2010

Schräger Wurf und Pendel

Hat man eine Differentialgleichung der Ordnung n gegeben, so scheitert man zumeist recht schnell an der analytischen Lösung derselben.

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Insbesondere wenn die Differentialgleichung inhomogen oder sogar eine nichtlineare Funktion von $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ ist, lässt sich in vielen Fällen keine analytische Lösung finden. Jedoch kann man eine solche gewöhnliche Differentialgleichung (engl. ordinary differential equation - ODE) n-ter Ordnung durch Einführung neuer Variablen ($y_1 = y', y_2 = y'', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$) recht einfach in eine System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung überführen.

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Diese lassen sich dann mit gängigen numerischen Verfahren wie *Euler*, *Velocity-Verlet* oder *Runge-Kutta* lösen. Dabei werden zumeist der aktuelle Zustand des Systems, sowie die Raten-Funktionen als Vektoren in den Algorithmen verarbeitet. Der Zustandsvektor (*state vector*) $\vec{s} = (x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ speichert dabei den jeweiligen Zustand am Ende eines Zeitschrittes oder temporär den Zustand des Systems an Stützstellen. Der Ratenvektor (*rate vector*) $\vec{r} = \frac{d\vec{s}}{dx} = (\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dx}, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_{n-1}}{dx})$ berechnet dabei den lokalen Anstieg in $\vec{s}$ und ist somit zustandsabhängig und wird ebenfalls zu jedem Zeitschritt oder an jeder Stützstelle berechnet.

1. Aufgabe

Beim schrägen Wurf mit Reibung kann man leicht mit Hilfe der Newtonschen Gesetze, die Bewegungsgleichungen aufstellen:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{m}\dot{y} = -g$$

a) Stellen Sie rate-vector $\vec{r}$ und state-vector $\vec{s}$ aus diesen Differentialgleichungen auf.

b) Nehmen Sie einen aus der Übung vorgestellten Algorithmen und vergleichen Sie die Flugbahn und Geschwindigkeiten mit der analytischen Lösung aus Übungsblatt 4 für verschiedene Zeitschrittweiten $\Delta t = (0.01, 0.1, 1)$. Wie verhält sich der relative Fehler in Abhängigkeit von der gewählten Zeitschrittweite?

c) Ermitteln Sie die numerisch die optimale Wurfgeschwindigkeit um ein in 1.2 m Höhe und 5 m Entfernung angebrachtes Ziel mit einem geraden Wurf ($\phi_0 = 0$) aus 1.6 m Höhe zu treffen.

d) Die Reibungskraft soll nun quadratisch von der Geschwindigkeit abhängen ($\vec{F}_r = -\gamma|\vec{v}|\vec{v}$). Vergleichen Sie die Flugbahn mit der der linearen Reibung. Was stellen Sie fest?

Die Anfangsbedingungen, sofern nicht anders in der Aufgabe angegeben, lauten:
$x(0) = y(0) = 0\,\mathrm{m}, \mathrm{v}_0 = 10\,\mathrm{m/s}, \phi_0 = 45°, \mathrm{m} = 1\,\mathrm{kg}, \gamma = 1\,\mathrm{kg/s}$

2. Aufgabe

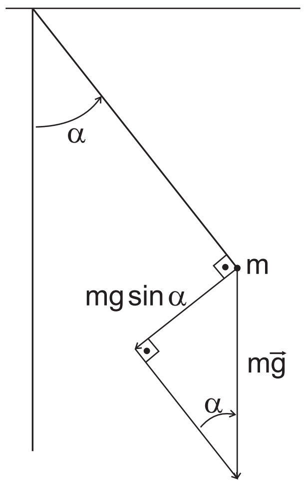

Abbildung 1: Pendel und wirkende Kräfte

Die tangential wirkende Rückstellkraft $F_R = -mg\sin\alpha$ verursacht eine Beschleunigung, $F_R = ma = ml\frac{d^2}{dt^2}\alpha = -mg\sin\alpha$.

a) Simulieren Sie die Bewegung des Pendels. Nehmen Sie dabei an, dass das Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ist.

b) Vereinfachen Sie das Gleichungssystem anhand der harmonischen Kleinwinkelnäherung $\sin\alpha = \alpha$. Lösen Sie das Gleichungssystem numerisch und analytisch. Vergleichen Sie mit Aufgabenteil (a).

c) Die Kleinwinkelnäherung beinhaltet nur den ersten nichtverschwindenden Term der Taylorentwicklung von $\sin\alpha$. Berechnen Sie den nächsten nichtverschwindenden Term und berücksichtigen Sie diesen in Ihrer Simulation.

d) Vergleichen Sie die Simulationen (a)-(c) für maximale Auslenkungen von 1°, 10° und 30°. Bis zu welchem Maximalausschlag ist die harmonische Näherung sinnvoll? Schauen Sie sich hierzu insbesondere die Periodendauer an.