Technische Universität Chemnitz
Institut für Physik
Dr. H.-R. Berger

Wintersemester 2010/11
M0, 01.11.2010

Computergestützte Mechanik

4. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 08.11.2010

Linienintegrale und Differentialgleichungen

11. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen im Schwerefeld der Erde $F = -mg$. Nehmen Sie an, dass die Reibung proportional zur Geschwindigkeit sei, also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}\Big|_{Reibung} = -\frac{\gamma}{m}\vec{v}$

a) Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für das Teilchen auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $v_x(0) = v_x^0$, $v_y(0) = v_y^0$, $x(0) = 0$ und $y(0) = 0$.

b) Stellen Sie die Bahngleichung $y(x)$ für das Teilchen auf.

c) Formulieren Sie die Bahngleichung mit den reduzierten Größen $x_r = \frac{xg}{v_0^2}$, $y_r = \frac{yg}{v_0^2}$ und $R^{-1} = \frac{gm}{\gamma v_0}$ und diskutieren Sie den Fall $R \to 0$. Benutzen Sie dabei $v_x^0 = v_0 \cos\varphi$ und $v_y^0 = v_0 \sin\varphi$.

d) Zeichnen Sie Bahngleichung für verschiedene R und φ.

12. Aufgabe (2 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a)

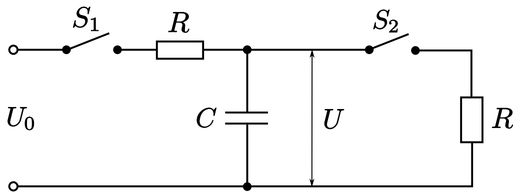
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x+y} \text{ mit } y(0) = 0$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{yx}{x^2+1} \text{ mit } y(0) = c \in \mathbb{R}$$

13. Aufgabe (4 Punkte)

Als ein einfaches physikalisches Beispiel soll hier die Entladung bzw. Aufladung eines Kondensators der Kapazität C über einen OHMschen Widerstand R untersucht werden.



Zu bestimmen ist jeweils der zeitliche Verlauf $U = U(t)$ der am Kondensator anliegenden Spannung. Sie hängt über die Beziehung $Q = C \cdot U$ mit der Ladung Q auf den Kondensatorplatten zusammen. Fließt bei geschlossenen Schalter ein Strom $I = I(t)$, so ist dies nach dem OHMschen Gesetz mit einem Spannungsabfall $U_R = R \cdot I$ am Widerstand R verbunden. Beim Aufladen ist $I = \dot{Q}$, beim Entladen $I = -\dot{Q}$.

a) Betrachten Sie zunächst nur den rechten Teil der Schaltung. Der Kondensator sei bereits auf die Spannung U_0 aufgeladen worden. Zur Zeit $t = 0$ werde der Schalter S_2 geschlossen, die Anfangsbedingung lautet also $U(t{=}\,0) = U_0$. Durch den Entladewiderstand R fließt nun der Strom

$$I = I(t) = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -C \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{U(t)}{R} \ .$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung 1. Ordnung für $U = U(t)$ unter der genannten Anfangsbedingung. Geben Sie auch $I = I(t)$ an. Skizzieren Sie die Funktionsverläufe.

b) Nach der vollständigen Entladung soll der Kondensator wieder aufgeladen werden. Dazu wird S_2 geöffnet und S_1 geschlossen. Nach der KIRCHHOFFschen Maschenregel ist stets $U_R + U(t) = U_0$, somit gilt für den Ladestrom

$$I(t) = \frac{U_0 - U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q(t)}{RC} \ .$$

Durch Differenzieren erhält man eine Differentialgleichung 1. Ordnung für $I = I(t)$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC} \cdot I(t) \ .$$

Lösen Sie diese unter der Anfangsbedingung $I(t = 0) = I_0$. Wie sieht der zeitliche Verlauf der Spannung $U = U(t)$ aus? Skizzieren Sie die Funktionsgraphen.