



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Vorlesung Theoretische Physik II – Mechanik

Wintersemester 2009/2010

Prof. Dr. Angela Thränhardt

18. März 2010

Dies ist eine erste Version eines Skripts zur Vorlesung „Theoretische Physik II – Mechanik“, die von mir im Wintersemester 2009/2010 an der Technischen Universität Chemnitz gehalten wurde. Wahrscheinlich sind trotz großer Bemühungen unsererseits noch zahlreiche Fehler enthalten. Wenn Sie einen solchen bemerken, teilen Sie mir dies doch bitte per E-Mail (angela.thraenhardt@physik.tu-chemnitz.de) mit – künftige Studentengenerationen werden davon profitieren.

Vielen Dank!

Angela Thränhardt

Inhaltsverzeichnis

1	Newtonsche Mechanik	6
1.1	Newtonschen Axiome	6
1.1.1	Newton II	6
1.1.2	Newton I	7
1.1.3	Newton III	8
1.1.4	Anwendung auf Drehbewegungen	8
1.2	Newtonsche Gesetze für Systeme von N Massenpunkten	9
1.3	Starrer Körper	13
1.3.1	Gesamtdrehimpuls und Trägheitstensor	14
1.3.2	Kontinuierlicher Körper	15
1.3.3	Satz von Steiner	16
1.4	Teilchen in Feldern	17
1.4.1	Arbeit	18
1.4.2	Konservative Kräfte	20
1.5	Energie	26
1.5.1	Systeme von Massenpunkten	26
1.6	Der harmonische Oszillator	28
2	Lagrange - Mechanik	32
2.1	Prinzipien von d'Alembert (virtuelle Arbeit) und Hamilton	32
2.1.1	Freiheitsgrade	32
2.1.2	Virtuelle Verrückungen und Zwangsbedingungen	34
2.1.3	Euler-Lagrange-Gleichungen	37
2.1.4	Hamiltonsches Prinzip	42
2.2	Generalisierter Impuls, Symmetrien und Erhaltungssätze und als Anwendung: Planetenbewegung und Streuung	50

2.2.1	Invarianzen	50
2.2.2	Anwendung: Das Zweikörperproblem	53
2.2.3	Variationsrechnung mit Nebenbedingungen	75
2.3	Bewegung starrer Körper - Trägheitstensor und Ähnlichkeitstransformation	80
2.3.1	Transformation physikalischer Größen beim Übergang zwischen Koordinatensystemen - Tensoren	81
2.3.2	Hauptachsentransformation	83
2.3.3	Hauptachsen und Symmetrie	86
2.3.4	Allgemeine Bewegung eines starren Körpers	90
2.3.5	Der Kreisel	93
2.3.6	Kräftefreier Kreisel ($\vec{M} = 0$)	96
2.3.7	Schwerer symmetrischer Kreisel $I_1 = I_2$	99
2.4	Beschleunigte Bezugssysteme	103
2.4.1	Lineare Beschleunigung	103
2.4.2	Rotation	105
3	Hamilton-Jakobi-Mechanik	114
3.1	Hamilton-Gleichung, Kanonische Transformation	114
3.1.1	Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen	114
3.1.2	Invarianz der Hamiltongleichung unter einer kanonischen Transformation	119
3.1.3	Kanonische Transformationen	121
3.1.4	Poissonklammern	127
3.2	Symmetrien und Erhaltungssätze	134
3.2.1	Infinitesimale kanonische Transformationen	134
3.2.2	Erhaltungsgrößen, Symmetrien und Invarianzen	136

3.2.3	Satz von Poincaré und Satz von Liouville	143
3.3	Hamilton-Jakobi-Theorie, periodische Bewegungen, Winkel- und Wirkungsvariable	149
3.3.1	Hamilton-Jakobi-Theorie	149
3.3.2	Periodische Bewegungen. Winkel- und Wirkungsvariable	155
4	Relativistische Mechanik freier Teilchen	162
4.1	Einführung in die Relativitätstheorie	162
4.1.1	Invarianz-Transformationen zwischen Koordinatensys- temen in der Physik	162
4.1.2	Axiome der Relativitätstheorie	165
4.1.3	Mathematische Grundlagen der Relativitätstheorie	167
4.1.4	Längenkontraktion und Zeitdilatation	172
4.1.5	Zeit-, raum- und lichtartige Vektoren	176
4.2	Relativistische Mechanik	180
4.3	Relativistische Lagrangefunktion für freie Teilchen	184
A	Rechenregeln für grad, div, rot, Δ	186
B	Differentialoperationen in krummlinigen orthogonalen Koor- dinaten	188
B.1	Allgemein	188
B.2	Zylinderkoordinaten	188
B.3	Kugelkoordinaten	189

Literatur

- W. Nolting
Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik
(Newtonsche Mechanik und mathematische Grundlagen)
Springer Verlag, Berlin, 8. Auflage, 12/2008
ISBN-10: 3540348328, ISBN-13: 978-3540348320
Preis: ca. 30,- EUR
- W. Nolting
Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik
(Hamilton - Lagrange)
Springer Verlag, Berlin, 7. Auflage, 09/2007
ISBN-10: 3540306609, ISBN-13: 978-3540306603
Preis: ca. 30,- EUR
- W. Nolting
Grundkurs Theoretische Physik 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik
Springer Verlag, Berlin, 7. aktualisierte Auflage, 12/2009
ISBN-10: 3642016030, ISBN-13: 978-3642016035
Preis: ca. 40,- EUR
- H. Goldstein
Klassische Mechanik Wiley-VCH, 3. überarbeitete Auflage, 07/2006
ISBN-10: 3527405895, ISBN-13: 978-3527405893
Preis: ca. 60,- EUR

- Landau / Lifshitz

Lehrbuch der theoretischen Physik I, Mechanik

(sehr knapp)

Deutsch (Harry), 14. Auflage, 12/1997

ISBN-10: 3817113269, ISBN-13: 978-3817113262

Preis: ca. 25,- EUR

- F. Kuypers

Klassische Mechanik

Wiley-VCH, 8. erweiterte Auflage, 03/2008

ISBN-10: 3527407219, ISBN-13: 978-3527407217

Preis: ca. 50,- EUR

u.v.a.

1 Newtonsche Mechanik

1.1 Newtonschen Axiome

Die drei Newtonschen Axiome lauten:

(aus principia mathematica philosophiae naturalis)

- I Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.
- II Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional und geschieht längs jener geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt.
- III Die Reaktion auf eine Aktion ist immer entgegengesetzt und gleich, d.h. die Aktionen (Kraftwirkungen) zweier Körper aufeinander sind immer gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

1.1.1 Newton II

Mathematisch formuliert lautet Newton II (für Massenpunkte)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad \text{Impuls} \quad (1.1)$$

konstante Masse:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \text{mit Beschleunigung} \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad (1.2)$$

1.1.2 Newton I

Newton I schreibt sich

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \dot{\vec{p}} = 0, \quad \vec{p} = \text{konst.} \quad (\text{Impulserhaltung}) \quad (1.3)$$

Beispiel: Block auf schiefer Ebene, stetige Vergrößerung des Neigungswinkels

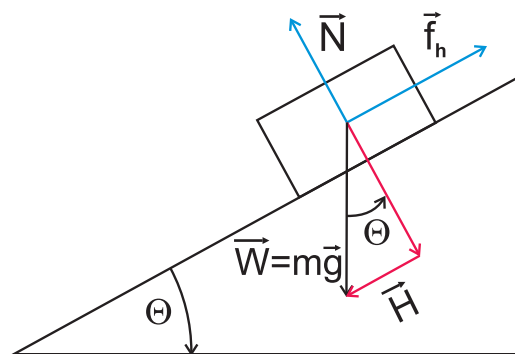


Abb. 1: $\Theta < \Theta_{krit}$ Block fest, keine Beschleunigung \Rightarrow keine Kraft

\perp zur schiefen Ebene gilt folgende Kraft:

\vec{N} = Normalkraft der Ebene auf Block, $\underline{N = W \cos \Theta}$

\parallel zur schiefen Ebene gilt die Kraft:

\vec{H} = Hangabtriebskraft, $H = W \sin \Theta = f_h = \text{Haftreibung}$

Erfahrung: Haftreibung kann nicht größer als ein kritischer Wert $\mu_h \cdot N$ werden

$$W \sin \Theta = f_h \leq \mu_h \cdot N = \mu_h \cdot W \cdot \cos \Theta \quad (1.4)$$

krit. Winkel: $H = W \sin \Theta_{krit} = f_{h,max} = \mu_h W \cos \Theta_{krit}$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_{krit} = \arctan \mu_h} \quad (1.5)$$

$\Theta > \Theta_{krit} \Rightarrow$ Gleiten, Gleitreibung $\mu_g < \mu_h$ (empirisch)

$$f_g = \mu_g \cdot N < f_h \quad (1.6)$$

$\Rightarrow H > f_g$, beschleunigte Bewegung

1.1.3 Newton III

Newton III wird gemeinhin mit Actio = Reactio zusammengefasst

Wahrnehmung: Wenn ich eine Kraft ausübe, erfahre ich eine Gegenkraft,

z.B. Tauziehen

$$\begin{array}{ccc} \vec{F}_{12} & = & -\vec{F}_{21} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Kraft von} & & \text{Kraft von} \\ 2 \text{ auf } 1 & & 1 \text{ auf } 2 \end{array} \quad (1.7)$$

Die sogenannte Starke Form $\vec{F}_{12} \parallel \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ des 3. Newtonschen Gesetzes gilt zum Beispiel für Gravitations- und Coulombkraft.

1.1.4 Anwendung auf Drehbewegungen

(Massenpunkt \vec{r})

$$\begin{aligned} \text{Drehmoment } \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) - \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=0, \text{ da parallel}} \quad (\vec{p} = m\vec{v}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

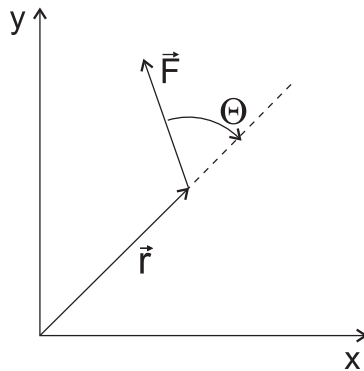


Abb. 2

Also Drehmoment $\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ mit Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

1.2 Newtonsche Gesetze für Systeme von N Massenpunkten

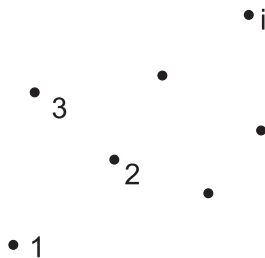


Abb. 3

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} &= \text{Kraft von } j \text{ auf } i \text{ (innere Kräfte)} \\ \vec{F}_i^{(a)} &= \text{äußere Kraft auf } i \end{aligned} \tag{1.9}$$

Also ist die Gesamtkraft auf Teilchen i :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{(a)} \stackrel{\text{Newton II}}{=} m_i \vec{a}_i = \frac{d^2}{dt^2} (m_i \vec{r}_i) \quad (1.10)$$

über alle i summieren:

$$\underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}}_{=0 \text{ wg } \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}} + \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(a)}}_{F^{(a)} = \text{Gesamtkraft}} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \quad (1.11)$$

Definition:

Schwerpunkt = Center of Mass (CM)

$$\text{Ortsvektor des Schwerpunktes } \vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (1.12)$$

mit der Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^N m_i$

Damit:

$$\boxed{F^{(a)} = M \ddot{R}} \quad (1.13)$$

d.h. der Schwerpunkt verhält sich wie ein Punktteilchen

Ausblick:

Starrer Körper kann wie Punktteilchen betrachtet werden, dessen Masse im Schwerpunkt konzentriert ist (ohne Rotationsbewegung, d.h. Kraft muss im Schwerpunkt angreifen).

Gesamtimpuls:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = M \frac{d\vec{R}}{dt} \quad (1.14)$$

d.h. aus (1.13) folgt sofort für $\vec{F}^{(a)} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{konst.}$

Drehimpuls und Drehmoment:

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} \vec{l} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \vec{m} &= \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{l}}{dt} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\boxed{\vec{m} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = 0} \quad \text{Drehimpulserhaltungssatz} \quad (1.16)$$

Bilanz aller Kräfte:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{(a)} = \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \dot{\vec{p}}_i \quad (1.17)$$

Schreibweise: Zeitableitungen werden mit einem Punkt gekennzeichnet.

Kreuzprodukt mit \vec{r}_i bilden:

$$\vec{r}_i \times \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{(a)} \right] = \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \quad (1.18)$$

\Rightarrow Summe über alle i :

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{(a)} \right] = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \quad (1.19)$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)}}_{M^{(a)} \text{ äußeres Drehmoment}} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \underbrace{(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)}_{\vec{l}_i} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{l}}_i \quad (1.20)$$

Nebenrechnung:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i}_{\equiv 0 \text{ da } \dot{\vec{r}}_i \parallel m_i \dot{\vec{r}}_i} \quad (1.21)$$

Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (1.22)$$

Beitrag der inneren Kräfte:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \stackrel{\text{symmetrisieren}}{=} \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \quad (1.23)$$

Hinreichend für das Verschwinden ist Newton III in starker Form, $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$

Dann gilt:

$$\boxed{\vec{M}^{(a)} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad (1.24)$$

d.h. der Drehimpulserhaltungssatz gilt nur, wenn Newton III in starker Form erfüllt ist, z.B. nicht für bewegte Ladungen \leftrightarrow E-Dynamik

1.3 Starrer Körper

Im starren Körper bleiben die Abstände zwischen einzelnen Teilchen \vec{r}_i konstant.

Mögliche Bewegung:

- Translation, alle Massenpunkte haben die gleiche Geschwindigkeit \vec{v}
- Rotation um eine Achse \hat{n} , alle Massenpunkte haben die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω

Betrachte die Rotation:

Charakterisiert durch normierte Drehachse \hat{n} , Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

\Rightarrow Definiere vektorielle Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ mit $\vec{\omega} \parallel \hat{n}$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

Man sieht die 3 Freiheitsgrade der Rotation $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, 3 Freiheitsgrade der Translation $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

\Rightarrow Ein starrer Körper hat 6 Freiheitsgrade

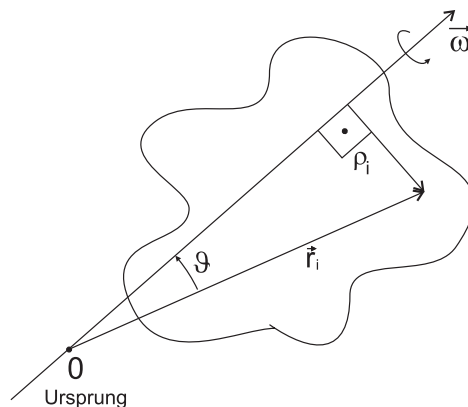


Abb. 4: Rotierender starrer Körper (Translation = 0). Es gilt: $v_i = \rho_i \omega = r_i \omega \sin \vartheta \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

1.3.1 Gesamtdrehimpuls und Trägheitstensor

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i \underbrace{m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{=r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i \text{ (s. Übung)}} \quad (1.25)$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i) = \vec{I} \vec{\omega} \quad (1.26)$$

\vec{I} = Trägheitstensor (auf Tensorbegriff wird später eingegangen, Merke: \vec{I} ist definiert dadurch, dass Gl. (1.26) stimmt)

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 \mathbf{1} - \vec{r}_i \vec{r}_i^t) \\ &= \sum_i m_i \underbrace{\begin{pmatrix} r_i^2 - x_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}}_{\text{reelle symmetrische Matrix}} \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$I_{\mu\nu} = \sum_i m_i [r_i^2 \delta_{\mu\nu} - r_{i\mu} r_{i\nu}] \quad \text{mit } \vec{r}_i = \begin{pmatrix} r_{i1} \\ r_{i2} \\ r_{i3} \end{pmatrix}$$

\vec{I} Tensor \Leftrightarrow i.a. \vec{L} nicht parallel zu $\vec{\omega}$

Vereinfachung: Trägheitsmoment bezüglich einer Rotationsachse $\hat{n} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$

$$\begin{aligned} I_n &= \hat{n}^t \cdot \vec{I} \cdot \hat{n} = \hat{n}^t \cdot \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 \hat{n} - (\vec{r}_i \cdot \hat{n}) \vec{n}_i) \\ &= \sum_i m_i \left(\vec{r}_i^2 \underbrace{\hat{n}^2}_1 - (\vec{r}_i \cdot \hat{n})^2 \right) \\ &= \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{n}_i)^2) = \sum_i m_i \rho_i^2 \end{aligned} \quad (1.28)$$

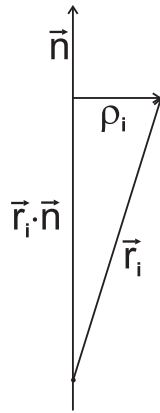


Abb. 5

zur Illustration: Spezialfall Drehachse = Symmetrieachse = z-Achse

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{I}\vec{\omega} \\ \Rightarrow L_j &= \sum I_{ij}\omega_j \end{aligned} \quad (1.29)$$

Deviationsmomente (nichtdiagonal) I_{31}, I_{32} :

$$-\sum_i m_i z_i y_i = \sum_i m_i z_i x_i = 0 \quad \text{für symm. Körper} \quad (1.30)$$

Also

$$\vec{L} = \vec{I}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\omega_3 \end{pmatrix} = I_{33}\vec{\omega}, \quad \vec{L} \ll \vec{\omega}, \quad I_{33} = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (1.31)$$

ρ = Abstand von z-Achse

Allgemein gilt $I_n = \sum_i m_i \rho_i^2$ für Drehungen um Symmetrieachsen

1.3.2 Kontinuierlicher Körper

(Aufteilen in kleine Volumenelemente mit Masse Δm_i)

$$I = \sum_i \rho_i^2 \Delta m_i = \int_{\text{Volumen des Körpers}} \rho^2 \mu dV \quad \text{mit } \mu = \frac{dm}{d\tau} \text{ Massendichte} \quad (1.32)$$

Annahme: homogener Körper, konstante Massendichte ($\mu = \text{konstant im Volumen, } \mu = 0 \text{ außerhalb}$)

$$I = \mu \int \rho^2 dV \quad (1.33)$$

z.B. Vollzylinder (Drehung um Symmetrieachse)

$$\begin{aligned} I &= \mu \int_{\text{Zylinder}} \rho^2 dV = \mu \cdot \underbrace{\int_0^h dz}_{h} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho^2 \\ &= 2\pi\mu h \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi\mu h \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^R = 2\pi\mu h \frac{R^4}{4} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Zylindervolumen $V = \pi R^2 h$, $\mu = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 h}$

$$\Rightarrow I = \frac{M}{2} R^2 \quad (1.35)$$

Trägheitstensor allgemein:

$$I_{\mu\nu} = \int dV \rho(\vec{r}) [r_\mu^2 \delta_{\mu\nu} - r_\mu r_\nu] \quad (1.36)$$

1.3.3 Satz von Steiner

Bekannt sei das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer durch den Schwerpunkt gehenden Achse I_S . Der Satz von Steiner erlaubt, ohne neuerliche Integration das Trägheitsmoment bezüglich jeder dazu parallelen Achse I_A zu berechnen.

Ein Körper rotiere um eine durch A gehende Achse. S sei eine dazu parallele, durch den Schwerpunkt gehende Achse. (Abbildung 6)

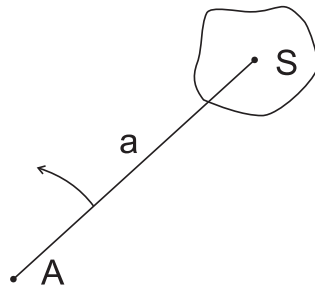


Abb. 6

1.4 Teilchen in Feldern

Das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ ordnet jedem Punkt des \mathbb{R}^3 eine Kraft zu, die auf ein Teilchen wirkt

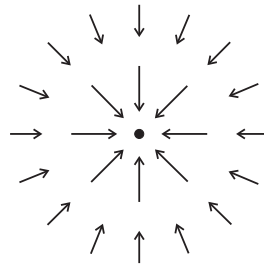


Abb. 7: Zentralfeld (Punktladung, Gravitation)

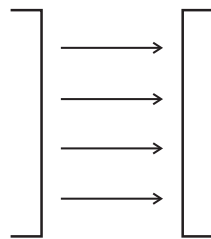


Abb. 8: Plattenkond., homogenes Feld

Für die Bewegung eines Körpers im Kraftfeld ist also Anstrengung vonnöten:

1.4.1 Arbeit

Arbeit für infinitesimale Verschiebung

$$\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.37)$$

Man schreibt δW statt dW , da δW kein totales Differential sein muß

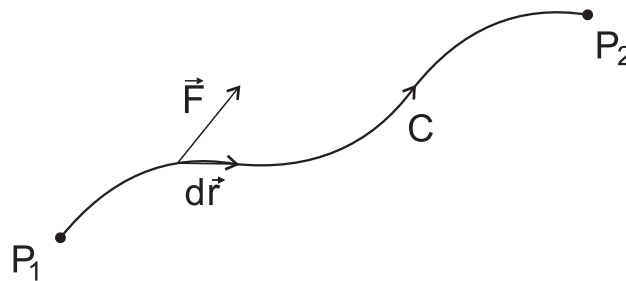


Abb. 9

$$W_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot d\vec{r} \quad (1.38)$$

Kurvenintegral, hängt im allgemeinen ab von:

1. Kraftfeld \vec{F}
2. Endpunkten P_1, P_2
3. Weg C
4. zeitlichem Bewegungsablauf

Auswertung von Kurvenintegralen = Rückführung auf gewöhnliche Riemann-Integrale durch Parametrisierung

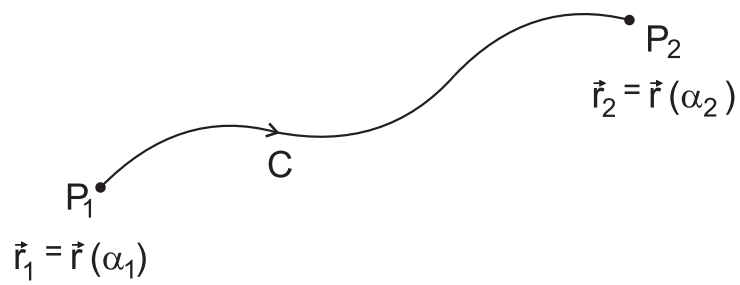


Abb. 10

$$C : \quad \vec{r} = \vec{r}(\alpha); \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}(\alpha)}{d\alpha} d\alpha$$

(1.39)

$$\text{Damit: } W_{21} = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \frac{d\vec{r}(\alpha)}{d\alpha} d\alpha$$

z.B. $\vec{F} = (2x_1^2 - 3x_2, 4x_2x_3, 3x_1^2x_3)$

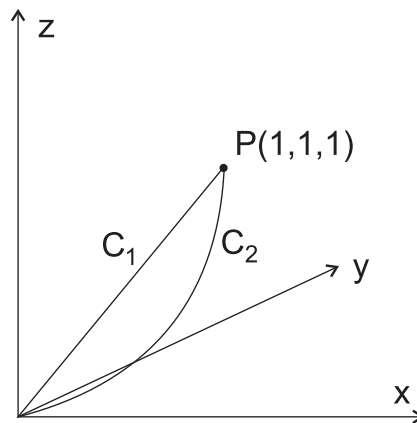


Abb. 11

2 Wege:

C_1 : Gerade $\vec{r}(\alpha) = (\alpha, \alpha, \alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$

C_2 : $\vec{r}(\alpha) = (\alpha, \alpha^2, \alpha^3)$, $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{r}}{d\alpha} &= \begin{cases} (1, 1, 1), & C_1 \\ (1, 2\alpha, 3\alpha^2), & C_2 \end{cases} \\
 \vec{F} &= \begin{cases} (2\alpha^2 - 3\alpha, 4\alpha^2, 3\alpha^3), & C_1 \\ (-\alpha^2, 4\alpha^5, 3\alpha^5), & C_2 \end{cases} \\
 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\alpha} &= \begin{cases} 3\alpha^3 + 6\alpha^2 - 3\alpha, & C_1 \\ 9\alpha^7 + 8\alpha^6 - \alpha^2, & C_2 \end{cases} \quad (1.40) \\
 W_{C_1} &= - \int_0^1 (3\alpha^3 + 6\alpha^2 - 3\alpha) d\alpha = -\frac{5}{4} \\
 W_{C_2} &= - \int_0^1 (9\alpha^7 + 8\alpha^6 - \alpha^2) d\alpha = -\frac{325}{168}
 \end{aligned}$$

d.h. die Arbeit ist wegabhängig!

1.4.2 Konservative Kräfte

Kräfte, für die man eine Funktion V finden kann, sodass $-\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}V(\vec{r})$, heißen konservativ.

Ausführen der Zeitableitung:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}V \quad (1.41) \\
 \text{d.h. } \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}V &= -\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}
 \end{aligned}$$

Eine Kraft ist dann konservativ, wenn sie sich als Gradient eines skalaren Potentials schreiben lässt (Krit. 1). D.h. \vec{F} darf weder von \vec{r} noch von t abhängen,

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}). \quad (\text{Krit. 1})$$

(Das negative Vorzeichen ist eine Konvention)

$$\text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}V(\vec{r}) = 0, \quad \text{s. Übung} \quad (1.42)$$

Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet hat eine Kraft \vec{F} genau dann ein Potenzial, wenn $\text{rot } \vec{F} = 0$, d.h. Bed. (Gleichung 1.42) ist auch hinreichend. (Krit. 2)

Integrales Kriterium:

$$\text{Es gilt } dV(\vec{r}) = \frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}dx_3 = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} \quad (1.43)$$

$$\Rightarrow \oint \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = \oint dV = V_{\text{Ende}} - V_{\text{Anfang}} = 0 \quad (1.44)$$

(Dabei ist \oint ein Kurvenintegral über einem geschlossenen Weg.)

Also ist \vec{F} genau dann konservativ, wenn $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ für alle möglichen geschlossenen Wege ist. (Krit. 3)

Eine konservative Kraft \vec{F} ist konservativ genau dann, wenn

- (1) sie sich als Gradient eines skalaren Potentials schreiben lässt, $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. Dazu darf die Kraft weder von $\dot{\vec{r}}$ noch von t abhängen.
- (2) auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet gilt: $\text{rot } \vec{F} = 0$
- (3) sie auf einem geschlossenen Weg keine Arbeit leistet, also $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ für alle möglichen geschlossenen Wege.

Betrachte Anfangs- und Endpunkt P_1, P_2 und 2 verschiedene Wege zwischen ihnen:

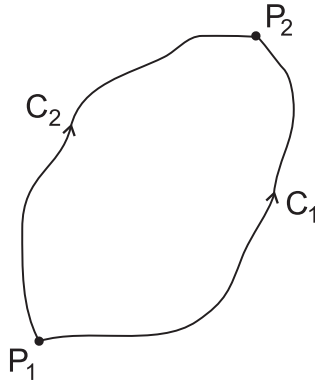


Abb. 12

Durchläuft man einen von ihnen rückwärts, so erhält man einen geschlossenen Weg.

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &\Rightarrow \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}
 \end{aligned}
 \tag{1.45}$$

Ein Kraftfeld ist damit genau dann konservativ, wenn die Arbeit beim Verschieben des Massenpunktes zwischen zwei Raumpunkten wegunabhängig ist.

D.h. wenn $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, kann man das Potenzial über einen rechnerisch günstigen Weg ermitteln!

$$V(P) = \int_{P_0}^P dV = - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.46)$$

Beispiel 1:

linearer harmonischer Oszillator

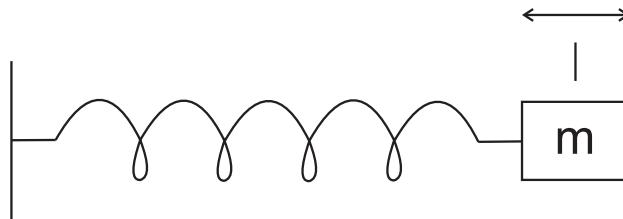


Abb. 13

$$F = -kx = ma = m\ddot{x} \quad (1.47)$$

$$\boxed{DGL \text{ des HO : } m\ddot{x} = -kx} \quad (1.48)$$

DGL 2. Ordnung \Rightarrow 2 unabhängige Lösungen, spezielle Lösung gegeben durch Anfangswerte von x , \dot{x}

Lösen der DGL durch Erraten:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{cases} \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (1.49)$$

Die spezielle Lösung ist dann eine Linearkombination

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) . \quad (1.50)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= 0 \\ \Rightarrow x(t=0) &= B = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= A = 0 \\ \Rightarrow x(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Alternativ lässt sich die allgemeine Lösung auch schreiben als

$$x(t) = C e^{i\omega_0 t} + k e^{-i\omega_0 t} \quad \text{mit } x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = 0 \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t=0) &= C + k = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= i\omega(C - k) = 0 \Rightarrow C = k = \frac{x_0}{2} \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{x_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = x_0 \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (1.53)$$

Oder auch

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \cos(\omega_0 t - \vartheta) \quad \text{mit } x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = 0 \\
 \Rightarrow x(t=0) &= a \cos(-\vartheta) = a \cos \vartheta = x_0 \\
 \dot{x}(t=0) &= -a\omega_0 \sin(-\vartheta) = a\omega_0 \sin \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, a = x_0 \\
 \Rightarrow x(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t)
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

d.h. die spezielle Lösung ist stets dieselbe.

Wichtig: Eine DGL n -ter Ordnung hat n unabhängige Lösungen.

Der harmonische Oszillator vollführt also cosinusförmige Schwingungen. Ein Potenzial läßt sich in $1k$ stets definieren, da jedes physikalische \vec{F} integrierbar ist. (Es gibt nur einen Weg \leftrightarrow „wegunabhängig“)

$$\text{HO: } F = -kx = \frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad W_{21} = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2) \tag{1.55}$$

Beispiel 2:

Dreidimensionaler harmonischer Oszillator (räumlich isotrop)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \quad (\text{s. Übung})$$

$\Rightarrow \vec{F}$ besitzt ein Potenzial

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}) &= - \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}' = k \int_0^{\vec{r}=(x,y,z)} (x'dx' + y'dy' + z'dz') \\
 &= k \int_0^x x'dx' + k \int_0^y y'dy' + k \int_0^z z'dz' = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{k}{2}r^2
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

1.5 Energie

Teilchen hat kin. und pot. Energie

kin. Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$

pot. Energie $V = V(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

In konservativen Kraftfeldern hängt die pot. Energie nur von \vec{r} ab, $V = V(\vec{r})$,
denn sie ist durch das Potenzial definiert.

(siehe z.B. $W_{21} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(2) - V(1)$)

d.h. Energie des Massenpunkts:

$$E = T(\dot{\vec{r}}) + V(\vec{r}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) \quad (1.57)$$

1.5.1 Systeme von Massenpunkten

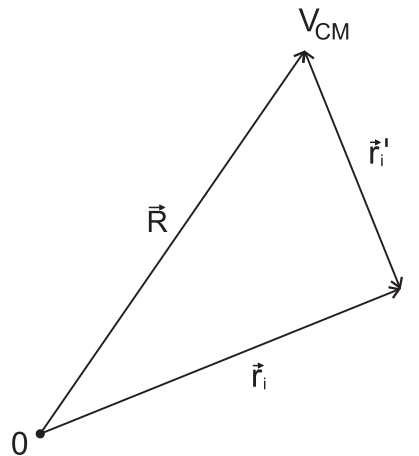


Abb. 14

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R} \Rightarrow \vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}_{CM} \quad (1.58)$$

kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}_{CM})^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{V}_{CM} \\
 \text{Es gilt } \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}_{M\vec{R}} &= \underbrace{\sum_i m_i \vec{R}}_{M\vec{R}} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i'}_0
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

Die Zeitableitung der 0-Funktion ist ebenfalls 0.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0 \\
 \Rightarrow &\boxed{T = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2}
 \end{aligned}$$

potenzielle Energie: Alle Kräfte seien konservativ, sodaß $V(\vec{r})$ existiert.

äußere Kräfte:

$$\vec{F}_i^{(a)}(\vec{r}_i) = -\frac{\partial V_i}{\partial \vec{r}_i} \Rightarrow V_i(\vec{r}_i) = -\int \vec{F}_i^{(a)}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i \tag{1.60}$$

innere Kräfte:

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{r}_i} = -\left(-\frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{r}_j}\right) = -\vec{F}_{ij} \quad (\text{Newton III}) \tag{1.61}$$

Dabei ist V_{ij} die pot. Energie zwischen i -tem und j -tem Teilchen.

Speziell: Wenn $V = V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ (Coulomb, Gravitation), dann gilt Newton III in starker Form.

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} = -\hat{r}_{ij} \frac{\partial V}{\partial r_{ij}} \tag{1.62}$$

(in Kugelkoordinaten, winkelabh. Ableitung = 0)

Die Gesamtenergie ist also

$$\begin{aligned}
 E &= T + V \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2}_T + \underbrace{\sum_i V_i}_{\text{äußeres Pot.}} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{ij} V_{ij}}_{\text{innere Kräfte}} \quad (1.63)
 \end{aligned}$$

1.6 Der harmonische Oszillator

Der eindimensionale harmonische Oszillator wurde bereits als Beispiel 1 in Abschnitt 1.4.2 diskutiert. In der Realität tritt jedoch immer auch Dämpfung auf.

Annahme: Es wirke noch eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft $-2\beta\dot{x}$.

DGL des gedämpften HO: $m\ddot{x} = -kx - 2\beta\dot{x}$, $\beta > 0$, $\omega_o^2 = \frac{k}{m} > 0$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad \text{mit } \alpha = \frac{\beta}{m} > 0$$

Ansatz $x(t) = e^{\gamma t}$ mit $\gamma \in \mathbb{C}$

(analog zu Lösung $e^{\pm i\omega_o t}$ im ungedämpften Fall)

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \gamma e^{\gamma t}, \quad \ddot{x}(t) = \gamma^2 e^{\gamma t}$$

Also: $(\gamma^2 + 2\gamma\alpha + \omega_o^2) e^{\gamma t} = 0$ für alle t

$$\Leftrightarrow \gamma^2 + 2\gamma\alpha + \omega_o^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$$

(1.64)

Fallunterscheidung:

(1) Schwache Dämpfung $\alpha < \omega_o$

$$\gamma_{\pm} = -\alpha \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}}_{\omega \in \mathbb{R}} = -\alpha \pm i\omega \quad (1.65)$$

Wir erhalten folgende allgemeine Lösung:

$$x(t) = Ae^{-\alpha t + i\omega t} + Be^{-\alpha t - i\omega t} \quad (1.66)$$

Die physikalische Lösung muss reell sein:

$$\begin{aligned} x(t) &= (Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t})e^{-\alpha t} \\ &= ae^{-\alpha t} \cos(\omega t - \vartheta) \quad \text{mit } A = \frac{a}{2}e^{-i\vartheta}, \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.67)$$

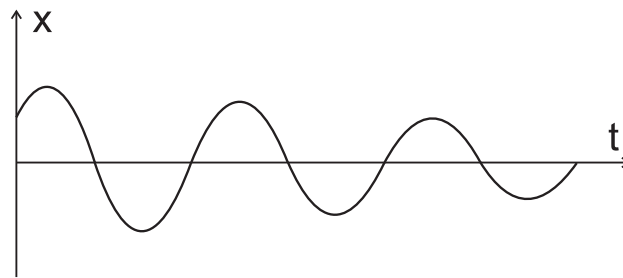


Abb. 15

Die Relaxationszeit $\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{m}{\beta}$ ist die Zeit, innerhalb derer das System auf $\frac{1}{e}$ abklingt.

(2) Starke Dämpfung $\alpha > \omega_o$

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm} &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} \in \mathbb{R} \quad \text{zwei reelle negative Lösungen} \\ x(t) &= ae^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2})t} + be^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2})t} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \\ \tau_{\pm} &= -\frac{1}{\gamma_{\pm}} \quad (\text{Relaxationszeiten}) \\ \Rightarrow x(t) &= ae^{-\frac{t}{\tau_+}} + be^{-\frac{t}{\tau_-}} \end{aligned} \quad (1.68)$$

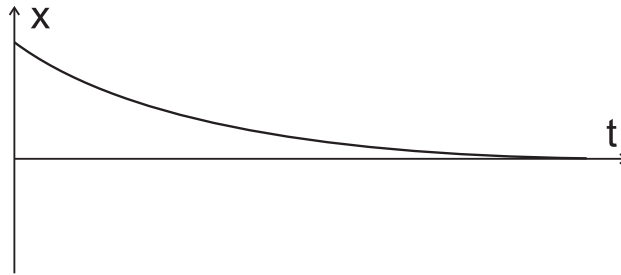


Abb. 16

Für große t bestimmt die größere Relaxationszeit τ_+ den exponentiellen Abfall (wenn $a \neq 0$).

(3) Aperiodischer Grenzfall $\alpha = \omega_o$

Die quadratische Gleichung (Gl. 1.64) liefert hier nur eine Lösung $\gamma = -\alpha$.

$$\Rightarrow x(t) = A e^{-\alpha t}$$

Variation der Konstanten (um eine zweite, linear unabhängige Lösung zu finden):

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t)e^{-\alpha t} \\ \dot{x}(t) &= (\dot{u}(t) - \alpha u(t)) e^{-\alpha t} \\ \ddot{x}(t) &= (\ddot{u}(t) - \alpha \dot{u}(t) - \alpha \dot{u}(t) + \alpha^2 u(t)) e^{-\alpha t} \\ &= (\ddot{u}(t) - 2\alpha \dot{u}(t) + \alpha^2 u(t)) e^{-\alpha t} \end{aligned} \quad (1.69)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_o^2 x = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left(\ddot{u} - \cancel{2\alpha \dot{u}} + \cancel{\alpha^2 u} + \cancel{2\alpha \dot{u}} - \cancel{2\alpha^2 u} + \cancel{\alpha^2 u} \right) e^{-\alpha t} = 0 \\ \Rightarrow & \ddot{u}(t) = 0 \Rightarrow u(t) = a + bt \end{aligned} \quad (1.70)$$

allgemeine Lösung: $x(t) = (a + bt)e^{-\alpha t}$

Für $t \gg \frac{1}{\alpha} = \tau$ ist der Faktor t unwichtig, die Lösung fällt sicher mit der Relaxationszeit $\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega_o}$ ab.

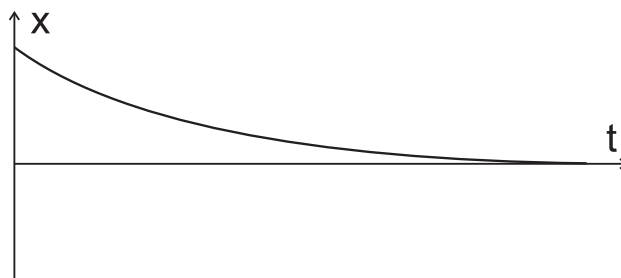


Abb. 17

Relaxationszeiten:

Schwache Dämpfung	$\alpha < \omega_o$	$\tau = \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\omega_o}$
Starke Dämpfung	$\alpha > \omega_o$	$\tau_+ = \frac{1}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}} > \frac{1}{\omega_o}$
Aperiodischer Grenzfall	$\alpha = \omega_o$	$\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega_o}$

D.h. bei gegebenem ω_o fällt die Lösung im aperiodischen Grenzfall schneller ab als bei starker oder schwacher Dämpfung.

2 Lagrange - Mechanik

2.1 Prinzipien von d'Alembert (virtuelle Arbeit) und Hamilton

2.1.1 Freiheitsgrade

Freiheitsgrade = unabhängige Koordinaten zur Beschreibung des Systems

Beispiele:

- N freie Teilchen im $\mathbb{R}^3 \Rightarrow 3N$ Freiheitsgrade
- 1 Teilchen auf einer Kurve $\Rightarrow 1$ Freiheitsgrad
(z.B. Bogenlänge auf der Kurve)
Zwangsbedingungen: $f_1(x, y, z) = c_1$ und $f_2(x, y, z) = c_2$, Kurve ist Schnitt dieser Ebenen
- Allg.: Zahl der Freiheitsgrade $n = 3N$ -Zahl der Zwangsbedingungen
- Starrer Körper: alle Abstände zwischen den Massenpunkten sind fest.

Abbildung 18 zeigt den Übergang von einem Teilchen auf einen starren Körper aus N Teilchen. Abbildung 19 zeigt ein zweidimensionales Pendel und seine Freiheitsgrade.

Die Zwangsbedingung wird durch die Zwangskraft aufrecht erhalten, hier beim Pendel durch Fadenspannung.

Erkenntnis: Die Zwangskraft ist senkrecht zur Bewegung, d.h. Zwangskräfte leisten keine Arbeit.

Ziel: Zwangskräfte aus Bewegungsgleichungen eliminieren, dann gibt es statt $3N$ nur noch n Bewegungsgleichungen.

z.B. Fadenkraft \vec{F}_{Faden} beim Pendel interessiert nur insoweit, als sie l konstant hält, d.h. eine ökonomische Behandlung nutzt die Zwangsbedingung aus, um Koordinaten zu reduzieren.


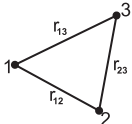

<p>$N=2$</p> 	$n = 6 - 1 = 5$ $\uparrow \quad \uparrow$ $3N \quad 1 \text{ Abstand}$ fest	(Rotation um Verbindungsachse ist kein Freiheitsgrad!)
<p>$N=3$</p> 	$n = 9 - 3 = 6$ \uparrow 3 Abstände	(3 für Schwerpunkt, 3 für Orientierung)
<p>$N=4$</p> 	$n = 12 - 6 = 6$	weil Lage des vierten Teilchens durch Lage der ersten 3 Teilchen fest ist

Abb. 18

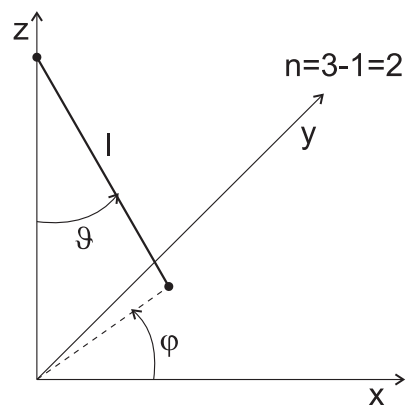


Abb. 19: 2-dim. Pendel mit konstanter Länge l . Die beiden Freiheitsgrade lassen sich durch die Winkel ϑ und φ ausdrücken.

2.1.2 Virtuelle Verrückungen und Zwangsbedingungen

Zur Elimination der Zwangsbedingung benutzt man das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Definition: Eine virtuelle Verrückung ist eine infinitesimale, instantane Koordinatenänderung $\delta\vec{r}_i$ zum Zeitpunkt t , die mit den angewandten Kräften und Zwangsbedingungen (d.h. auch Zwangskräften) zum Zeitpunkt t verträglich ist.

Die Zwangskräfte stehen senkrecht auf der möglichen Bewegung, d.h. auch senkrecht auf $\delta\vec{r}_i$

$$\Rightarrow \delta\vec{r}_i \perp \vec{f}_i \leftarrow \text{Zwangskraft}, \quad \boxed{\vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0} \quad (2.1)$$

Newton II mit Gesamtkraft = $\vec{F}_i + \vec{f}_i$

Dabei ist \vec{F}_i die angewandte Kraft, \vec{f}_i die Zwangskraft.

$$\begin{aligned} \vec{F}_i + \vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 & \quad | \cdot \delta\vec{r}_i, \sum_i \\ \Rightarrow \sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i}_0 = 0 & \quad (2.2) \end{aligned}$$

Prinzip der virtuellen Arbeit (d'Alembert)

(Speziell sind ohne Zwangsbedingungen alle $\delta\vec{r}_i$ erlaubt,

d.h. $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \Rightarrow$ Newton II)

$\delta\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$, sind noch $3N$ voneinander abhängige Koordinaten.

Ziel war: $n = 3N - z$ unabhängige Koordinaten

Hierzu führen wir die generalisierten Koordinaten $q_i, i = 1, \dots, n$, ein.

Die Elimination der abhängigen Koordinaten ist möglich, falls die Zwangsbedingungen durch algebraische Gleichungen der Form $f_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, j = 1, \dots, z$, beschrieben werden. Solche Zwangsbedingungen heißen auch holonom.

z.B. Pendel $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$

Differentielle Bedingungen müssen gesondert behandelt werden, z.B. Rollen siehe (Abb. 20)

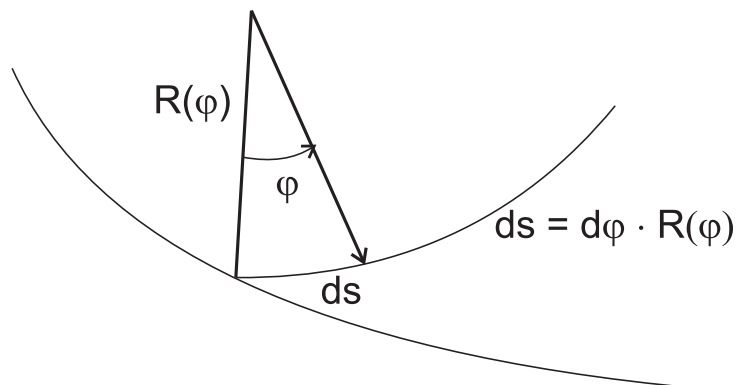


Abb. 20: Zwangsbedingung $ds = d\varphi \cdot R(\varphi)$ beim Rollen eines Körpers.

Wenn wir die Zwangsbedingungen eliminieren können, erhalten wir $3N$ Gleichungen für $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$ als Funktion der n unabhängigen generalisierten Koordinaten q_i und der Zeit t .

Klassifizierung von Zwangsbedingungen

- holonom: lassen sich durch geschlossene Gleichungen der Form $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$ beschreiben.
- nicht holonom: keine Gleichung der Form $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$ möglich, evtl. läßt sich differentielle Gleichung aufstellen
- $$\sum_i a_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) d\vec{r}_i = a_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) dt$$
- skleronom: zeitunabhängig
- rheonom: zeitabhängig

Was ist eine virtuelle Verrückung?

physikalische Verrückung

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \quad (2.3)$$

virtuelle Verrückung

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta dq_j \quad (\text{Zeit wird festgehalten}) \quad (2.4)$$

- virtuelle Verrückung: alle infinitesimalen Verrückungen, die mit den Zwangsbedingungen zu gegebenem festen Zeitpunkt vereinbar sind
- Zwangsbed. skleronom: tatsächliche Verrückungen schließen virtuelle Verrückungen mit ein
- Zwangsbed. rheonom: tatsächliche Bewegungen $d\vec{r}_i$ unter Umständen virtuell (bei eingefrorener Zeit) nicht erlaubt, $d\vec{r}_i \neq \delta \vec{r}_i$

2.1.3 Euler-Lagrange-Gleichungen

Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{ij} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \quad (2.5)$$

mit der generalisierten Kraft $Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{ij} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \sum_{ij} \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \end{aligned} \quad (2.6)$$

Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}_i$ durch generalisierte Koordinaten ausdrücken

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (2.7)$$

Nebenrechnung:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (2.8)$$

denn aus $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, $i = 1, \dots, N$ folgt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \dot{\vec{r}}_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aus Gleichung (2.6) folgt:

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{ij} \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Ann.: Differentiation vertauschbar}} \\ &= m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} - m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \\ &= \sum_{ij} \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j \end{aligned}$$

Produktregel:

$$\begin{aligned} &= \sum_{ij} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) \right] \delta q_j \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2}_T \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2}_T \right) \right] \delta q_j \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j \end{aligned} \tag{2.10}$$

Einsetzen in d'Alembertsches Prinzip (n Freiheitsgrade)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i (-\vec{F}_i + \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - Q_j \right] \delta q_j \leftarrow \text{unabhängige generalisierte Koordinaten} \end{aligned} \tag{2.11}$$

δq_j linear unabhängig voneinander

↓

Jeder Term in der Summe muß verschwinden!

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n \tag{2.12}$$

Spezialfall: konservative Kräfte \vec{F}

\Rightarrow Es gibt ein Potenzial $V = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$, $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V$

V nur von Koordinaten abhängig, $V = V(\vec{r})$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\text{Also: } \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}} - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0 \quad (2.13)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V), \text{ da } V \text{ nur vom Ort abhängt, } \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

L = T-V ist die Lagrange-Funktion.

(Euler-)Lagrange - Gleichungen

(1) für konservative Kräfte

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

mit $L = T - V = L(q_j, \dot{q}_j, t) \rightarrow$ Lagrangefunktion

(2) allgemein

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

(2.14)

Beispiele:

(1) ebenes Pendel

(Abbildung 21)

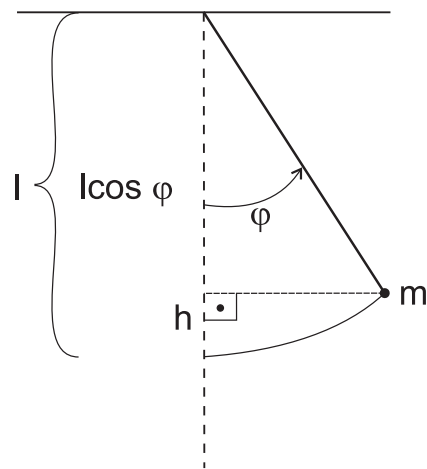


Abb. 21: Das ebene Pendel mit 1 Freiheitsgrad = 1 generalisierten Koordinate. Als Koordinate wählen wir den Winkel φ zur Vertikalen.

$$h = l - l \cos \varphi = l(1 - \cos \varphi)$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \quad (l\varphi = \text{Länge auf Kreisbogen})$$

$$V = mgh = mgl(1 - \cos \varphi)$$

Da es nicht auf Konstanten im Potenzial ankommt, wählen wir einfacher:

$$V = -mgl \cos \varphi$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (mgl \cos \varphi) \\ &= \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\varphi}) + \underbrace{mgl \sin \varphi}_{\substack{\text{generalisierte Kraft} \\ -Q}} = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Bewegungsgleichung $l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$

$L = T - V$ hat die Dimension einer Energie, aber die generalisierten Koordinaten q_j brauchen keine Längen zu sein \Rightarrow Generalisierte Kräfte Q_j brauchen nicht die Dimension einer Kraft zu haben.

Zur Lösung der Bewegungsgleichung betrachten wir kleine Winkel $\varphi \ll 1$

$$\Rightarrow l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$$

$$\varphi \text{ ist das 1. Glied der Taylorreihe von } \sin \varphi. \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow HO : l\ddot{\varphi} = -g\varphi, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Die Lösung ist eine harmonische Schwingung mit $\varphi(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. A, B sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

(2) ebenes Pendel mit elastischem Faden

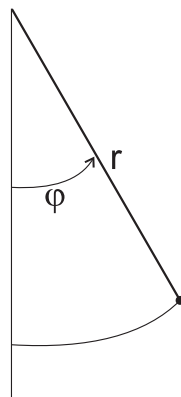


Abb. 22: Wir wählen einen elastischen Faden und haben nun 2 Freiheitsgrade φ, r (generalisierte Koordinaten).

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) \\
V &= -mgr \cos \varphi + \underbrace{\frac{1}{2}k(r - r_0)^2}_{\text{elastische Energie des Fadens, } k = \text{Federkonst., } r_0 = \text{Ruhelänge}}
\end{aligned}
\tag{2.18}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) + mgr \cos \varphi - \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned}
(1) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + k(r - r_0) = 0 \\
(2) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\varphi}) + mgr \sin \varphi \\
&= 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} + mgr \sin \varphi = 0
\end{aligned}
\tag{2.19}$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich nicht analytisch lösen!

2.1.4 Hamiltonsches Prinzip

Alternative zur Herleitung der Lagrange-Gleichungen

Behauptung: Eine Bewegung verläuft so, dass das Integral $J = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$ extremal ist, d.h. $\delta J = 0$. J ist eine Wirkung (Energie · Zeit). (Hamiltonsches Prinzip)

Aufgabe: $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ durch Variation der Pfade $q_i(t)$ extremal machen.

Wir werden zeigen, dass aus $\delta J = 0$ die (Euler-) Lagrangegleichungen folgen.

Umgekehrt kann man zeigen, dass die Lösung der Lagrangegleichung $q_i(t)$ die Wirkung $J = \int L dt$ extremal macht.

Betrachte ein System mit einem Freiheitsgrad:

α ist Variationsparameter

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) dt \quad (2.20)$$

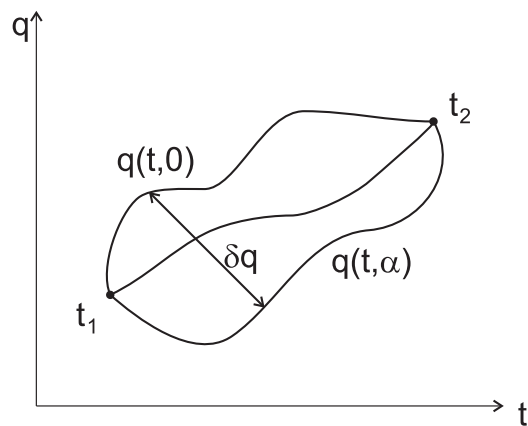


Abb. 23: Die Variation der Pfade $q(t)$ wird durch Parameter α und Funktion $\eta(t)$ mit $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ erzeugt. $q(t, \alpha) = q(t, \alpha = 0) + \alpha\eta(t)$

Extremum von J als Funktion von α suchen:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{wähle: } \alpha = 0)$$

Endpunkte fest:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \alpha}(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right) dt = 0$$

partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt = \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right]_{t_1}^{t_2}}_{0, \text{ weil Endpunkte fest}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt \\ &\quad \left(\frac{d}{dt} \text{ ist totale Abl., da } \alpha \text{ nicht involviert} \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} &= 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right) dt \end{aligned} \quad (2.21)$$

Multiplikation mit $\delta_\alpha, \alpha = 0$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}}_{\delta J \text{ virt. Wirkungsvar.}} \delta_\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \underbrace{\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}}_{\text{virt. Verrückung } \delta q} \delta_\alpha dt \quad (2.22)$$

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \underbrace{\delta q}_{\text{beliebig}} dt = 0 \quad (2.23)$$

\Rightarrow Klammer muss für jedes δq 0 sein

$$\Rightarrow \text{Euler-Lagrange-Gl. } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Wie gesagt, folgt umgekehrt auch das Hamilton-Prinzip aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

Bei mehreren Freiheitsgraden $i = 1, \dots, n$ läuft der Beweis genau analog,

$q \rightarrow q_i, \eta \rightarrow \eta_i, \dot{q} \rightarrow \dot{q}_i$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} &= 0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}\right) dt \\ \hookrightarrow \delta J &= \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \underbrace{\delta q_i}_{\text{bel., unabh.}} dt = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.24)$$

Beispiel für Variationsrechnung:

Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf einer Ebene

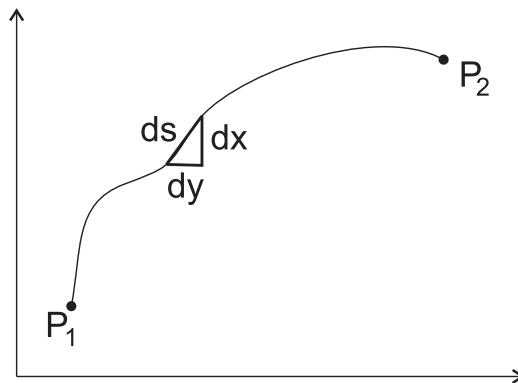


Abb. 24

$$\begin{aligned} \text{Weg} = J &= \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{P_1}^{P_2} F\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) dx \\ \text{Also: } F\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) &\text{ entspricht } L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
\text{Übersetzungsvorschrift} \quad L &\rightarrow F \\
q(t) &\rightarrow y(x) \\
\dot{q}(t) &\rightarrow \frac{dy}{dx} \\
t &\rightarrow x
\end{aligned}
\tag{2.26}$$

Damit wird die Lagrangegleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{dy}{dx}} \right) - \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}} &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \text{ da } F = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \text{ nicht explizit } y - \text{abhängig} \\
\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{dy}{dx}} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} \right) = 0 \\
\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} &= \text{Konstante}
\end{aligned}
\tag{2.27}$$

Das geht nur wenn $\frac{dy}{dx} = a = \text{konstant}$

$\Rightarrow y = ax + b$ Gerade, a, b nach P_1, P_2 festlegen

Beispiel für Variationsprinzip in der Mechanik

Ziel: näherungsweise Lösung eines mechanischen Problems durch einen Ansatz für $q_i(t)$ mit freien Parametern $\{a_j\}$.

$\Rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t, a_j)$ berechnen

$\Rightarrow J = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t, a_j) dt$ berechnen

\Rightarrow optimale Parameter aus $\left(\frac{\partial J}{\partial a_j}\right)_0 = 0$ für alle j ausrechnen (d.h. Extremum von J)

(2.28)

Problem: Mathematisches Pendel mit anharmonischem Term

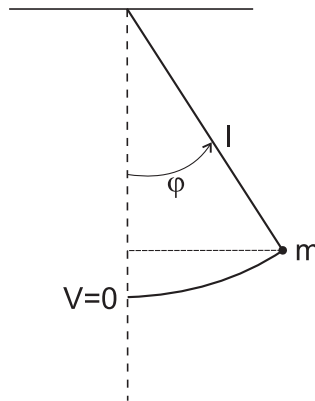


Abb. 25: Mathematisches Pendel $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = v_0$

$$\begin{aligned}
 L = T - V &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \left(1 - \underbrace{\cos \varphi}_{\text{Taylorentw., s.u.}} \right) \\
 &\simeq \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \left(\frac{\varphi^2}{2} - \underbrace{\frac{\varphi^4}{24}}_{\text{anharm. Term}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

Nebenrechnung: Taylorentwicklung von $\cos \varphi$ um $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned}
 f(\varphi) &= \cos \varphi \rightarrow f(0) = 1 \\
 f'(\varphi) &= -\sin \varphi \rightarrow f'(0) = 0 \\
 f''(\varphi) &= -\cos \varphi \rightarrow f''(0) = -1 \\
 f'''(\varphi) &= \sin \varphi \rightarrow f'''(0) = 0 \\
 f^{(4)}(\varphi) &= \cos \varphi \rightarrow f^{(4)}(0) = 1
 \end{aligned}
 \quad \Leftrightarrow \quad
 \begin{aligned}
 \cos \varphi &\simeq 1 + 0 \cdot \varphi + \frac{1}{2!} \cdot (-1) \cdot \varphi^2 \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \cdot 0 \cdot \varphi^3 + \frac{1}{4!} \cdot 1 \cdot \varphi^4 \\
 &= 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24}
 \end{aligned}$$

Ansatz einer speziellen Lösung:

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= a_1 \sin(\omega t) + a_2 \sin(2\omega t) + a_3 \sin(3\omega t) + \dots \\
 \dot{\varphi} \left(t = \frac{3T}{4} \right) \dot{\varphi} \left(t = \frac{T}{4} \right) &\stackrel{\substack{! \\ \text{Def. v. T} \\ \text{bzw. } \omega}}{=} \underbrace{a_1 \omega \cos \left(\frac{\pi}{2} \right)}_0 + 2 \underbrace{a_2 \omega \cos(\pi)}_1 + 3 \underbrace{a_3 \omega \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right)}_0 + \dots \\
 &\Rightarrow \text{alle geraden Terme m\u00fcssen } a_{2n} = 0 \text{ haben} \\
 \Rightarrow \varphi(t) &= a_1 \sin(\omega t) + a_3 \sin(3\omega t) \\
 \varphi^2(t) &= a_1^2 \sin^2 \omega t + 2a_1 a_3 \sin(\omega t) \sin(3\omega t) + a_3^2 \sin^2(3\omega t) \\
 \dot{\varphi}(t) &= a_1 \omega \cos \omega t + 3a_3 \omega \cos(3\omega t) \\
 \dot{\varphi}^2(t) &= a_1^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + 6a_1 a_3 \omega^2 \cos(\omega t) \cos(3\omega t) + 9a_3^2 \omega^2 \cos^2(3\omega t)
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

$$J = \int_0^T L dt = \frac{m}{2} \int_0^T \left[l^2 \dot{\varphi}^2 - gl \left(\varphi^2 - \frac{\varphi^4}{12} \right) \right] dt \tag{2.32}$$

Jetzt folgt eine gro\u00dfe Rechnerei, aber alle Integrale sind von der Form $\int_0^T (\cos(\omega t))^n dt$ und l\u00f6sbar.

Wir nehmen an: $a_1 \gg a_3$ (kleine Anharmonizität) und vernachlässigen Terme von mehr als quadratischer Ordnung in a_3

$$\Rightarrow J = \frac{m}{2} l^2 T \left[\frac{a_1^2 \omega^2}{2} + 9 \frac{a_3^2 \omega^2}{2} \right] - \frac{mgl}{2} T \left(\frac{a_1^2}{2} + \frac{a_3^2}{2} \right) + \frac{mgl}{24} T \left(\frac{3}{8} a_1^4 + \frac{1}{2} a_1^3 a_3 + \frac{3}{2} a_1^2 a_3^2 \right) \quad (2.33)$$

Wirkung extremal:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial J}{\partial a_1} = \frac{m}{2} l^2 T a_1 \omega^2 - \frac{mgl}{2} T a_1 + \frac{mgl}{24} T \left(\frac{3}{2} a_1^3 + \underbrace{\frac{3}{2} a_1^2 a_3 + 3 a_1 a_3^2}_{\text{weglassen wg } a_1 \gg a_3} \right)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{mgl}{2} \left(T a_1 - \frac{T}{12} \cdot \frac{3}{2} a_1^3 \right) \cdot \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{l^2 T a_1}$$

$$= \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega_0^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{8} \right)$$

harmon. Term

$\omega < \omega_0 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} > T_0$, d.h. Schwingungsdauer wird länger

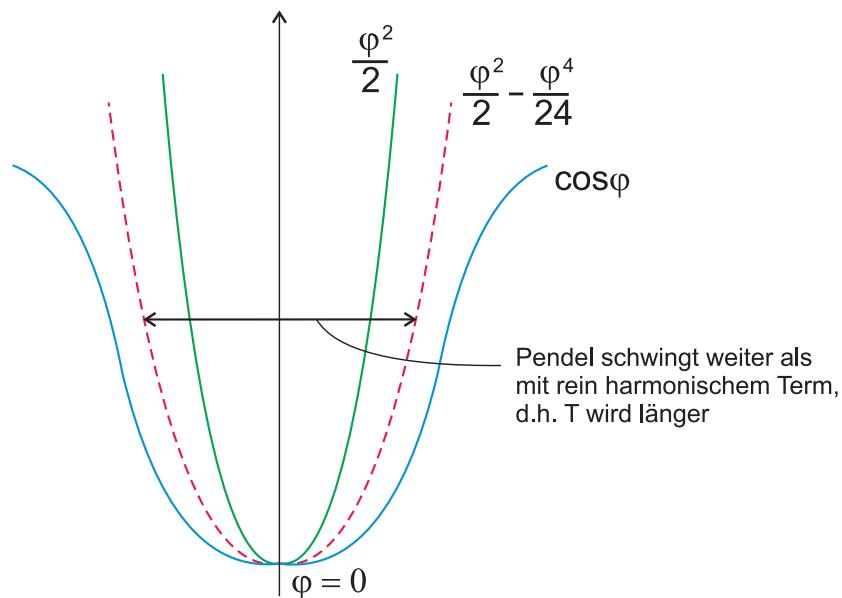


Abb. 26

Außerdem hängt die Schwingungsdauer jetzt von der Amplitude ab. Die Bewegungsgleichung ist nichtlinear und das Superpositionsprinzip (Summe von Lösungen = Lösung) gilt nicht mehr. Berechnung von a_3 aus $\left(\frac{\partial J}{\partial a_3} \stackrel{!}{=} 0\right)$

2.2 Generalisierter Impuls. Symmetrien und Erhaltungssätze und als Anwendung: Planetenbewegung und Streuung

2.2.1 Invarianzen

Lagrangefunktion für 1-dim. Bewegung $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$

Lagrangegleichung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{-F} = \underbrace{m\ddot{x} - F}_{\text{Newton II}} = 0 \quad (2.35)$$

Allgemein heißt $p_j =: \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ der zur generalisierten Koordinate q_j gehörige kanonisch konjugierte generalisierte Impuls.

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{p_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (2.36)$$

Ein generalisierter Impuls p_j ist genau dann erhalten, wenn die zugehörige Koordinate q_j nicht als unabhängige Variable in der Lagrangefunktion auftritt, denn dann ist

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (p_j) = 0 \Leftrightarrow p_j = \text{konstant} \quad (2.37)$$

Generalisierte Koordinaten q_j , von denen L nicht abhängt, heißen zyklisch.

Die Abwesenheit einer generalisierten Koordinate in L ist Folge einer Symmetrie.

z.B. Translationsinvarianz, Rotationsinvarianz

Translationsinvarianz

Betrachte eine Koordinate q_j (z.B. Koordinate eines Partikelchens, Schwerpunktkoordinate R), die die Translation des gesamten Systems in eine bestimmte Richtung beschreibt.

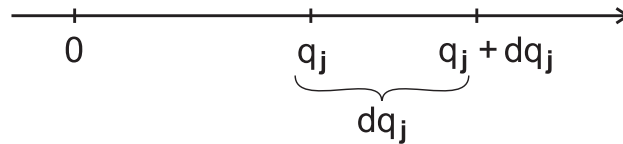


Abb. 27

q_j zyklisch $\Rightarrow V, L$ unabhängig von q_j

das ist genau Translationsinvarianz; das System merkt gar nicht, wenn es verschoben wird.

Betrachte konservative Kräfte $\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = - \frac{\partial V}{\partial q_j} = + \underbrace{Q_j}_{\substack{\text{general.} \\ \text{Kraft}}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für zyklische Koord. } q_j$$

$$\text{Also: } q_j \text{ zyklisch} \Leftrightarrow \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \dot{p}_j = 0, \vec{P} = \text{konst.}$$

$$\Leftrightarrow \text{Translationsinvarianz}$$

(2.38)

zum Beispiel:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 + \frac{1}{2} \sum V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \tag{2.39}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i + d\vec{R} \quad \forall_i \text{ ändert } L \text{ nicht!}$$

Rotationsinvarianz

Ein (bestimmtes) dq_j beschreibe den Rotationswinkel des gesamten Systems um eine feste Achse \hat{n} (konservatives System).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.40)$$

Behauptung: Q_j ist die Komponente des angewandten Drehmoments entlang der Achse \hat{n} , d.h. $Q_j = \hat{n} \cdot \vec{M}$

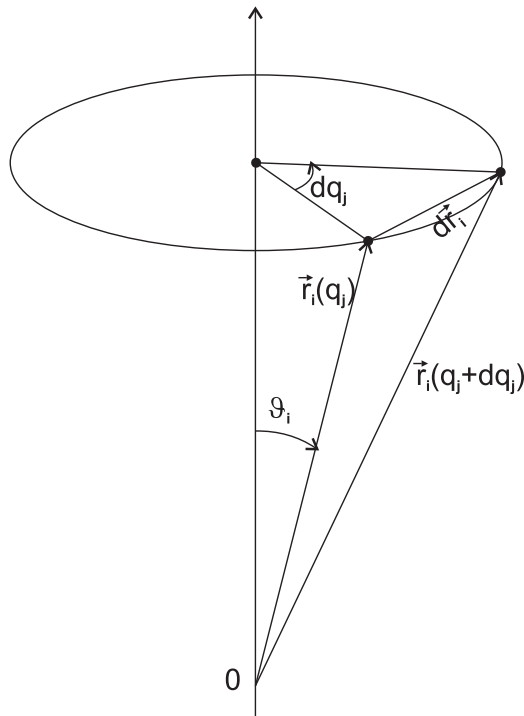


Abb. 28

$$\begin{aligned} |d\vec{r}_i| &= r_i \sin \vartheta_i dq_j \\ \left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right| &= r_i \sin \vartheta_i \\ d\vec{r}_i \perp \vec{r}_i \wedge d\vec{r}_i \perp \hat{n} &\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \hat{n} \times \vec{r}_i \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
Q_j &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) \stackrel{\text{zykl. vert.}}{=} \sum_i \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \\
&= \sum_i \hat{n} \times \vec{M}_i = \hat{n} \cdot \vec{M} \quad \text{mit } \vec{M} = \sum_i \vec{M}_i \quad \Rightarrow \text{Behauptung}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{verallgemeinerte Impulse } p_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \\
&= \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}}_{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{\hat{n} \times \vec{r}_i} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i)
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{zykl. vert.}}{=} \sum_i m_i \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i \hat{n} \cdot \vec{l}_i = \hat{n} \cdot \vec{L}$$

dabei ist: $m_i \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \vec{l}_i$

und $\hat{n} \cdot \vec{L} =$ Komponente des Drehimpulses \vec{L} entlang der Drehachse \hat{n}

(2.42)

Falls die Lagrangefunktion L nicht vom Drehwinkel um eine Achse abhängt, also um diese Achse invariant ist, bleibt $\vec{L} \cdot \hat{n}$ erhalten, denn

$$0 = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \dot{p}_j \quad (2.43)$$

2.2.2 Anwendung: Das Zweikörperproblem

\Rightarrow reduzieren auf Zentralfeld

\Rightarrow Planetenbewegung, Rutherfordstreuung

a) Reduktion des Zweikörperproblems auf ein Einkörperproblem, falls $V = V(\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

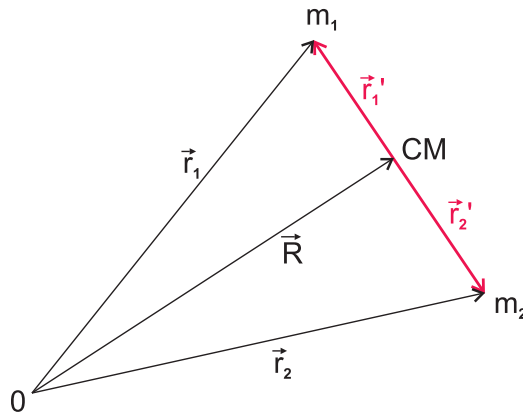


Abb. 29

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \text{kin. Energie } T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 \\ (\text{s. Übungen}) &= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{T_{CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2}_{\text{kin. Energie der Relativbewegung}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \leftarrow \text{nicht abh. von } \vec{R} \text{ nach Voraussetzung}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial R_i} = 0 = \dot{P}_i \Rightarrow \vec{P} = M \dot{\vec{R}} \text{ ist erhalten, der Schwerpunkt}$$

bewegt sich gleichförmig mit konst. Geschw.

$$(\text{s. auch nach Newton: } \vec{F}^{(a)} = M \ddot{\vec{R}} \text{ mit } \vec{F}^{(a)} = 0)$$

(2.46)

T_{CM} ist eine Konstante, auf die es bei der Relativbewegung nicht ankommt,
 $T_{CM} \stackrel{!}{=} 0$.

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \quad \text{Also 1 Teilchen im Zentralpot.}} \quad (2.47)$$

b) Lösung des Problems „Teilchen im Zentralpotenzial“

Annahme: $V = V(|\vec{r}|) = V(r)$ nur vom Betrag von r abhängig.

(zum Beispiel: Gravitation, Coulombpotenzial)

$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r)$ hat sphärische Symmetrie, es ist unter Rotation um beliebige Achsen invariant.

$\Rightarrow \vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu\vec{r} \times \vec{v}$ ist erhalten (Richtung und Betrag)

$\vec{r} \perp \vec{l}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \perp \vec{l} \Rightarrow$ Bewegung verläuft in einer Ebene, die von \vec{r} und $d\vec{r}$ aufgespannt wird. Die Ebene steht senkrecht zu \vec{l} .

D.h. die anfänglichen 6 Freiheitsgrade sind auf 2 reduziert. Für diese benutzen wir ebene Polarkoordinaten (r, ϑ)

Zur Erinnerung

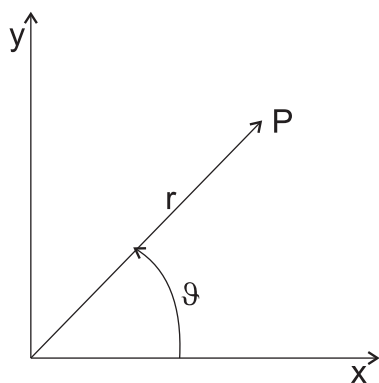


Abb. 30

$$x = r \cos \vartheta$$

$$y = r \sin \vartheta$$

oder

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vartheta = \arctan \frac{y}{x}$$

Funktionaldeterminante

$$r = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \vartheta)}$$

(2.48)

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}^2 &= \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\
&= \left(\dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta \right)^2 + \left(\dot{r} \sin \vartheta + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \right)^2 \\
&= \dot{r}^2 \cos^2 \vartheta - 2r \dot{r} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + r^2 \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{r}^2 \sin^2 \vartheta + 2r \dot{r} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + r^2 \dot{\vartheta}^2 \cos^2 \vartheta \\
&= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 \quad \left(\text{Insbesondere } \dot{\vec{r}}^2 \neq \dot{r}^2! \right) \\
\Rightarrow L &= T - V = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 \right) - V(r) \\
p_\vartheta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \quad \text{ist konstant, da } \vartheta \text{ zyklisch ist.} \\
p_\vartheta &= \mu r^2 \dot{\vartheta} \quad \text{ist genau der Betrag des Drehimpulses } \vec{l} = \mu \vec{r} \times \vec{v}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\vec{r} \times \vec{v} &= \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta \\ \dot{r} \sin \vartheta + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cos \vartheta (\dot{r} \sin \vartheta + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta) - r \sin \vartheta (\dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \end{pmatrix} \\
&= \vec{e}_z \cdot \left[r \dot{r} \cos \vartheta \sin \vartheta + r^2 \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta - r \dot{r} \cos \vartheta \sin \vartheta + r^2 \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta \right] \\
&= \vec{e}_z \cdot r^2 \dot{\vartheta}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Also:

$$\begin{aligned}
l &= m |\vec{r} \times \vec{v}| = m r^2 \dot{\vartheta} \\
\frac{dl}{dt} &= 0 = \mu \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\vartheta})
\end{aligned}$$

\Rightarrow Flächensatz, auch:

$$l = m r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \Rightarrow l dt = m r^2 d\vartheta \tag{2.51}$$

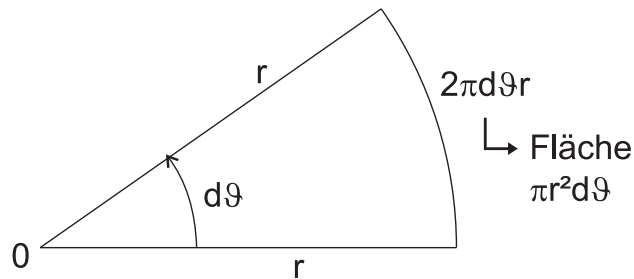


Abb. 31

Das ist das 2. Keplersche Gesetz: Der Fahrstrahl zwischen Sonne und Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Bewegungsgleichung für r :

$$L = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 \right) - V(r) \quad (2.52)$$

Lagrangegleichung

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \mu \ddot{r} - \mu r \dot{\vartheta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} \quad (2.53)$$

Wir wissen bereits:

$$l = \mu r^2 \dot{\vartheta} = \text{konstant} \quad (2.54)$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\underbrace{V(r) + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2}}_{\text{Zentrifugalpotenzial}}}_{\text{effektives Pot. } V_{eff}} \right) \quad (2.55)$$

d.h. wir müssen uns nur noch um die radiale Bewegung (r) kümmern:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \quad \text{analog Newton II} \quad m \ddot{x} = F = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.56)$$

zur Lösung mit \dot{r} multiplizieren

$$\underbrace{\mu \ddot{r} \dot{r}}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mu \dot{r}^2)} = - \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} \quad (2.57)$$

Integrieren

$$\int \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu \dot{r}^2) dt = - \int \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \frac{dr}{dt} dt \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{eff.}(r) = E \leftarrow \text{Integrationskonstante}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = E} \quad \underline{\text{Energiesatz}} \quad (2.59)$$

$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \rightarrow$ kin. Energie der Radialbewegung

$\frac{l^2}{2\mu r^2} \rightarrow$ kin. Energie der Winkelbewegung

$$\frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)} \quad (2.60)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} = dt$$

integrieren mit Anfangsbed. $r(t_0) = r_0$

$$\int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r') - \frac{l^2}{2\mu r'^2} \right)}} \quad \begin{array}{l} \text{liefert } r(t) \\ \text{beliebig genau} \end{array} \quad (2.61)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta} = \frac{l}{\mu r^2(t)} \quad \text{liefert } \vartheta(t) \text{ mit } \vartheta(t_0)$$

d.h. man kann die komplette Lösung in Abhängigkeit von $r(t_0), \vartheta(t_0), E, l$ berechnen

Energie im Zentralfeld

z.B. Gravitation, Coulombkraft:

$$\underbrace{F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{und} \quad F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}}_{V \propto -\frac{1}{r}} \quad (2.62)$$

Rechnung für $\frac{1}{r}$ -Potential $V = -\frac{k}{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ für Gravitation

$$V_{eff} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \quad \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}}_{V_{eff}(r)} = E \quad (2.63)$$

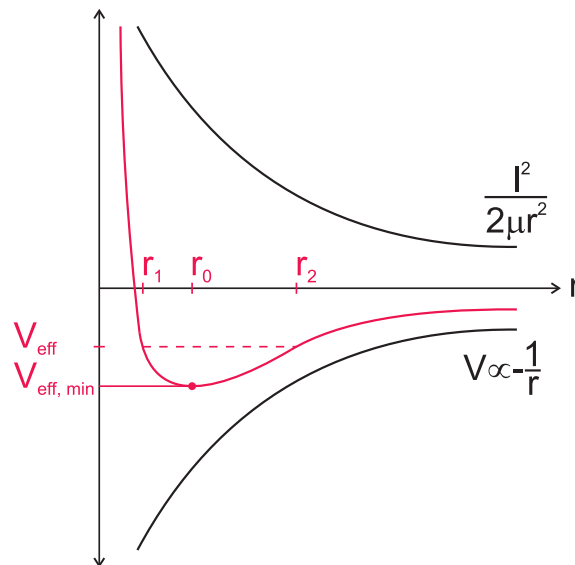


Abb. 32

$E \geq V_{eff,min}$, weil $\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 \geq 0$, $V_{eff,min} = E$ liefert Kreis, da $\dot{r} = 0$

$0 > E > V_{eff,min} \xrightarrow{\text{s. Skizze}}$ Es gibt einen kleinsten Abstand r_1 (Perihel) und einen größten Abstand r_2 (Aphel), d.h. es handelt sich um eine gebundene Bewegung

für $E \geq 0$ ist $r_2 = \infty$, d.h. ungebundene Bewegung

Bahnkurve berechnen (Gravitationspotenzial)

Wir gehen aus von

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \quad \text{und} \quad dt = \frac{d\vartheta}{l} \mu r^2$$

t eliminieren

$$\Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} = \frac{d\vartheta}{l} \mu r^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\vartheta &= \frac{l dr}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} = \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \\ &= \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu E - 2\mu V(r) - \frac{l^2}{r^2}}} = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu V(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vartheta - \vartheta' = \int_{\vartheta'}^{\vartheta} d\vartheta'' = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu V(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

für Coulomb- u. Gravitationspot., $V = -\frac{k}{r}$

$$\vartheta - \vartheta' = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu k}{rl^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

Substitution $r = \frac{1}{u}$, $dr = -r^2 du$

$$\Rightarrow \vartheta = \vartheta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu k u}{l^2} - u^2}} \stackrel{\text{Bronstein-}}{\text{integrabel}} \arccos \left(\frac{\frac{l^2 u}{\mu k} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}} \right)$$

nach $r = \frac{1}{u}$ auflösen

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos(\vartheta - \vartheta') \right]$$

(2.64)

Polardarstellung eines Kegelschnitts mit einem Brennpunkt im Ursprung, allgemein:

$$\frac{1}{r} = C (1 + \mathcal{E} \cos(\vartheta - \vartheta')) \quad (2.65)$$

$$C = \frac{\mu k}{l^2}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \text{ (Exzentrizität)}$$

Es gibt 3 Arten von Kegelschnitten

- Ellipse
- Parabel
- Hyperbel

Ellipse:

Menge aller Punkte P der Zeichenebene, für die die Summe aller Abstände zu zwei gegebenen Punkten F_1 und F_2 gleich $2a$ ist. Die Punkte F_1 und F_2 heißen Brennpunkte.

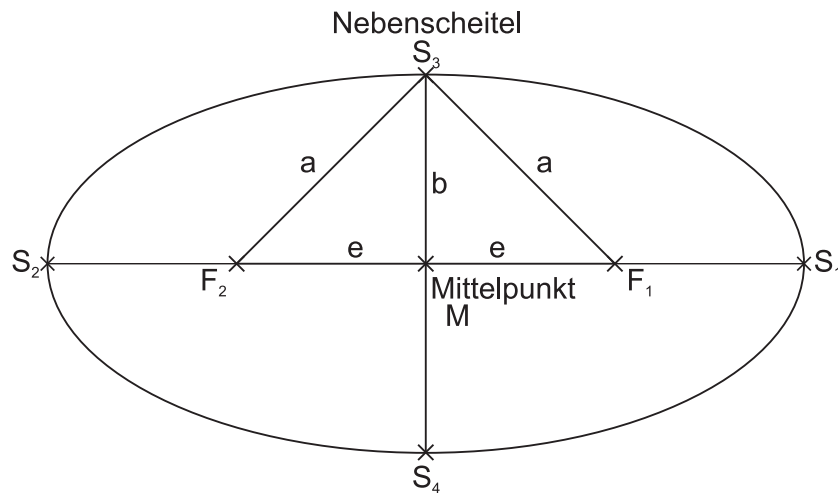


Abb. 33: (a ist durch $\mathcal{E}a$ definiert)

Hauptscheitel $S_1, S_2 =$ Punkte mit größtem Abstand zum Mittelpunkt

b = kleine Halbachse

lineare Exzentrizität = Abstand der Brennpunkte von Mittelpunkt, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ nach Pythagoras

numerische Exzentrizität $\mathcal{E} = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

große Halbachse $\overline{MS_1}$ hat Länge a , denn:

$$\begin{aligned}
 |F_1S_1| + |F_2S_1| &= 2a \quad \text{nach Definition} \\
 \Rightarrow |MS_1| - e + |F_2S_1| &= 2a \\
 \Rightarrow |MS_1| - e + e + |MS_1| &= 2a \\
 \Rightarrow |MS_1| &= a
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Konstruktion z.B. nach Gärtnerkonstruktion

$$\frac{1}{r} = C(1 + \mathcal{E} \cos(\vartheta - \vartheta')) \quad \text{beschreibt für } 0 \leq \mathcal{E} \leq 1 \text{ eine Ellipse} \tag{2.67}$$

Spezialfall $\mathcal{E} = 0$: Kreis, F_1 und F_2 fallen zusammen

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} = C &\Rightarrow r = \frac{1}{C} = \frac{l^2}{\mu k} \\
 \text{Bewegung findet im Potenzialminimum statt, } \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} &\stackrel{!}{=} 0 \\
 \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \right) = +\frac{k}{r^2} - \frac{l^2}{\mu r^3} = 0 &\Rightarrow r = \frac{l^2}{\mu k}
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Ellipse: $0 < \mathcal{E} < 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} &= C(1 + \mathcal{E} \cos(\vartheta - \vartheta')) \\
 \text{d.h. } r_{min} = r_1 \text{ für } \vartheta = \vartheta', \frac{1}{r_{min}} &= C(1 + \mathcal{E}) \\
 r_{max} = r_2 \text{ für } \vartheta = \vartheta' \pm \pi, \frac{1}{r_{max}} &= C(1 - \mathcal{E}) \\
 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{C(1 + \mathcal{E})}, r_2 = C(1 - \mathcal{E}) &
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

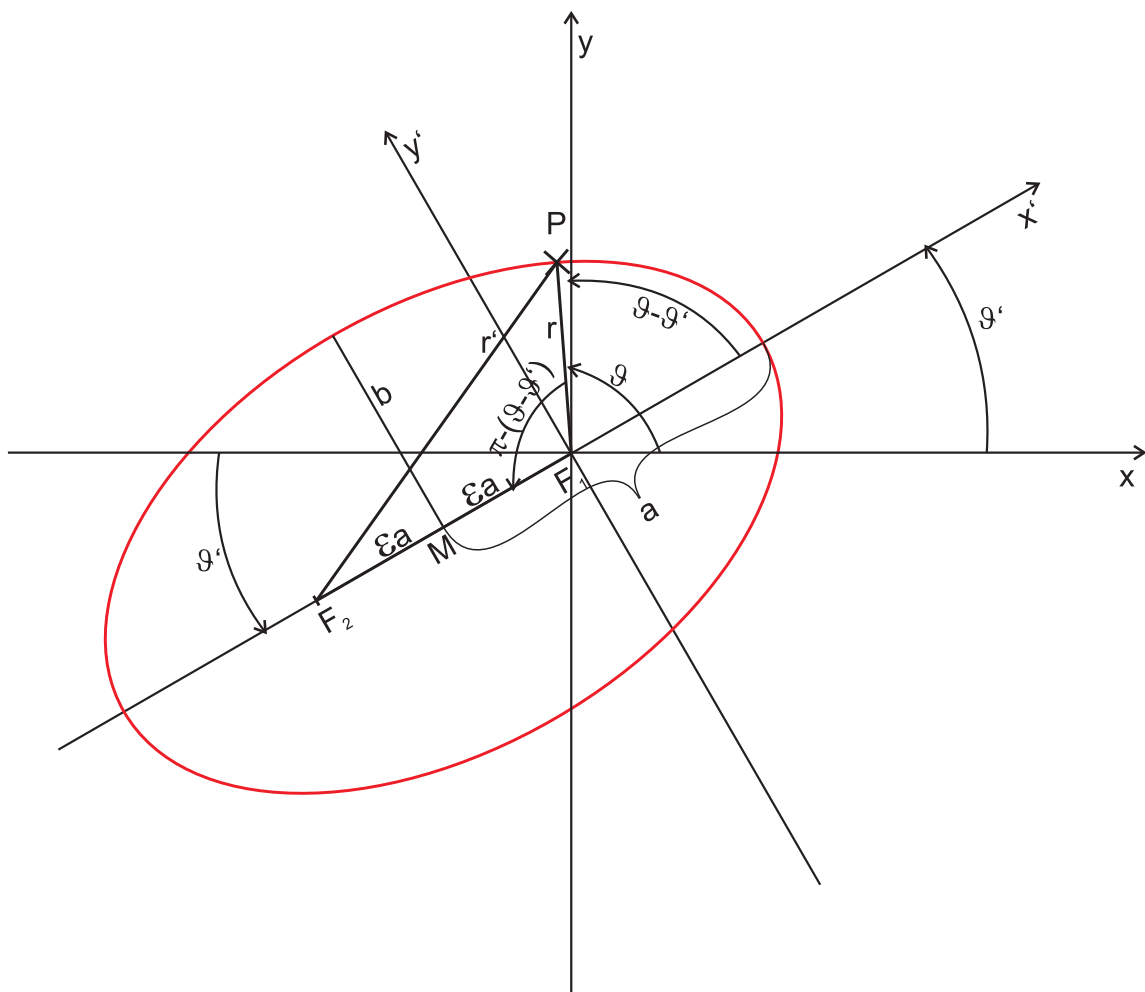


Abb. 34

Die rote Linie stellt die Menge aller Punkte dar, für die gilt:

$$\frac{1}{r} = C (1 + \mathcal{E} \cos(\vartheta - \vartheta')) \quad (2.70)$$

$$\mathcal{E} \cos(\vartheta - \vartheta') = \frac{1}{rC} - 1$$

z.Z.: Die Summe der Abstände jedes Punktes auf dem Umfang von den beiden Brennpunkten ist eine Konstante $2a$.

Ein beliebiger Punkt P habe Abstände r, r' von den Brennpunkten.

Ziel: r' abhängig von r berechnen (Kosinussatz)

zur Erinnerung: Kosinussatz, gegeben sind zwei Seiten a, b und der eingeschlossene Winkel γ

$\hookrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ für die dritte Seite.

$$r'^2 = r^2 + 4\mathcal{E}^2 a^2 + 4ar \underbrace{\mathcal{E} \cos(\vartheta - \vartheta')}_{\frac{1}{rC} - 1} \text{ da } \cos(\vartheta - \vartheta') = -\cos(\pi - (\vartheta - \vartheta')), \quad (2.71)$$

wobei das a hier durch die Länge $\mathcal{E}a$ definiert wird.

$$\begin{aligned} a &= r_{min} + \mathcal{E}a = \frac{1}{C(1 + \mathcal{E})} + \mathcal{E}a \\ \Rightarrow a(1 - \mathcal{E}) &= \frac{1}{C(1 + \mathcal{E})} \Rightarrow a = \frac{1}{C(1 - \mathcal{E}^2)} \\ \text{Also: } r'^2 &= r^2 + \frac{4\mathcal{E}^2}{C^2(1 - \mathcal{E}^2)^2} + \frac{4r}{C(1 - \mathcal{E}^2)} \left(\frac{1}{rC} - 1 \right) \\ &= r^2 + \underbrace{\frac{4\mathcal{E}^2}{C^2(1 - \mathcal{E}^2)^2} + \frac{4}{C^2(1 - \mathcal{E}^2)^2}}_{\frac{4\mathcal{E}^2 + 4(1 - \mathcal{E}^2)}{C^2(1 - \mathcal{E}^2)^2}} - \frac{4r}{C(1 - \mathcal{E}^2)} \\ &= r^2 - \frac{4r}{C(1 - \mathcal{E}^2)} + \frac{4}{C^2(1 - \mathcal{E}^2)^2} \\ &= \left[\frac{2}{C(1 - \mathcal{E}^2)} - r \right]^2 = (2a - r)^2 \stackrel{!}{=} r'^2 \\ \Rightarrow r + r' &= 2a \quad \square \end{aligned} \quad (2.72)$$

Koordinatentransformation auf Hauptachsensystem, Ursprung im Mittelpunkt

$$\begin{aligned} x'' &= r \cos(\vartheta - \vartheta') + \mathcal{E}a \\ y'' &= r \sin(\vartheta - \vartheta') \\ \Rightarrow \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} &= 1 \quad (2.73) \\ b &= \sqrt{a^2 - \mathcal{E}^2 a^2} = a\sqrt{1 - \mathcal{E}^2} = \frac{1}{C\sqrt{1 - \mathcal{E}^2}} = \sqrt{\frac{a}{C}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{l^2}{\mu k}} \end{aligned}$$

Fläche der Ellipse

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{r=[C(1+\mathcal{E}\cos\vartheta)]^{-1}} r' dr' = 2 \int_0^\pi d\vartheta \left[\frac{1}{2} r'^2 \right]_0^{\frac{1}{C(1+\mathcal{E}\cos\vartheta)}} \\
 &= \int_0^\pi d\vartheta \frac{1}{C^2(1+\mathcal{E}\cos\vartheta)^2} \stackrel{\text{Bronstein}}{=} \frac{1}{C^2} \frac{\pi}{(1-\mathcal{E}^2)^{\frac{3}{2}}} \stackrel{*}{=} \frac{a^{\frac{3}{2}}\pi}{\sqrt{C}} \stackrel{**}{=} \pi ab = \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{l^2}{\mu k}} \\
 &* \left(a = \frac{1}{C(1-\mathcal{E}^2)} \right) \\
 &** \left(b = \sqrt{\frac{a}{C}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

3. Keplersches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Achsen der Ellipsen, also $T^2 \propto a^3$.

$$\begin{aligned}
 A &= \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{l^2}{\mu k}} = \int_0^{T=\text{Umlaufzeit}} \underbrace{\frac{dA}{dt}}_{\frac{l}{2\mu} \text{ nach Flächensatz}} dt = \frac{l}{2\mu} T \\
 \Rightarrow T &= 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{G(m_1 + m_2)}} \\
 &(m_1 = \text{Sonne}, \quad m_2 \ll m_1),
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

d.h. $T^2 \propto a^3$ für alle Planeten mit praktisch gleicher Proportionalitätskonstante.

Zusammenfassung Keplersche Gesetze

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Achsen der Ellipsen.

Wichtige Begriffe:

Perihel = sonnennächster Punkt der Planetenbahn

Aphel = sonnenfernster Punkt der Planetenbahn

(~hel von griechisch helios = Sonne)

Die ungebundene Bewegung - $E > 1$, Hyperbel

Eine Hyperbel ist definiert als die Menge aller Punkte der Zeichenebene, für die die Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, den sogenannten Brennpunkten F_1 und F_2 , konstant gleich $2a$ ist.

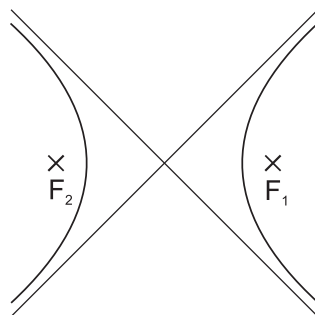


Abb. 35

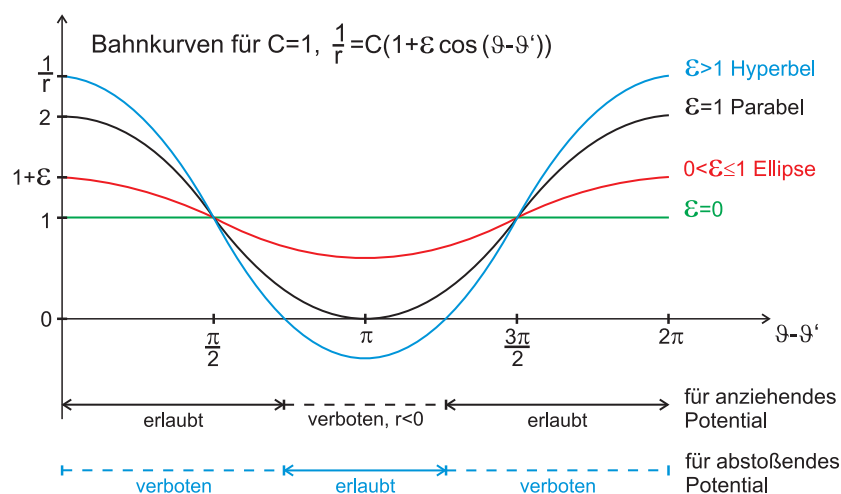


Abb. 36: Für anziehendes Potenzial gilt $V = -\frac{k}{r}$, $k > 0$, $C = \frac{\mu k}{l^2} > 0$. Für abstoßendes Potenzial wird die obige Skizze an der x -Achse gespiegelt. Es gilt $V = -\frac{k}{r}$, $k < 0$, $C = \frac{\mu k}{l^2} < 0$. \Rightarrow nur Hyperbel hat erlaubte ($r > 0$) Bereiche; Kreis, Ellipse, Parabel nicht möglich

Gesucht: Funktion für Streuwinkel $\Theta = \pi - \Phi$

Hyperbelgleichung

$$\frac{1}{r} = C(1 + \varepsilon \cos \vartheta), \quad \varepsilon > 1 \quad (2.76)$$

d.h. der erlaubte Bereich endet bei $\frac{1}{Cr} = 0$, siehe Abb. 38

\Rightarrow daraus Φ herleiten:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{Cr} = 1 + \varepsilon \cos \left(\pi - \frac{\Phi}{2} \right) = 1 - \varepsilon \cos \frac{\Phi}{2} = 1 - \varepsilon \sin \frac{\Theta}{2}$$

für $\vartheta = \pi - \frac{\Phi}{2}$ wird $r \rightarrow \infty$, siehe Skizze (2.77)

Streuwinkel $\boxed{\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\varepsilon}}$

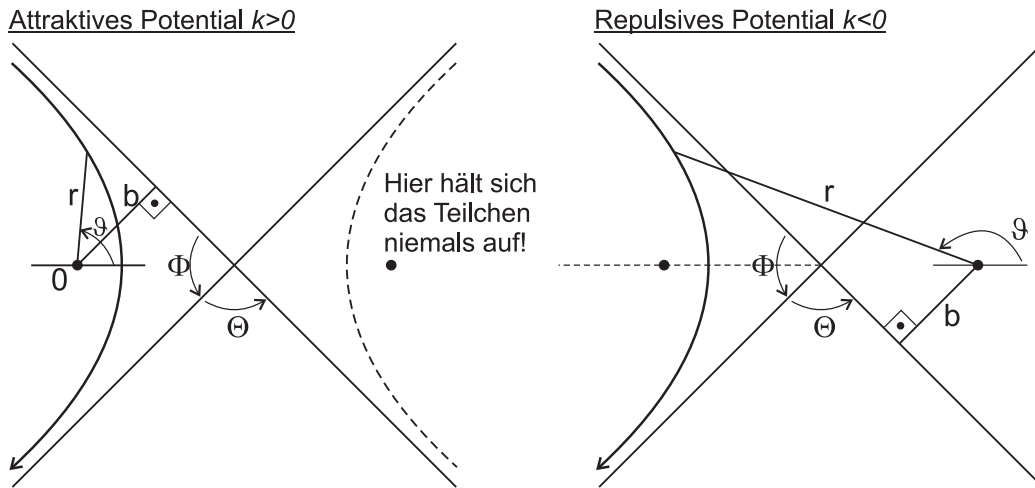


Abb. 37: Attraktives Potenzial $k > 0$: Die Bahnkurve ist zum Streuzentrum gekrümmt, das Streuzentrum ist der nahe Brennpunkt, der Streuwinkel $\Theta = \pi - \Phi$. Stoßparameter (b) ist der senkrechte Abstand des Streuzentrums von der Anfangsrichtung der Teilchen. Repulsives Potenzial $k < 0$: Streuzentrum im fernen Brennpunkt der Hyperbel

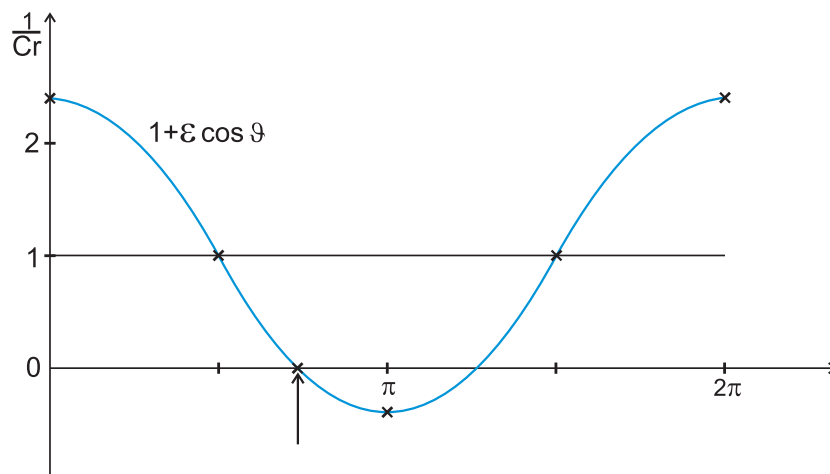


Abb. 38

Berechnung des Rutherfordquerschnitts, d.h. des Wirkungsquerschnitts für ein $\frac{1}{r}$ -Potenzial

Definition des (differentiellen) Wirkungsquerschnitts = $d\sigma$

$$d\sigma = \frac{\text{Zahl der in ein Raumwinkelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Intensität}} \quad (2.78)$$

d.h. wir nehmen einen isotropen Teilchenstrom aus einer bestimmten Richtung an (Richtung egal wegen sphärischer Symmetrie). Zu jedem E und b gehört eine Bahn mit einem bestimmten Streuwinkel Θ .

Annahme:

Bei gegebener Energie gehört zu jedem Streuwinkel Θ genau ein Stoßparameter b (wahr für repulsive Potenziale).

\Rightarrow alle Teilchen, die in einen Winkelbereich zwischen Θ und $\Theta - d\Theta$ gestreut werden, sind durch einen Kreisring zwischen b und $b + db$ gekommen.

Allgemein gilt: $\vec{l} = \mu \vec{r} \times \vec{v}$ und asymptotisch $l = \mu v_0 b$

mit $v_0 =$ asymptotische Geschwindigkeit

Asymptotisch nur kin. Energie $E = \frac{1}{2} \mu v_0^2$

$$\begin{aligned} \text{Intensität } I &= \frac{\text{Zahl der einfallenden Teilchen}}{\text{Fläche} \times \text{Zeit}} = \frac{(\text{Teilchen-})\text{Strom}}{\text{Fläche}} \\ \frac{\text{Zahl der Teilchen durch Kreisring}}{\text{Zeit}} &= I \times \text{Fläche} = \text{Strom} = \\ &= \underbrace{2\pi b db}_{\text{Fläche des Kreisrings}} \underbrace{I}_{\substack{! \\ \text{nach} \\ \text{Annahme}}} d\sigma = I \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi I \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \Theta d\Theta \\ \Rightarrow &\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|} \end{aligned}$$

immer wahr, solange $\Theta(b)$ umkehrbar eindeutig ist

(2.79)

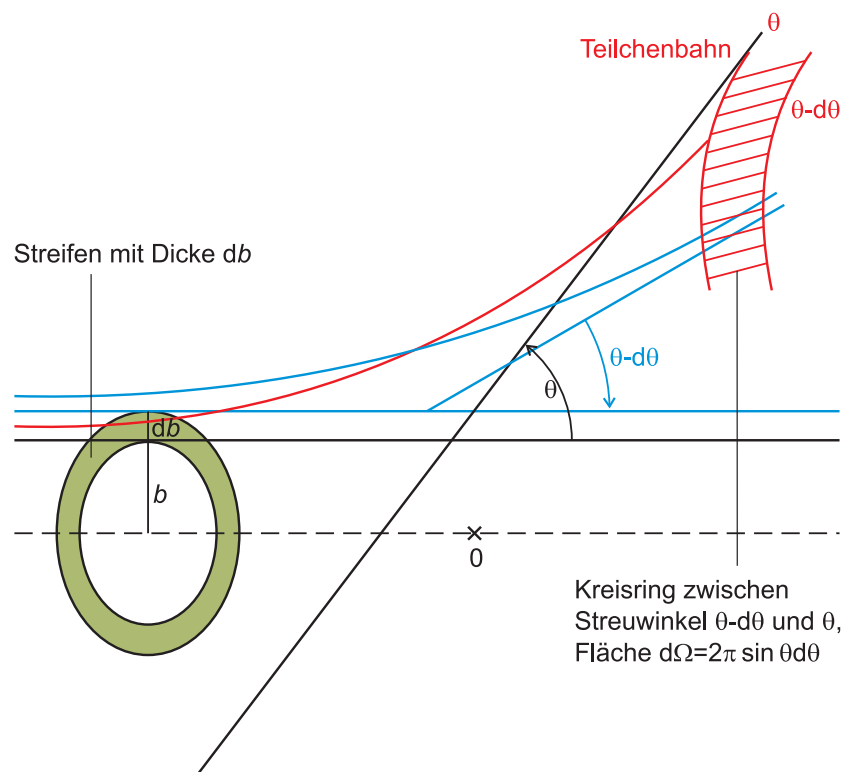


Abb. 39

repulsives Potenzial

$$\Rightarrow \frac{db}{d\Theta} < 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin \Theta} \frac{db}{d\Theta} \quad (2.80)$$

Strategie:

$\Theta(b)$ ausrechnen (für $\frac{1}{r}$ Potenzial)

⇕ Umkehrfunktion? eindeutig

$$b(\Theta) \quad (2.81)$$

↓

$$\frac{db}{d\Theta}$$

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\mathcal{E}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}} \quad \text{siehe Gleichung 2.77}$$

$$l^2 = \mu^2 v_0^2 b^2 = 2\mu E b^2$$

$$\left(\frac{1}{2} \mu v_0^2 = E \Rightarrow v_0^2 = \frac{2E}{\mu} \right)$$

(2.82)

Damit:

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\mu E b^2 \cdot 2E}{\mu k^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \Theta(b) = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}}$$

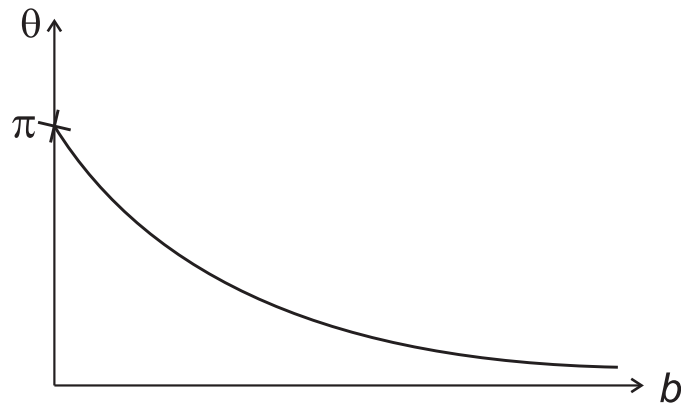


Abb. 40

Die Funktion lässt sich also eindeutig umkehren.

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{\Theta}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}} \Rightarrow 1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} \\
 \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2 &= \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} - 1 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \cot^2 \frac{\Theta}{2} \\
 &\Rightarrow \boxed{b = \frac{|k|}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}} \\
 \Rightarrow \frac{db}{d\Theta} &= -\frac{1}{2} \frac{|k|}{2E} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} \\
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{b}{\sin \Theta} \cdot \left| \frac{db}{d\Theta} \right| \\
 &= \frac{|k| \cos \frac{\Theta}{2}}{2E \sin \frac{\Theta}{2}} \cdot \frac{1}{\sin \Theta} \cdot \frac{1}{2} \frac{|k|}{2E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} \\
 &= \left(\frac{k}{2E}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\cos \frac{\Theta}{2}}{\sin \Theta}}_{\substack{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \hookrightarrow 2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}}} \cdot \frac{1}{\sin^3 \frac{\Theta}{2}} \\
 &\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{k}{2E}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}}
 \end{aligned}$$

ergibt den Rutherford'schen Streuquerschnitt mit $k = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}$

$$(2.83)$$

Bei $\Theta \rightarrow 0$ divergiert der Rutherfordquerschnitt so stark, dass auch der totale Streuquerschnitt divergiert.

\hookrightarrow unendliche Reichweite des $\frac{1}{r}$ -Potenzials

$$\sigma := \int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.84)$$

Davon merkt man wegen der Abschirmung der positiven durch die negativen Ladungen nichts. Das klassische Ergebnis ist gleich dem relativistischen.

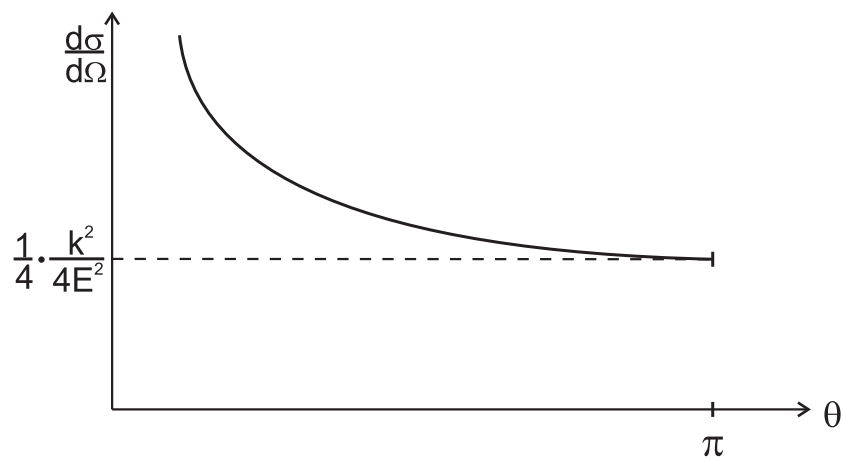


Abb. 41

Was ist der Streuquerschnitt?

z.B. Fußballtor: Rein geometrisch ist das Treffen eines großen Tors leichter als das eines kleinen.

⇒ Streuquerschnitt $\hat{=}$ Fläche

Aber steht ein (noch so kleiner) Torwart drin, trifft man immer den

⇒ Streuquerschnitt eines Torwarts $>$ Fläche

⇒ „Torwartpotenzial“?

Betrachten wir die Streuung harter Kugeln:

Behauptung: Man kann $\Theta(b)$ und damit den Wirkungsquerschnitt geometrisch ausrechnen, ohne Bewegungsgleichungen zu lösen.

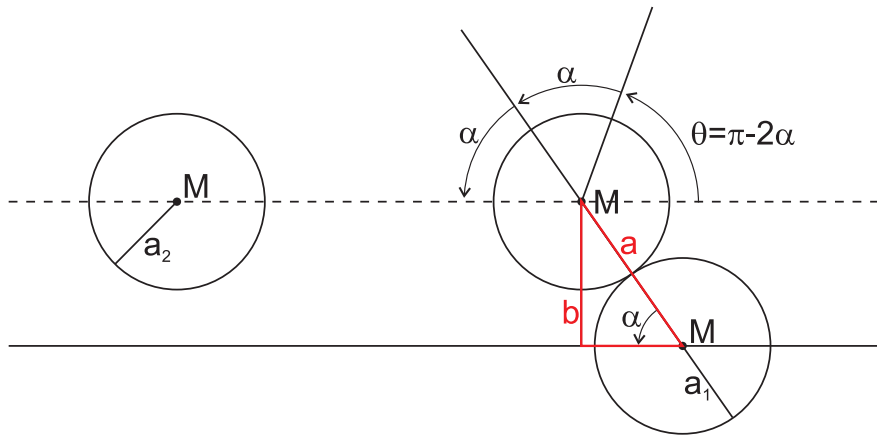


Abb. 42

$$\begin{aligned}
 a &= a_1 + a_2 \\
 b &= a \sin \alpha = a \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2} \right) \\
 &= a \cos \frac{\Theta}{2} \\
 \frac{db}{d\Theta} &= -\frac{a}{2} \sin \frac{\Theta}{2}
 \end{aligned}$$

Gleichung (2.79):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin \Theta} \frac{db}{d\Theta} \quad \text{und} \quad \sin \Theta = 2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \quad (2.85)$$

alles einsetzen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = +\frac{a \cos \frac{\Theta}{2}}{2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}} \cdot \frac{a}{2} \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{a^2}{4}$$

totaler Streuquerschnitt:

$$\sigma = \int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 4\pi \frac{a^2}{4} = \underline{\underline{\pi a^2}}$$

Das ist genau die Fläche, auf der die Kugeln etwas voneinander „sehen“!

Zusammenfassung Streuung:

Die Reichweite eines Potentials wird durch den sogenannten Streuquerschnitt ausgedrückt, der im Falle von „harten Körpern“ der Streufläche entspricht. Für das (unabgeschirmte) Coulombpotential divergiert der totale Streuquerschnitt. Der differentielle Streuquerschnitt ist der von Rutherford gefundene,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \quad (2.86)$$

2.2.3 Variationsrechnung mit Nebenbedingungen

Berechnung von Zwangskräften, einige nichtholonome Systeme

zur Erinnerung:

Eine holonome Zwangsbedingung ist durch algebraische Gleichungen $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$ ausdrückbar. Man kann unabhängige Koordinaten wählen, die die Zwangsbedingung berücksichtigen.

Jetzt betrachten wir allgemeinere differentielle Zwangsbedingungen

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0, \quad l = 1, \dots, m$$

($m =$ Anzahl der Zwangsbedingungen, $n =$ Anzahl der Koordinaten)

(2.87)

Bei virtuellen Verrückungen wird die Zeit festgehalten.

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0, \quad l = 1, \dots, m \quad (2.88)$$

Die δq_k sind durch die Zwangsbedingung nicht mehr voneinander unabhängig.

Die Herleitung von Gleichungen erfolgt weitgehend analog zu vorher.

Wir finden so das Hamiltonsche Prinzip

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = 0 \quad (2.89)$$

Sind die δq_k unabhängig voneinander, folgen daraus direkt die Lagrangegleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (2.90)$$

Da das jetzt nicht mehr geht (δq_k abhängig voneinander), muss die Methode der Lagrange-Multiplikatoren angewandt werden.

Variationsrechnung mit Nebenbedingungen, Lagrange-Multiplikatoren

Wähle m zeitabhängige Funktionen $\lambda_l(t)$, die sogenannten Lagrange-Multiplikatoren, mit

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^m \lambda_l \sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k dt = 0 \quad (2.91)$$

Dieser Ausdruck wird jetzt zum oben genannten Hamiltonschen Prinzip (Gleichung 2.89) addiert.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right] \delta q_k dt = 0 \quad (2.92)$$

Es gibt m Zwangsbedingungen.

Von den n δq_k sind $n - m$ unabhängig, z.B. $k = 1, \dots, n - m$.

m δq_k sind durch die Zwangsbedingungen bestimmt.

Wähle λ_l so, dass gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = (n - m + 1), \dots, n \quad (2.93)$$

Im Variationsprinzip verbleiben die ersten $n - m$ Summanden mit den unabhängigen $\delta q_k, k = 1, \dots, n - m$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n-m} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right] \delta q_k dt = 0 \quad (2.94)$$

Die δq_k sind jetzt voneinander unabhängig.

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = 1, \dots, n - m \quad (2.95)$$

Die Gleichungen 2.93 und 2.95 ergeben zusammen:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.96)$$

d.h. wir haben n Gleichungen für n Koordinaten $q_k(t)$ und m Lagrangeparameter $\lambda_l(t)$, dazu kommen m Zwangsbedingungen.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{lk} dq_k + a_{lt} dt &= 0 \quad | \div dt \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} &= 0, \quad l = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.97)$$

Holonome Zwangsbedingungen $f_l(q_1, \dots, q_k, t) = 0$ kann man durch Differenzieren in eine differentielle Form bringen.

$$0 = df_l = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f_l}{\partial t} dt, \quad l = 1, \dots, m \quad (2.98)$$

Physikalische Bedeutung der Lagrange-Multiplikatoren:

Vergleiche

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk}, \quad k = 1, \dots, n$$

mit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

(Lagrangegl. für nichtkonservatives System)

$\Rightarrow \lambda_l a_{lk}$ sind generalisierte Kräfte, nämlich die Zwangskräfte!

(2.99)

Beispiel: Zylinder rollt auf schiefer Ebene

Betrachte einen Hohlzylinder, Trägheitsmoment $I = MR^2$

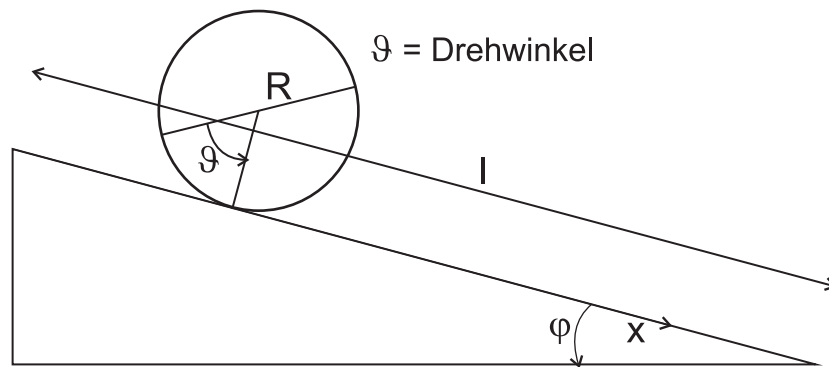


Abb. 43

Zwangsbedingung Rollen $Rd\vartheta = dx$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}^2}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}MR^2\dot{\vartheta}^2}_{\text{Rotation}} \quad (\text{Rotationsenergie } \frac{1}{2}I\omega^2) \quad (2.100)$$

$$V = Mg(l - x) \sin \varphi$$

a) konventionelle Lösung: Zwangsbedingungen mit Zwangskraft eliminieren

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{1}{R} \frac{dx}{dt} \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\dot{x}}{R}, \quad T = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{M}{2} R^2 \frac{\dot{x}^2}{R^2} = M \dot{x}^2 \\ \Rightarrow L &= T - V = M \dot{x}^2 - Mg(l-x) \sin \varphi \\ \text{Bewegungsgleichung: } 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} (2M\dot{x}) - Mg \sin \varphi \\ &\Leftrightarrow 2M\ddot{x} = +Mg \sin \varphi \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{\ddot{x} = +\frac{g}{2} \sin \varphi}} \end{aligned} \quad (2.101)$$

b) Rechnung mit Lagrange-Multiplikatoren: jetzt mit expliziter Berücksichtigung der Zwangsbedingung

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\vartheta}^2 - Mg(l-x) \sin \varphi \\ \text{Zwangsbed.: } R d\vartheta - dx &= 0 \\ \text{analog: } \sum_{k=1}^n a_{lk} dq_k + a_{lk} dt &= 0, \quad l, \dots, m \\ a_x dx + a_\vartheta d\vartheta + a_t dt &= 0 \\ a_t = 0, a_\vartheta = R, a_x = -1, \{q_k\} &= \{x, \vartheta\} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda a_x & \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \lambda a_\vartheta \quad (2.102) \\ \Rightarrow M\ddot{x} - Mg \sin \varphi = -\lambda & \quad M R^2 \ddot{\vartheta} = \lambda R \end{aligned}$$

Zwangsbed. $2 \times$ nach Zeit ableiten: $R\ddot{\vartheta} = \ddot{x}$

einsetzen in $M R^2 \ddot{\vartheta} = \lambda R \Rightarrow M\ddot{x} = \lambda$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M\ddot{x} - Mg \sin \varphi &= -\lambda = -M\ddot{x} \\ \Rightarrow \underline{\underline{\ddot{x} = \frac{g}{2} \sin \varphi}} \end{aligned}$$

gleiches Ergebnis, längere Rechnung, ABER wir haben jetzt auch Informationen über die Zwangskraft:

$$\begin{aligned} \text{Zwangskraft } Q_x = \lambda a_x = -M\ddot{x} &= -\frac{Mg}{2} \sin \varphi \text{ (Rollreibungskraft)} \\ \frac{Mg}{2} \sin \varphi \leq \mu N = \mu mg \cos \varphi &\text{ (Bedingung für Rollbewegung)} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Anders ausgedrückt:

x -Komponente der Zwangskraft aus der „Rauhigkeit“ der Unterlage, die das Fass zum „Rollen“ bringt (ohne Reibung würde es die Ebene runterrutschen).

$$Q_\vartheta = \lambda a_\vartheta = MR^2 \frac{\ddot{x}}{R} = MR \frac{g}{2} \sin \varphi \quad (2.104)$$

↔ durch die Rauhigkeit der Unterlage aufgezwungenes Drehmoment

2.3 Bewegung starrer Körper - Trägheitstensor und Ähnlichkeitstransformation

Bei physikalischen Gesetzen, die sich als Gleichungen zwischen Skalaren, Vektoren oder Tensoren ausdrücken lassen, darf es nicht darauf ankommen, bezüglich welchen Koordinatensystems die Komponenten von Vektoren oder die Matrixelemente von Tensoren genommen werden.

⇒ Beide Seiten von Gleichungen müssen sich gleich transformieren, d.h. bei Gleichungen müssen auf beiden Seiten gleiche Typen stehen.

2.3.1 Transformation physikalischer Größen beim Übergang zwischen Koordinatensystemen - Tensoren

Unter einem Tensor k -ter Stufe in einem n -dimensionalen Raum versteht man eine n^k -Tupel von Zahlen $(F_{i_1, i_2, \dots, i_k}, i_j = 1 \dots n)$, das sich bei Koordinatendrehungen nach bestimmten Gesetzen linear transformiert. Sie tragen k Indizes, von denen jeder von $1 \dots n$ läuft.

Für uns interessant: $n = 1, 2, 3, k = 0, 1, 2$

$k = 0$:

- Skalar. x' (neues Koordinatensystem) = x (altes Koordinatensystem)
- z.B. Lichtgeschwindigkeit c
- Es gibt nur wenige echte Skalare in der Physik!

$k = 1$:

- Vektor, $n = 3$ Komponenten (in 3D), für die bei einer Koordinatendrehung gilt $\vec{x} = \vec{D}^{-1} \vec{x}'$
- Drehmatrix \vec{D} :
 - Eigenschaften:
 - * Orthonormalität von Zeilen und Spalten
 - * Determinante = +1

- z.B. Drehung um z -Achse um Winkel φ :

$$\vec{\vec{D}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

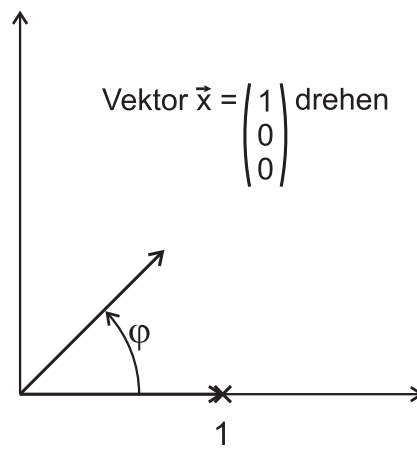


Abb. 44

$$\vec{\vec{D}}\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

$$\text{in Komponenten: } x_i = \sum_j \bar{d}_{ij} x'_j \quad (2.107)$$

$k = 2$:

- Tensor 2. Ordnung, z.B. Trägheitstensor $\vec{\vec{I}}$
- $\vec{\vec{I}} = \vec{\vec{D}}^{-1} \vec{\vec{I}}' \vec{\vec{D}}$

Betrachte z.B.:

$$\begin{aligned}
 \vec{L}' = \vec{I}'\vec{\omega}' &\Rightarrow \vec{L} = \vec{D}^{-1}\vec{L}' = \vec{I}\vec{\omega} \\
 &= \vec{D}^{-1}\vec{I}'\vec{D}\vec{D}^{-1}\vec{\omega}' \\
 &= \vec{D}^{-1}\vec{I}'\vec{\omega}'
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

Tensoren 2. Stufe lassen sich immer als quadratische Matrizen schreiben. Ein Tensor ist eine Abbildung, d.h. in der Gleichung $\vec{L} = \vec{I}\vec{\omega}$ brauchen \vec{L} und $\vec{\omega}$ nicht parallel zu stehen.

Trägheitsmoment um Achse \vec{n} :

$$\begin{aligned}
 I = \vec{n}^t \cdot \vec{I} \cdot \vec{n} &= \left(\vec{D}^{-1}\vec{n}'\right)^t \cdot \vec{D}^{-1}\vec{I}'\vec{D}\vec{D}^{-1}\vec{n}' \\
 &= \vec{n}'^t \underbrace{\vec{D}^{-1t}\vec{D}^{-1}}_{=\vec{D}} \vec{I}'\vec{n}' = \vec{n}'^t \vec{I}'\vec{n}' = I' \quad \text{Skalar!}
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

Offensichtlich gibt es geschicktere und weniger geschickte Koordinatensysteme $\Rightarrow \vec{D}$ so wählen, dass \vec{I} diagonal ist.

2.3.2 Hauptachsentransformation

Behauptung: Jede reelle, symmetrische Matrix (z.B. Trägheitstensor) kann durch eine orthogonale Transformation (Drehung) auf Diagonalgestalt gebracht werden.

Allgemeiner: Jede hermitesche (=selbstadjungierte) Matrix kann durch eine unitäre Transformation auf Diagonalgestalt gebracht werden.

Definition: Ein Hauptachsensystem ist ein System, in dem die Matrix diagonal ist.

$$\vec{I} = \vec{A}^{-1}\vec{I}'\vec{A} \quad (\text{Ähnlichkeitstransformation}) \tag{2.110}$$

hermitesches \vec{I}' :

$$\begin{aligned} I'_{jk} &= I'^*_{kj} \quad \text{für die Elemente} \\ \vec{I}' &= \vec{I}'^* = \underbrace{\vec{I}'^\dagger}_{\substack{\text{adjungierte} \\ \text{Matrix}}} \end{aligned} \quad (2.111)$$

d.h. erwünscht:

$$\vec{A} \cdot \vec{I} = \vec{I}' \cdot \vec{A} \quad \text{mit} \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

$$I_{kl} = \delta_{kl} I_l$$

I_l sind die Eigenwerte.

$j - l$ -tes Element berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_k I'_{jk} a_{kl} &= \sum_k a_{jk} I_{kl} = a_{jl} I_l \quad | \cdot a_{jm}^* | \sum_j \\ \underbrace{\sum_{jk} a_{jm}^* I'_{jk} a_{kl}}_{j,k \text{ vertauschen}} &= I_l \sum_j a_{jm}^* a_{jl} \\ \sum_{jk} a_{km}^* I'_{kj} a_{jl} &= I_l \sum_j a_{jm}^* a_{jl} \quad | \text{komplex konjugieren} \\ \sum_{jk} a_{km} \underbrace{I'_{kj}}_{=I'_{jk}, \text{ da } I' \text{ hermitesch}} a_{jl} &= I_l^* \sum_j a_{jm} a_{jl}^* \quad (1) \end{aligned} \quad (2.113)$$

$j - m$ -tes Element:

$$\begin{aligned} \sum_k I'_{jk} a_{km} &= a_{jm} I_m \quad | \cdot a_{jl}^* | \sum_j \\ \Rightarrow \sum_{jk} a_{jl}^* I'_{jk} a_{nm} &= I_m \sum_j a_{jl}^* a_{jm} \quad (2) \end{aligned} \quad (2.114)$$

(1)-(2):

$$0 = (I_l^* - I_m) \sum_j a_{jl}^* a_{jm} \quad (2.115)$$

Fallunterscheidung:

$$l = m \Rightarrow 0 = (I_l^* - I_l) \underbrace{\sum_j a_{jl}^* a_{jl}}_{=\sum_j |a_{jl}|^2 > 0, \text{ wenn nicht alle } a_{jl}=0} \quad (2.116)$$

$\Rightarrow I_l = I_l^*$ Alle Eigenwerte sind reell.

$$l \neq m \Rightarrow 0 = (I_l - I_m) \sum_j a_{jl}^* a_{jm}$$

Fall i) $I_l \neq I_m$

$$\Rightarrow \sum_j a_{jl}^* a_{jm} = 0$$

Die Spalten der Matrix \vec{A} stehen senkrecht aufeinander. Diese sogenannten Eigenvektoren sind nur bis auf einen Faktor $c \in \mathbb{C}$ bestimmt.

$$\Rightarrow \text{Eigenvektoren normieren, so dass gilt: } \sum_j |a_{jl}|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_j a_{jl}^* a_{jm} = \delta_{lm}$$

In Matrixschreibweise $\vec{A}^\dagger \vec{A} = \vec{A}^{*t} \cdot \vec{A} = \underline{1}$

d.h. $\vec{A}^\dagger = \vec{A}^{-1}$ unitäre Transformation

Spezialfall $\vec{A} = \vec{A}^*$ $\Rightarrow \vec{A}^t = \vec{A}^{-1}$ orthogonale Transformation

Ein Spezialfall davon ist die Drehung ($\det = 1$). Ist $\det = -1$, liegt eine (Dreh-)Spiegelung vor. Diese Operation ist auf einen starren Körper physikalisch nicht anwendbar.

Fall ii) $I_l = I_m$ für $l \neq m$

\leftrightarrow symmetrischer Körper

\leftrightarrow Eigenvektoren orthonormiert wählen

2.3.3 Hauptachsen und Symmetrie

z.B. Quader, 3-achsiges Ellipsoid

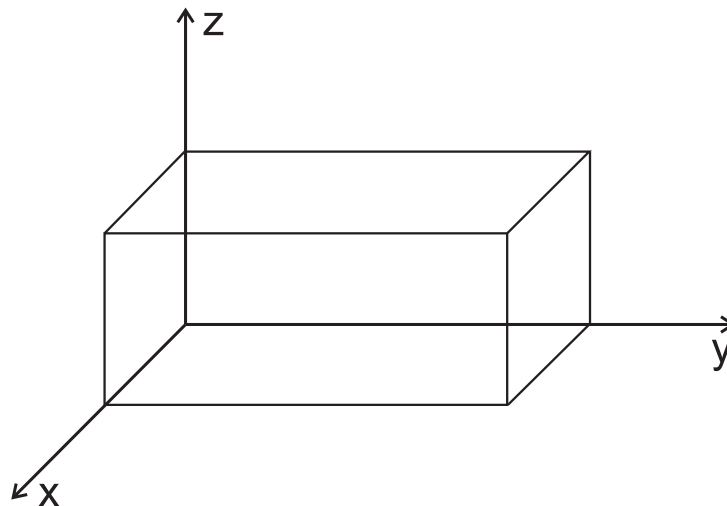


Abb. 45: Hauptachsen liegen entlang der Schnittgeraden von Symmetrieebenen.

Die Deviationsmomente (nichtdiagonale Elemente) des Trägheitstensors verschwinden aus Symmetriegründen.

$$I_{32} = - \sum_i m_i x_{3i} x_{2i} = - \rho \underbrace{\int dx_1 \int dx_2 \int dx_3}_{\text{Volumen}} x_3 x_2 = \underbrace{0}_{\substack{\text{aus Symmetriegründen,} \\ \text{Integrand ungerade}}} \quad (2.117)$$

Sind 2 der 3 Hauptträgheitsmomente gleich, so ist eine der Quaderflächen quadratisch.

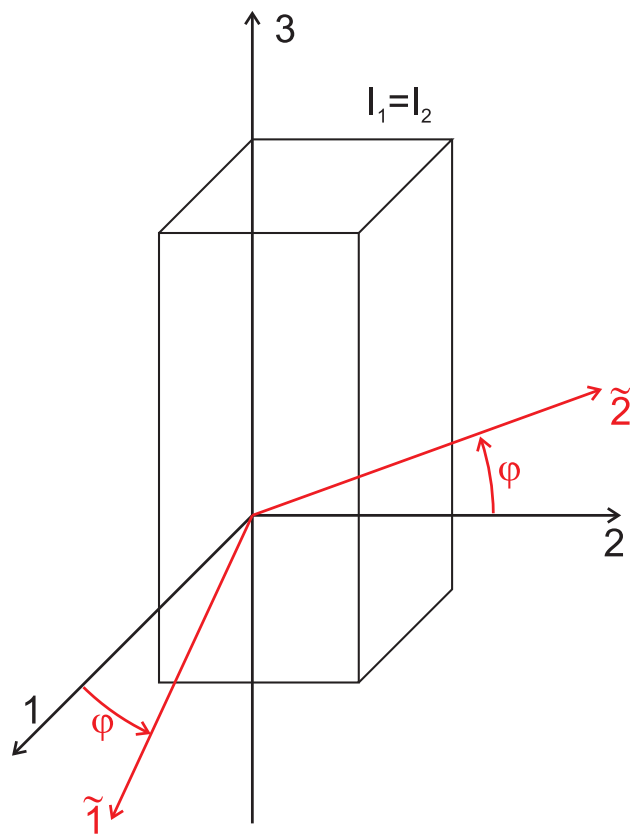


Abb. 46

\vec{a}_1 und \vec{a}_2 können in der zu \vec{a}_3 orthogonalen Ebene beliebig gewählt werden.

Rotationen um die 3-Achse ändern den Trägheitstensor nicht.

Beweis (Abb. 47):

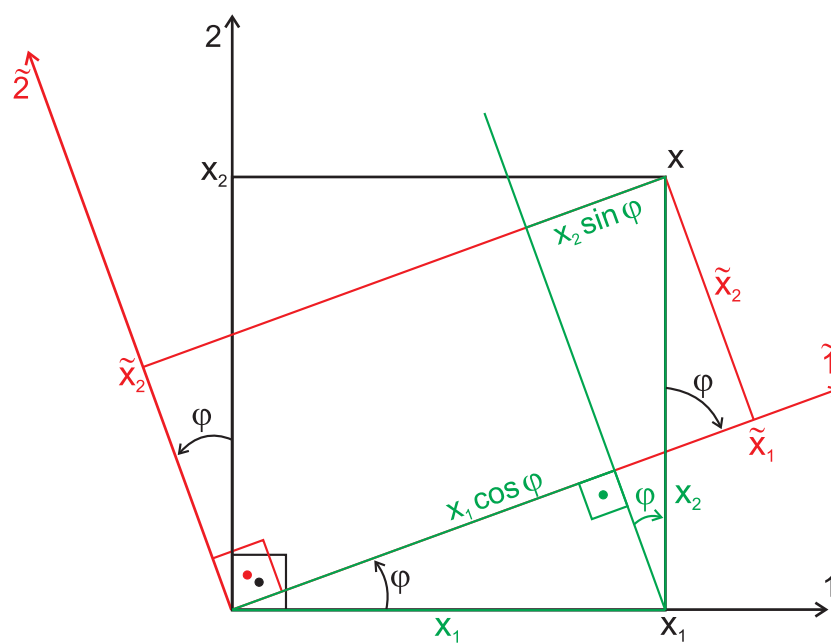


Abb. 47

$$\tilde{x}_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi$$

$$\tilde{x}_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi$$

$$\tilde{x}_3 = x_3$$

(2.118)

$$\vec{\tilde{x}} = \vec{A} \cdot \vec{x}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlichkeitstransformation:

$$\begin{aligned}
 \tilde{I} &= A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^t \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \cos \varphi & -I_2 \sin \varphi & 0 \\ I_1 \sin \varphi & I_2 \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \varphi + I_1 \sin^2 \varphi & -I_1 \sin \varphi \cos \varphi + I_1 \cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ -I_1 \sin \varphi \cos \varphi + I_1 \cos \varphi \sin \varphi & I_1 \sin^2 \varphi + I_1 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.119}$$

d.h. entartete (gleiche) Eigenwerte I_i, I_j des Trägheitstensors \Leftrightarrow Axialsymmetrie des Trägheitstensors um die k -te Achse.

Merke: Axialsymmetrie des starren Körpers (z.B. Rotationsellipsoid) impliziert entartete Eigenwerte von I . Die Umkehrung gilt nicht! (z.B. Quader)

Sind alle 3 Eigenwerte entartet, so ändert eine Drehung um eine beliebige Achse den Trägheitstensor nicht (Kugel, Würfel).

2.3.4 Allgemeine Bewegung eines starren Körpers

Definiere einen festen Punkt O , der sich mit Geschwindigkeit \vec{v}'_O relativ zu O_I , dem Ursprung eines Inertialsystems, bewegen soll. Der starre Körper rotiere mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'$ um diesen Punkt.

Erklärung der Koordinatensysteme (Abb. 48):

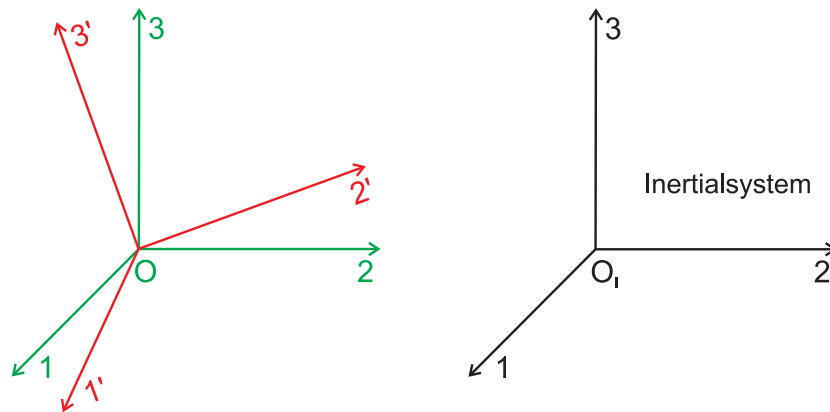


Abb. 48: „Grünes“ Koordinatensystem bewegt sich mit Punkt O mit. (mit starrem Körper) „Rotes“ (gestrichenes) Koordinatensystem ist zusätzlich noch verdreht, kann z.B. körperfestes System sein. Alle Komponenten von $\vec{v}'_O, \vec{\omega}'$ etc. werden im gestrichenen System genommen.

Geschwindigkeit des i -ten Massenpunkts:

$$\vec{v}'_i = \vec{v}'_O + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_i \quad (2.120)$$

Gesamte kinetische Energie bez. des Inertialsystems:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i'^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_O' + \vec{\omega}' \times \vec{r}_i')^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\vec{v}_O'^2 + (\vec{\omega}' \times \vec{r}_i')^2 + 2\vec{v}_O' \cdot (\vec{\omega}' \times \vec{r}_i') \right] \\
 &= \frac{1}{2} M \vec{v}_O'^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}' \vec{I}' \vec{\omega}' + \vec{v}_O' \cdot \underbrace{\left(\vec{\omega}' \times \sum_i m_i \vec{r}_i' \right)}_{M \vec{R}'_{CM}} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{v}_O'^2}_{T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\omega}' \vec{I}' \vec{\omega}'}_{T_{rot}} + \underbrace{M \vec{v}_O' \cdot \left(\vec{\omega}' \times \vec{R}'_{CM} \right)}_{T_{trans-rot}}
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

mit: $\sum_i m_i (\vec{\omega}' \times \vec{r}_i')^2 = \vec{\omega}' \vec{I}' \vec{\omega}'$ nach längerer komponentenweiser Rechnung ¹

Bemerkungen:

- i) Ursprung O muss bezüglich des Körpers zeitlich konstant sein, d.h. sein Abstand $|\vec{r}_i'|$ zu allen Massenpunkten ist zeitlich konstant.
- ii) Der Körper darf auch bezüglich des 1'-2'-3'-Momentansystems rotieren. Tut er das nicht, so ist das 1'-2'-3'-System körperfest und die \vec{r}_i' und damit \vec{I}' und \vec{R}'_{CM} bleiben zeitlich konstant.
- iii) \vec{v}_O' ist die Geschwindigkeit von O und damit wegen des konstanten Abstands aller Massenpunkte von O auch die lineare Translationsgeschwindigkeit aller Massenpunkte im starren Körper relativ zum Inertialsystem.
- iv) Da die kinetische Energie ein Skalar ist und sich zu gegebener Zeit das 1'-2'-3'-System und das x - y - z -Inertialsystem nur durch die Orientierung

¹Die vollständige Rechnung ist zum Beispiel zu finden in: W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik*, Springer Verlag Berlin
(siehe Literaturempfehlung)

unterscheiden, können alle Vektoren, Tensoren usw. auch durch ihre Komponenten im Inertialsystem ausgedrückt werden.

$$T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_O'^2 = \frac{1}{2} M \vec{v}_O^2 \quad (2.122)$$

\vec{v}_O = Geschwindigkeit von O relativ zu O_I in Komponenten relativ zum x - y - z -(Inertial-)System. Für die anderen Terme T_{rot} und $T_{trans-rot}$ wäre das ungeschickt, weil dann der Trägheitstensor und der Schwerpunktvektor zeitabhängig werden.

- v) $\vec{\omega}' = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$ misst die Winkelgeschwindigkeit des Körpers relativ zum Inertialsystem. Die Komponenten sind entlang der momentanen Richtungen des 1'-2'-3'-Momentan-Systems genommen.
- vi) $\vec{\omega}'$ und \vec{v}_O' ändern sich im Lauf der Zeit sowohl relativ zum Momentansystem wie auch relativ zum Inertialsystem.
- vii) $T_{rot} = \frac{1}{2} (I'_1 \omega_1'^2 + I'_2 \omega_2'^2 + I'_3 \omega_3'^2)$, wenn das körperfeste System als ein Hauptachsensystem gewählt wird, so dass \vec{I}' diagonal ist. Das ist immer möglich.
- viii) Spezialfälle
 - (a) Ein Punkt ist sowohl relativ zum Körper als auch relativ zum Inertialsystem fest. Wenn dieser Punkt als O (Ursprung des Inertialsystems) gewählt wird, ist $\vec{v}_O' = 0$ und es verbleibt eine reine Rotation um O : $T = T_{rot}$.
 - (b) Der Körper rotiert um seinen Schwerpunkt, d.h. $O = CM$, $\vec{R}'_{CM} = 0$, $T_{trans-rot} = 0$ und damit $T = T_{rot} + T_{trans}$

2.3.5 Der Kreisel

Aufgabe: Beschreibung der zeitabhängigen Rotation eines körperfesten Systems relativ zum Inertialsystem

Rotation wird durch 3 Parameter ($\vec{\omega}$) beschrieben.

(Starrer Körper hat insgesamt 6 Freiheitsgrade, davon 3 Translation, 3 Rotation; oder Matrixdarstellung einer Rotation im \mathcal{R}^3 hat 9 Einträge und 6 Orthogonalitätsbedingungen \Rightarrow 3 Freiheitsgrade)

Euler-Winkel

Das zum Inertialsystem in O parallele System geht durch 3 (instantane) Rotationen in das körperfeste System über. (Abbildung 49)

Die zeitabhängige Rotation des körperfesten 1'-2'-3'-Systems und damit des starren Körpers wird durch $\varphi(t), \vartheta(t), \psi(t)$ beschrieben.

Frage: Wie hängt $\vec{\omega}' = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$ mit den Eulerwinkeln und ihren Ableitungen zusammen?

$\vec{\omega}$ setzt sich zusammen aus einer Komponente für jeden Eulerwinkel:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\vartheta + \vec{\omega}_\psi$$

Da ψ eine Rotation um die 3'-Achse beschreibt, gilt $\dot{\psi} = (\omega_\psi)_{3'}$, $\omega_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$. $\dot{\vartheta} = (\omega_\vartheta)_{\xi'}$ ist eine Drehung um die ξ' -Achse. Erwünscht ist ω_ϑ im körperfesten 1'-2'-3'-System. Dies geht aus dem $\xi' - \eta' - \zeta'$ -System durch eine Rotation $C(\psi)$ um Winkel ψ um die ζ' -Achse hervor.

$$\begin{pmatrix} (\omega_\vartheta)_{1'} \\ (\omega_\vartheta)_{2'} \\ (\omega_\vartheta)_{3'} \end{pmatrix} = C(\psi) \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi \\ -\dot{\vartheta} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

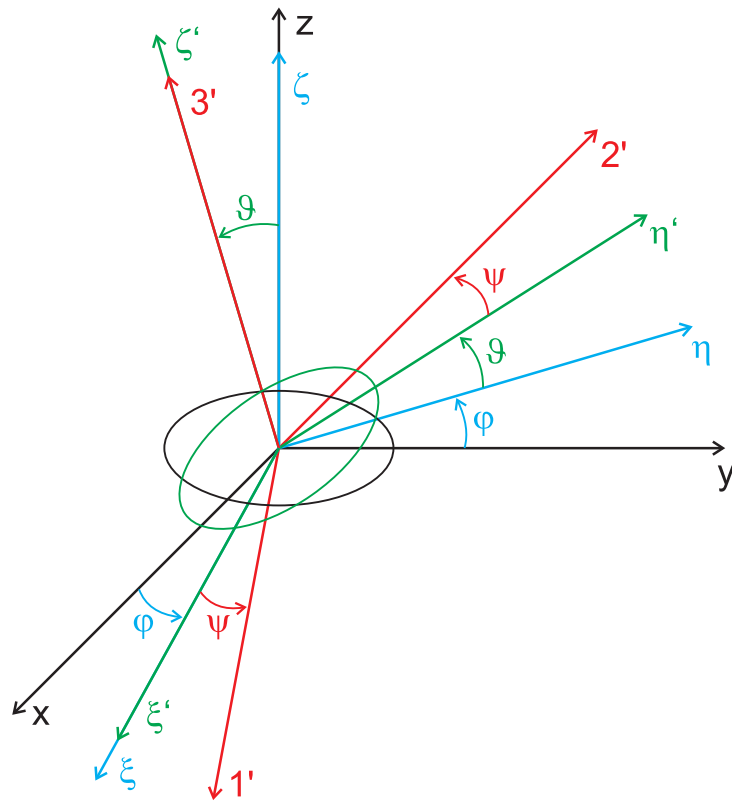


Abb. 49: 1. Drehung um Winkel φ um die z -Achse = ζ -Achse, 2. Drehung um Winkel ϑ um die ξ -Achse = ξ' -Achse, 3. Drehung um Winkel ψ um die ζ' -Achse = $3'$ -Achse

$\dot{\varphi} = (\omega_\varphi)$ um die Inertial- z -Achse. Das $1'-2'-3'$ -System geht durch 3 Rotationen aus dem x - y - z -System hervor.

$A(\varphi)$ um die z -Achse

$B(\vartheta)$ um die ξ' -Achse

$C(\psi)$ um die ζ' -Achse

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (\omega_\varphi)_{1'} \\ (\omega_\varphi)_{2'} \\ (\omega_\varphi)_{3'} \end{pmatrix} &= C(\psi) B(\vartheta) \underbrace{A(\varphi)}_{\substack{\text{vorher weggelassen,} \\ \text{ändert } \omega \text{ nicht}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
\vec{\omega}' = \begin{pmatrix} \omega_{1'} \\ \omega_{2'} \\ \omega_{3'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\omega_\varphi)_{1'} + (\omega_\vartheta)_{1'} + (\omega_\psi)_{1'} \\ (\omega_\varphi)_{2'} + (\omega_\vartheta)_{2'} + (\omega_\psi)_{2'} \\ (\omega_\varphi)_{3'} + (\omega_\vartheta)_{3'} + (\omega_\psi)_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
&\hspace{15em} (2.124)
\end{aligned}$$

Lagrangefunktion eines starren Körpers mit einem festen Punkt in O , $\vec{v}_O = 0$

Als körperfestes 1'-2'-3'-System verwenden wir das Hauptachsensystem. Die Eulerwinkel $(\varphi, \vartheta, \psi)$ führen zum körperfesten System. Sie werden als generalisierte Koordinaten verwendet.

Striche beim gestrichenen System weglassen!

$$\begin{aligned}
T &= T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \overset{\text{Hauptachsen-}}{\underset{\text{system}}{I}} \vec{\omega} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \\
L &= T - V = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) - V(\varphi, \vartheta, \psi)
\end{aligned} \tag{2.125}$$

Lagrangegleichung für ψ :

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \text{ oder } \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = - \frac{\partial V}{\partial \psi} \right\} \begin{array}{l} \text{zu } \psi \text{ gehörige generalisierte Kraft (Drehmoment)} \\ = M_3, \text{ Drehmoment um die 3-Achse} \end{array} \tag{2.126}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}} = 0 + 0 + 1 \cdot I_3 \omega_3 = I_3 \omega_3 \\
\frac{\partial T}{\partial \psi} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} = I_1 \omega_1 \underbrace{(\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi)}_{\omega_2} + I_2 \omega_2 \underbrace{(-\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi - \dot{\vartheta} \cos \vartheta)}_{-\omega_1} + 0 \\
&= \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \\
\text{Also: } \frac{d}{dt} (I_3 \omega_3) - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= M_3 = -\frac{\partial V}{\partial \psi} \\
\Rightarrow I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= M_3 = -\frac{\partial V}{\partial \psi}
\end{aligned} \tag{2.127}$$

Da die 3-Koordinate nicht ausgezeichnet ist, müssen die Gleichungen auch bei zyklischem Vertauschen der Indizes gelten.

$$\left. \begin{aligned}
I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) &= M_2 \neq -\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\
I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) &= M_1 \neq -\frac{\partial V}{\partial \varphi}
\end{aligned} \right\} \text{keine Lagrangegleichungen für } \vartheta, \varphi \tag{2.128}$$

Das sind die Euler-Gleichungen!

2.3.6 Kräftefreier Kreisel ($\vec{M} = 0$)

Der Kreisel sei axialsymmetrisch um die 3-Achse, $I_1 = I_2$.

$$\begin{aligned}
I_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) = \omega_2 \omega_3 (I_1 - I_3) & (1) \\
I_2 \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) = -\omega_3 \omega_1 (I_1 - I_3) & (2) \\
I_3 \dot{\omega}_3 &= \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = 0 & (3)
\end{aligned} \tag{2.129}$$

(1) differenzieren, (2) einsetzen:

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_1 &= \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 \dot{\omega}_2 = -\frac{(I_1 - I_3)^2}{I_1^2} \omega_3^2 \omega_1 = -\Omega^2 \omega_1, & \Omega &= \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} \omega_3 \\ \Rightarrow \omega_1(t) &= A \sin(\Omega t + \delta) \\ \omega_2(t) &= A \cos(\Omega t + \delta)\end{aligned}\tag{2.130}$$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ rotiert mit $\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 < \omega_3$ um die körperfeste Symmetrieachse, und diese dreht sich gegenüber dem Inertialsystem.

Der gesamte Drehimpuls \vec{L} ist erhalten ($\dot{\vec{M}} = 0$).

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_1 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} \text{ in Komponenten bezüglich des körperfesten Systems.}$$

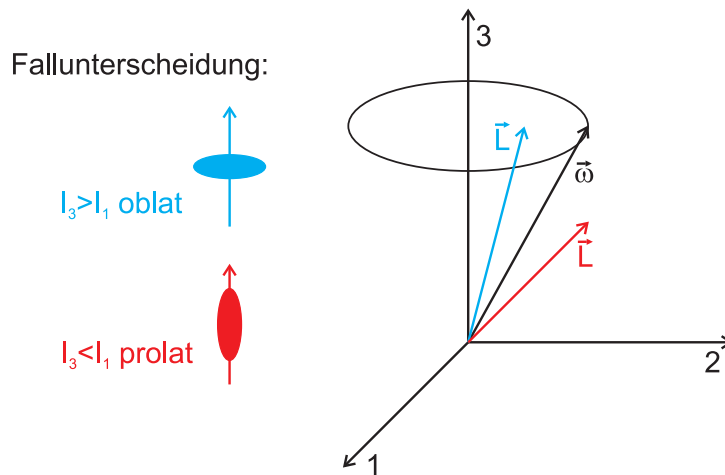


Abb. 50

Da $L_1 = I_1 \omega_1$, $L_2 = I_1 \omega_2$, liegen die 3-Achse, \vec{L} und $\vec{\omega}$ in einer Ebene. Bewegungsablauf: Es laufen 3 Kegel ineinander ab. Im Inertialsystem ist \vec{L} fest und die Symmetrieachse (3-Achse) beschreibt den Nutationskegel um \vec{L} .

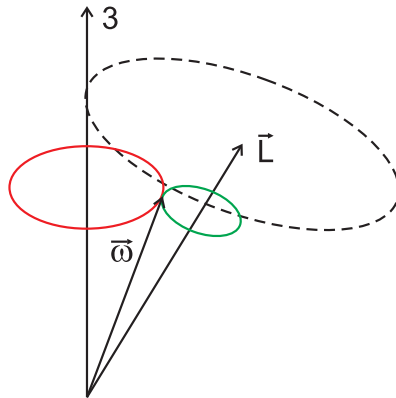


Abb. 51

- Nutations- (Präzessions-) Kegel beschreibt Umlauf der 3-Achse um \vec{L}
- **Polkegel** beschreibt Umlauf von $\vec{\omega}$ um 3-Achse
- **Spurkegel** beschreibt Umlauf von $\vec{\omega}$ um \vec{L}

Inertialsystem: z -Achse in Richtung von \vec{L}

$$\omega_3 = \underbrace{\dot{\psi}}_{\text{Polkegel}} + \underbrace{\dot{\varphi} \cos \vartheta}_{\text{Spurkegel}} \quad (2.131)$$

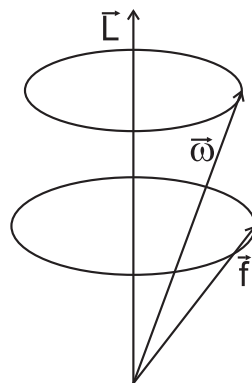


Abb. 52: momentane Winkelgeschwindigkeit ω und Figurenachse \vec{f} präzedieren synchron um \vec{L}

Anwendungsbeispiel kräftefreier Kreisel:

die Erde = abgeplatteter, symmetrischer Kreisel, $I_1 = I_2 < I_3$ mit $(I_3 - I_1)/I_1 \simeq 1/300$

Figurenachse und Winkelgeschwindigkeit haben nicht dieselbe Richtung \Rightarrow Präzession mit

$$T = \frac{2\pi}{\omega_O} = \frac{2\pi I_1}{(I_3 - I_1)\vec{\omega}_3} \quad (2.132)$$
$$\frac{2\pi}{\vec{\omega}_3} = 1 \text{ Tag} \Rightarrow T \simeq 300 \text{ Tage}$$

Experimentell: $T = 430$ Tage (da Erde kein starrer Körper), Amplitude einige Meter (Chandler-Flattern), aber auch jährliche Komponente durch Wechsel der Jahreszeiten \leftrightarrow Luftbewegung

\neq astronomische Präzession aus Anziehungskraft von Sonne und Mond (26.000 Jahre)

2.3.7 Schwerer symmetrischer Kreisel $I_1 = I_2$

Es wirkt eine äußere Kraft auf den Schwerpunkt, der nicht der feste Punkt O ist. (Abbildung 53)

Beim schweren Kreisel ist es günstiger, mit den Lagrangegleichungen für die Eulerwinkel als generalisierte Koordinaten zu rechnen.

Bewegung in $\varphi =$ Präzession

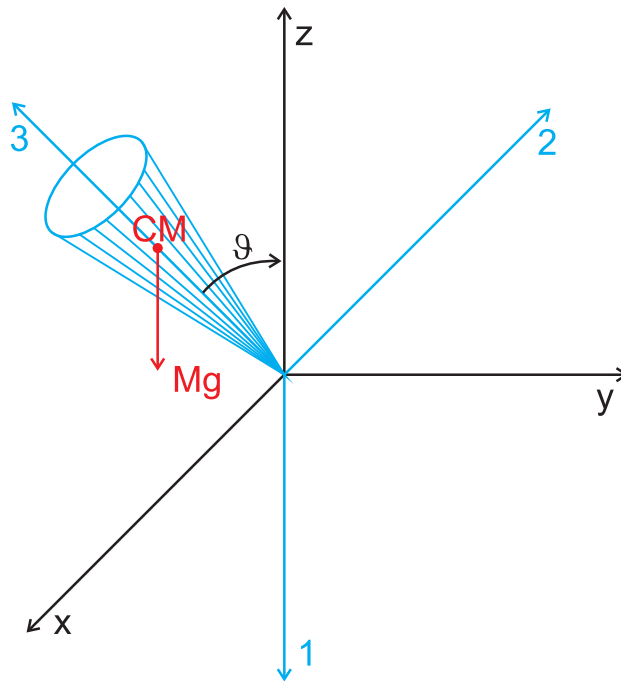


Abb. 53: l = Abstand Schwerpunkt - Auflagepunkt

Bewegung in ϑ = Nutation

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - Mgl \cos \vartheta$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}$$

(2.133)

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \vartheta$$

Welche Erhaltungsgrößen gibt es?

φ und ψ sind zyklisch, also

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + I_3 \underbrace{(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})}_{p_\psi} \cos \vartheta = \text{konst.}$$

(2.134)

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = \text{konst.}$$

auflösen nach $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ und in L einsetzen

\Rightarrow effektiv nur noch ein Freiheitsgrad

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta}, \quad \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta} \cos \vartheta \\ L &= \frac{1}{2} I_1 \left(\left(\frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta} \right)^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \right) + \\ &+ \frac{I_3}{2} \left(\frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta} \cos \vartheta + \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta} \cos \vartheta \right)^2 - Mgl \cos \vartheta\end{aligned}\tag{2.135}$$

Man erhält die Lagrangefunktion $L(\vartheta, \dot{\vartheta}, p_\varphi, p_\psi)$

\Rightarrow Einsetzen in die Lagrangegleichung $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$

\Rightarrow Bewegungsgleichung aufstellen, mit $\dot{\vartheta}$ multiplizieren, integrieren

\Rightarrow Energiesatz

$$E = T + V = \frac{1}{2} I_1 \dot{\vartheta}^2 + \underbrace{\frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta)^2}{2I_1 \sin^2 \vartheta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \vartheta}_{\text{effektives Potenzial } U(\vartheta)}\tag{2.136}$$

Annahme: $p_\varphi \neq p_\psi \Rightarrow U(\vartheta)$ hat Pole bei $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$

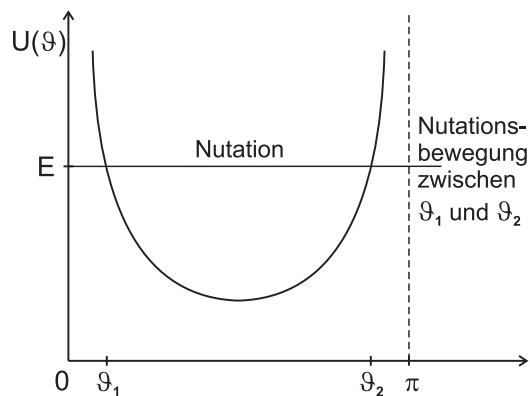


Abb. 54

Bei gegebener Energie bewegt sich die Figurenachse zwischen $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ (Nutation des schweren Kreisel). Die Präzession (Bewegung im φ , d.h.

Drehung der Figurenaxe 3 um die Vertikale z) führt zusammen mit der Nutation zu 3 Bewegungstypen, siehe Abbildung 55:

Bei $E = \min. U(\vartheta) = U(\vartheta_0)$ gibt es keine Nutation mehr.

Bewegung der Figurenaxe auf der Einheitskugel (Locuskurve)

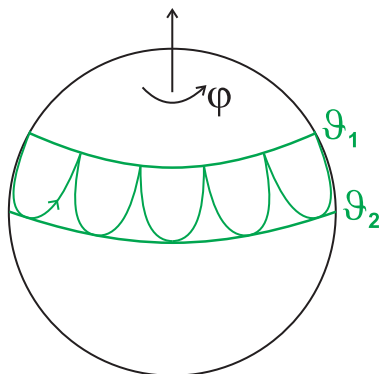
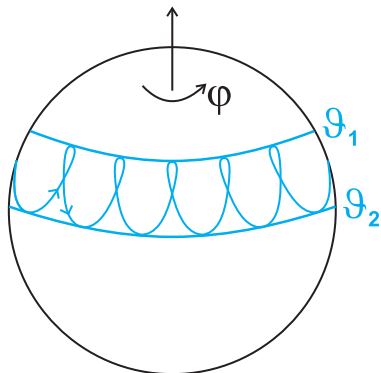
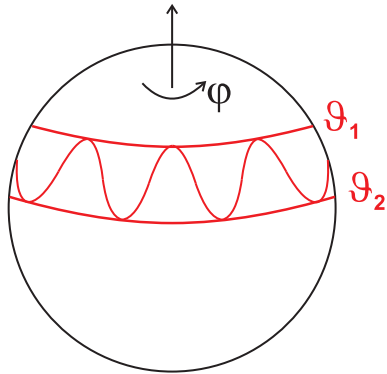


Abb. 55

jeweils $\vartheta_1 < \vartheta_2$

sei $p_\varphi, p_\psi > 0$

$\dot{\varphi} > 0$ (eigentlich nur konst. VZ)

also ist $p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta_1 > 0$

$p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta_2 > 0$

$\cos \vartheta_{1/2} < \frac{p_\varphi}{p_\psi}$

$\vartheta_{1/2} > \arccos \frac{p_\varphi}{p_\psi}$

(2.137)

bei ϑ_1 : $\dot{\varphi} < 0$

bei ϑ_2 : $\dot{\varphi} > 0$ (2.138)

$\vartheta_2 > \arccos \frac{p_\varphi}{p_\psi} > \vartheta_1$

$\dot{\varphi}(\vartheta_1) = 0 \Rightarrow p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta_1 = 0$

erhält man, wenn man die

Figurenaxe bei $\vartheta = \vartheta_1$
aus der Ruhe ($\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$)

loslässt (aber $\dot{\psi} \neq 0$,

sonst fällt der Kreisel um).

(2.139)

Minimum:

$$\left(\frac{dU}{d\vartheta}\right)_{(\vartheta_0)} = 0$$

$$U(\vartheta) = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta)^2}{2I_1 \sin^2 \vartheta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \vartheta$$

$$\frac{dU}{d\vartheta} = \frac{2(p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta) \cdot (+p_\psi \sin \vartheta) \cdot 2I_1 \sin^2 \vartheta - (p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta)^2 \cdot 2I_1 \cdot 2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{4I_1^2 \sin^4 \vartheta} - Mgl \sin \vartheta \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{Bestimmungsgleichung für } \vartheta_0!$$

(2.140)

Minimum oder Maximum?

$$\left(\frac{d^2U}{d\vartheta^2}\right)_{\vartheta_0} > 0 \quad \text{Minimum (Kreisel bleibt stabil stehen)}$$

$$< 0 \quad \text{Maximum (instabil)}$$

(2.141)

Übergang vom schweren zum freien Kreisel:

$l \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ Schwerpunkt \rightarrow Ursprung

Es wirkt kein Drehmoment mehr $\Rightarrow \vec{L}$ erhalten, keine äußere Richtung ausgezeichnet.

Lege das Inertialsystem mit der z -Achse entlang \vec{L} , so dass $L_x = L_y = 0$.

2.4 Beschleunigte Bezugssysteme

2.4.1 Lineare Beschleunigung

Gestrichenes Koordinatensystem bewegt sich mit linearer Geschwindigkeit \vec{w} relativ zu einem Inertialsystem (ungestrichen), Teilchen hat die Geschwindigkeit \vec{v} im Inertialsystem, Geschwindigkeit im gestrichenen System $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{w}$.

Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}
 L(\vec{r}, \vec{v}, t) &= T - V = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - V(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{2}m(\vec{v}' + \vec{w})^2 - V'(\vec{r}') \quad \text{mit } V(\vec{r}) = V'(\vec{r}') \\
 &\quad \text{Zahlenwert der potenziellen Energie unabhängig vom Koordinatensystem} \\
 &= \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 + m\vec{v}' \cdot \vec{w} + \frac{1}{2}m\vec{w}^2 - V'(\vec{r}') \\
 &= L'(\vec{r}', \vec{v}', t)
 \end{aligned}
 \tag{2.142}$$

generalisierter Impuls im gestrichenen System

$$\begin{aligned}
 \vec{p}' &= \frac{\partial L'}{\partial \vec{v}'} = m(\vec{v}' + \vec{w}) = m\vec{v} = \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \\
 &\quad \text{ändert sich nicht, } \vec{p}' = \vec{p}, \text{ aber } \vec{p}' \neq m\vec{v}' \\
 &\quad \text{generalisierter Impuls } \neq \text{ kinetischer Impuls}
 \end{aligned}
 \tag{2.143}$$

Lagrangegleichung im gestrichenen System

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \vec{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial \vec{r}'} &= \frac{d}{dt} (m(\vec{v}' + \vec{w})) + \underbrace{\frac{\partial V'}{\partial \vec{r}'}}_{-\vec{F}' \text{ Kraft im gestrichenen System}} = 0 \\
 &\tag{2.144}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow abgeändertes Newtonsches Gesetz

$$\begin{aligned}
 \boxed{m \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{F}' - m\vec{a}} \quad \text{mit } \vec{a} = \frac{d\vec{w}}{dt} \text{ Beschleunigung des gestrichenen Systems} \\
 \underbrace{m\vec{a}}_{\text{Scheinkraft}}
 \end{aligned}
 \tag{2.145}$$

Gewichtsmessung im beschleunigten Fahrstuhl

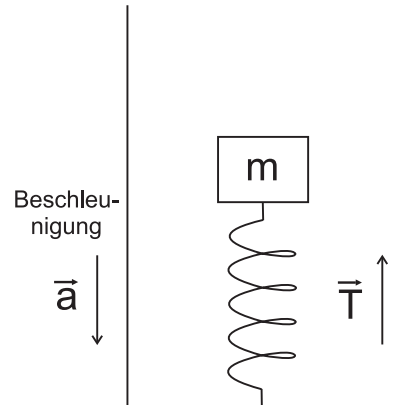


Abb. 56: $\vec{W} = m\vec{g} = \text{Gewicht}$

Gesucht wird die Federkraft \vec{T}

Bezüglich des Fahrstuhls hat die Masse m keine Beschleunigung.

$$0 = \underbrace{m\vec{g} + \vec{T}}_{\text{Gesamtkraft } \vec{F}'} - m\vec{a} \Rightarrow \vec{T} = -m(\vec{g} - \vec{a}) \quad (2.146)$$

2.4.2 Rotation

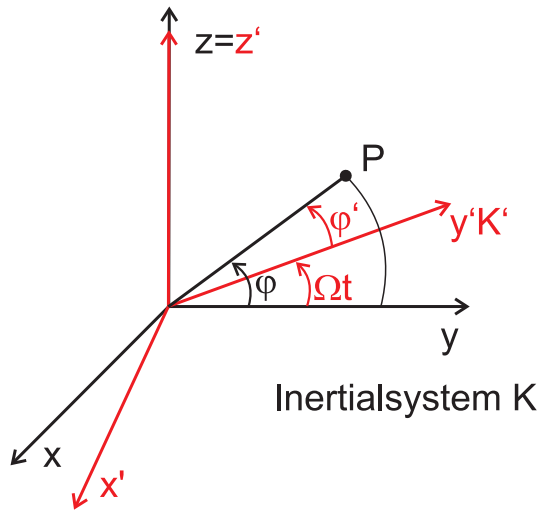
Gestrichenes System rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ relativ zum ungestrichenen Inertialsystem.

Wähle die Rotationsachse als z -Achse.

Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (\text{s. Zettel}) \\ \vec{v}^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 \\ L = T - V &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right) - V(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.147)$$

Übergang zu gestrichelten Koordinaten (Abb. 57):



$$\begin{aligned}
 r' &= r \\
 \vartheta' &= \vartheta \\
 \varphi' &= \varphi - \Omega t \\
 \Rightarrow \dot{\varphi}' &= \dot{\varphi} - \Omega
 \end{aligned}
 \tag{2.148}$$

Abb. 57

Einsetzen in L :

$$\begin{aligned}
 L' = T' - V' &= \frac{m}{2} \left(\dot{r}'^2 + r'^2 \dot{\vartheta}'^2 + r'^2 (\dot{\varphi}' + \Omega)^2 \sin^2 \vartheta' \right) - V'(\vec{r}') \\
 &= \frac{m}{2} \left(\vec{v}'^2 + \underbrace{2 r'^2 \dot{\varphi}' \Omega \sin^2 \vartheta'}_{\substack{\vec{v}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ \text{Coriolisterm}}} + \underbrace{r'^2 \Omega^2 \sin^2 \vartheta'}_{\substack{(\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 \\ \text{Zentrifugalterm}}} \right) - V'(\vec{r}')
 \end{aligned}
 \tag{2.149}$$

(ϑ ist der Winkel zwischen $\vec{\Omega}$ und \vec{r})

Beweis:

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= \begin{pmatrix} r' \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ r' \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ r' \cos \vartheta' \end{pmatrix} \\
\vec{\Omega} \times \vec{r}' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r' \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ r' \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ r' \cos \vartheta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega r' \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ +\Omega r' \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \\
(\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 &= \Omega^2 r'^2 \sin^2 \vartheta' (\sin^2 \varphi' + \cos^2 \varphi') = \Omega^2 r'^2 \sin^2 \vartheta' \\
\vec{v}' = \dot{\vec{r}}' &= \begin{pmatrix} \dot{r}' \sin \vartheta' \cos \varphi' + r' \dot{\vartheta}' \cos \vartheta' \cos \varphi' - r' \sin \vartheta' \dot{\varphi}' \sin \varphi' \\ \dot{r}' \sin \vartheta' \sin \varphi' + r' \dot{\vartheta}' \cos \vartheta' \sin \varphi' + r' \sin \vartheta' \dot{\varphi}' \cos \varphi' \\ \dot{r}' \cos \vartheta' - r' \dot{\vartheta}' \sin \vartheta' \end{pmatrix} \\
\vec{v}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') &= \Omega r' \sin \vartheta' \left[-\sin \varphi' \left(\dot{r}' \sin \vartheta' \cos \varphi' + r' \dot{\vartheta}' \cos \vartheta' \cos \varphi' - r' \sin \vartheta' \dot{\varphi}' \sin \varphi' \right) + \right. \\
&\quad \left. + \cos \varphi' \left(\dot{r}' \sin \vartheta' \sin \varphi' + r' \dot{\vartheta}' \cos \vartheta' \sin \varphi' + r' \sin \vartheta' \dot{\varphi}' \cos \varphi' \right) \right] \\
&= \Omega r' \sin \vartheta' \left[r' \sin \vartheta' \dot{\varphi}' (\sin^2 \varphi' + \cos^2 \varphi') \right] \\
&= \Omega r'^2 \sin^2 \vartheta' \dot{\varphi}'
\end{aligned} \tag{2.150}$$

Geometrische Interpretation (Abbildung 58):

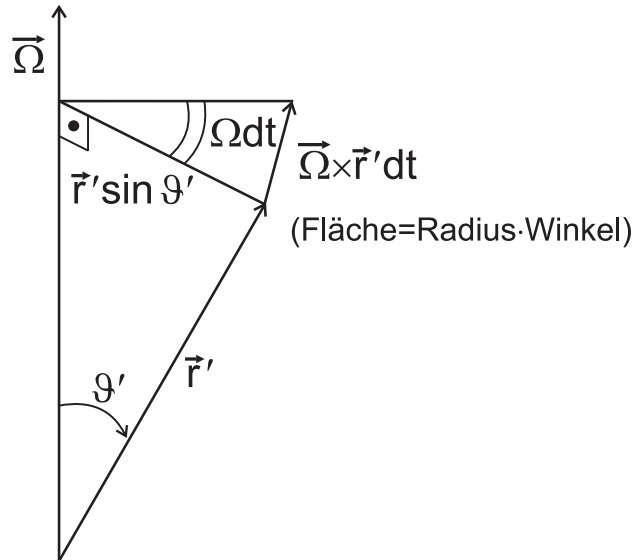


Abb. 58: Betrachte Ortsänderung im Zeitintervall dt

Lagrangegleichung:

$$L = \frac{m}{2} \left(\vec{v}'^2 + 2\vec{v}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + (\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 \right) - V'(\vec{r}')$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \vec{r}'} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \vec{r}'} = 0$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \vec{r}'} = -\frac{\partial V'}{\partial \vec{r}'} + \underbrace{m\vec{v}' \times \vec{\Omega}} + \frac{m}{2} \frac{d}{d\vec{r}'} (\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2$$

denn $m\vec{v}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = m\vec{r}' \cdot (\vec{v}' \times \vec{\Omega})$

$$\frac{d}{d\vec{r}'} \left(m\vec{r}' \cdot (\vec{v}' \times \vec{\Omega}) \right) = m\vec{v}' \times \vec{\Omega}$$

(2.151)

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'} \left[\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}' \right)^2 \right] &= \frac{\partial}{\partial x'} \left[(\Omega_{y'} z' - y' \Omega_{z'})^2 + (\Omega_{z'} x' - z' \Omega_{x'})^2 + (\Omega_{x'} y' - x' \Omega_{y'})^2 \right] \\
&= 2\Omega_{z'} (\Omega_{z'} x' - z' \Omega_{x'}) - 2\Omega_{y'} (\Omega_{x'} y' - x' \Omega_{y'}) \\
&= 2 \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}' \right)_{y'} \Omega_{z'} - \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}' \right)_{z'} \Omega_{y'} \\
&= 2 \left[\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}' \right) \times \vec{\Omega} \right]_{x'} \\
\text{Analog für } y, z \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r'} \left[\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}' \right)^2 \right] &= 2 \left[\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}' \right) \times \vec{\Omega} \right]
\end{aligned} \tag{2.152}$$

Damit gilt also:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \vec{r}'} &= -\frac{\partial V'}{\partial \vec{r}'} + m\vec{v}' \times \vec{\Omega} + m \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}' \right) \times \vec{\Omega} \\
\frac{\partial L'}{\partial \vec{v}'} &= m\vec{v}' + m\vec{\Omega} \times \vec{r}', \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \vec{v}'} \right) = m \frac{d\vec{v}'}{dt} + m\vec{\Omega} \times \vec{v}'
\end{aligned} \tag{2.153}$$

Lagrangegleichung:

$$\begin{aligned}
m \frac{d\vec{v}'}{dt} + m\vec{\Omega} \times \vec{v}' &= \underbrace{-\frac{\partial V'}{\partial \vec{r}'}}_{\text{Kraft } \vec{F}} + m\vec{v}' \times \vec{\Omega} + m \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}' \right) \times \vec{\Omega} \\
m \frac{d\vec{v}'}{dt} &= -\frac{\partial V'}{\partial \vec{r}'} + \underbrace{2m\vec{v}' \times \vec{\Omega}}_{\text{Corioliskraft}} + \underbrace{m \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}' \right) \times \vec{\Omega}}_{\text{Zentrifugalkraft}} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Scheinkräfte}}
\end{aligned} \tag{2.154}$$

Corioliskraft: 1835 hergeleitet von Gaspard Gustave de Coriolis (siehe auch Wikipedia)

Bewegung erscheint in K' so kompliziert, dass sie in K geradlinig ist.

Anwendung: Bewegung tangential zur Erdoberfläche

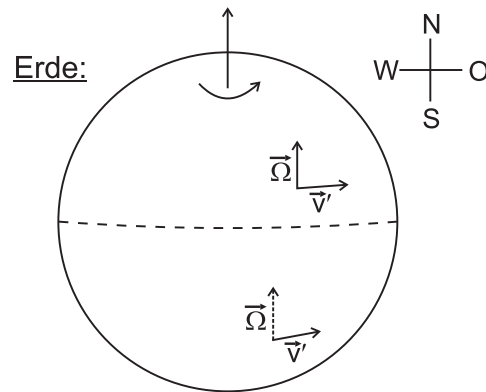


Abb. 59: \vec{v}' tangential zur Erdoberfläche, $\vec{\Omega}$ zeigt auf der Südhalbkugel in die Erde.

Behauptung:

Corioliskraft führt auf der Nordhalbkugel zu einer Rechtsabweichung, auf der Südhalbkugel zu einer Linksabweichung.

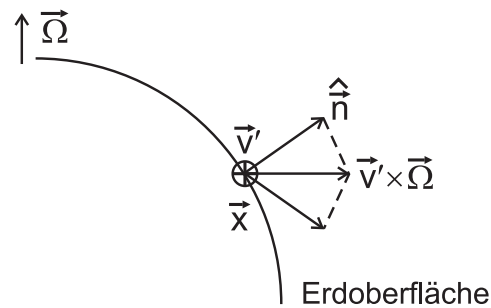


Abb. 60

Corioliskraft hat eine horizontale und eine vertikale Komponente. Die vertikale Komponente ist klein gegen die Gravitation (z.B. am Äquator mit Schallgeschwindigkeit fliegendes Flugzeug wird um $\frac{1}{1000}$ seines Gewichts leichter (nach Osten) oder schwerer (nach Westen)).

Tangentialkomponente von $\vec{v}' \times \vec{\Omega}$

$$\vec{x} = \vec{v}' \times \vec{\Omega} - \hat{n} \cdot \underbrace{\left[\left(\vec{v}' \times \vec{\Omega} \right) \cdot \hat{n} \right]}_{\substack{\text{Projektion} \\ \text{auf Vertikale}}} \quad (2.155)$$

$\hat{n} \rightarrow$ Vertikalrichtung

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \vec{x} &= 0 \\ \hat{n} \times \vec{x} &= \hat{n} \times \left(\vec{v}' \times \vec{\Omega} \right) = \vec{v}' \cdot \left(\hat{n} \cdot \vec{\Omega} \right) - \underbrace{\vec{\Omega} \cdot \left(\hat{n} \cdot \vec{v}' \right)}_{=0} \\ \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) &= \vec{b} \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) - \vec{c} \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \end{aligned} \quad (2.156)$$

$\hat{n} \cdot \vec{\Omega} > 0$ auf der Nordhalbkugel
 < 0 auf der Südhalbkugel

anderes VZ von $\vec{v}' \Rightarrow$ anderes VZ der Corioliskraft, d.h. sie wirkt immer nach rechts/links

Wetter:

Corioliskraft führt auf der Erdhalbkugel zu Drehung der Luftmassen im Uhrzeigersinn bei Hochdruckgebieten, im Gegenuhrzeigersinn bei Tiefdruckgebieten

Foucaultsches Pendel:

Auf der Nordhalbkugel wird Schwingungsebene durch Corioliskraft nach rechts gezogen.

\Rightarrow Schwingungsebene dreht sich

Badewanne:

aus „DIE ZEIT“ 26/1997, Autor Christoph Drösser:

Seltsamer Strudel

Auf der Südhalbkugel der Erde dreht sich der Badewannenstrudel andersrum als auf der Nordhalbkugel - Stimmts?

Stimmt nicht. Die Legenden über die wundersamen Auswirkungen der Corioliskraft sind vielfältig. So berichtet ein Afrika-Tourist von einem geschickten Eingeborenen eines am Äquator gelegenen Dorfes, der das folgende Kunststück vorführt: Er hält eine Schüssel mit Wasser, auf dem Blätter schwimmen. Durch ein Loch am Boden fließt das Wasser ab. Stellt er sich ein paar Meter nördlich des Äquators hin, so wirbeln die Blätter in der einen Richtung, ein paar Meter südlich des Äquators dreht sich der Strudel in der anderen Richtung. Steht der Mann genau auf dem Äquator, dann fließt das Wasser strudellos ab.

Wenn die Geschichte wahr ist und nicht selber eine Legende, dann ist der Mann ein geschickter Taschenspieler, der dem Wasser durch heimliche, unmerkliche Rotationsbewegungen die jeweils richtige Drehrichtung verpasste. Um die Corioliskraft wirksam werden zu lassen und andere Störkräfte dabei auszuschalten, hätte er (nach den Berechnungen eines Lesers einer amerikanischen Wissenschaftszeitschrift) die Schüssel auf eine Millionstel Bogensekunde genau (das sind 0,0000000003 Grad) waagrecht halten müssen.

Die Corioliskraft ist eine Trägheitskraft, die in allen rotierenden Systemen wirksam wird, und auf der Erde wirkt sie sich tatsächlich auf Strudel aus: Sie sorgt zum Beispiel dafür, dass auf der Nordhalbkugel die Winde alle Hochdruckgebiete im Uhrzeigersinn umwehen und alle Tiefdruckgebiete gegen den Uhrzeigersinn - auf der Südhalbkugel ist es dann genau umgekehrt. Dass die Corioliskraft in diesem Fall sichtbar in Erscheinung tritt, liegt vor allem an der großen Ausdehnung von Hoch- und Tiefdruckgebieten: Der nördliche und

der südliche Rand sind einfach weit genug voneinander entfernt, um einen Trägheitsunterschied wirksam zu machen. In der Badewanne dagegen übertrifft die Wirkung aller zufälligen Bewegungen, die durch die Wirbel beim Wassereinlassen (und beim Baden) entstanden sind, die der Corioliskraft um mehrere Größenordnungen (Professor John McCalpin von der University of Delaware schätzt den Faktor auf etwa 10 000). Um die Corioliskraft zu bemerken, müsste man nach Berechnungen des Mathematikers Michael Page von der australischen Monash University die Badewanne um den Faktor 500 vergrößern und das Wasser einige Tage zur Ruhe kommen lassen.

3 Hamilton-Jakobi-Mechanik

3.1 Hamilton-Gleichung, Kanonische Transformation

3.1.1 Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Voraussetzung:

Kräfte konservativ, $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$

$L = T - V$ nicht explizit zeitabhängig, $L = L(q, \dot{q})$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\substack{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ \text{nach Lagrange-} \\ \text{gleichung}}} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right) = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] \\ \text{Produktregel} &\rightarrow = \sum_j \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j \right] \\ \text{umgekehrt} & \\ \text{Also } 0 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} - L \right) = \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\sum_j p_j \dot{q}_j - L}_{\text{Erhaltungsgröße } H} \right] \\ &\quad \boxed{H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L} \quad \text{Hamilton-Funktion} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Was ist H?

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - L \tag{3.2}$$

Annahme:

Die Transformationsgleichungen von den kartesischen auf die generalisierten Koordinaten seien zeitunabhängig.

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_j) \\
 \Rightarrow \vec{v}_i &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{=0} \\
 T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j,k} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k}_{\text{hom. quadr. Form in den generalisierten Geschwindigkeiten}}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dann gilt der Satz von Euler:

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2T \tag{3.4}$$

Aus Gleichung (3.2) folgt:

$$H = 2T - (T - V) = T + V = \text{Energie} \tag{3.5}$$

Die Hamiltonfunktion lässt sich völlig analog auch für eine zeitabhängige Lagrangefunktion definieren.

Beispiel: Masse an Feder auf rotierender Stange (siehe Abbildung 61)

ebene Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) \\
 V &= \underbrace{mgr \sin \omega t}_{\text{Gravitation}} + \underbrace{\frac{1}{2} k (r - r_0)^2}_{\text{Feder}} \\
 L = T - V &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) - mgr \sin \omega t - \frac{k}{2} (r - r_0)^2 \\
 &= L(r, \dot{r}, t)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

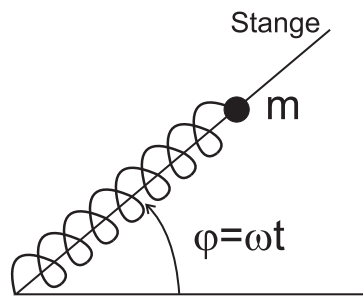


Abb. 61: Masse an Feder auf Stange, Stange bewegt sich im Schwerfeld mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω

Es gilt keine Energieerhaltung, da L explizit zeitabhängig ist. r ist der einzige Freiheitsgrad.

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$H = p_r \dot{r} - L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 - r^2 \omega^2) + mgr \sin \omega t + \frac{k}{2} (r - r_0)^2 \quad (3.7)$$

ist keine Erhaltungsgröße!

Rechnung ohne Gravitation, $g = 0$

$\Rightarrow H$ ist erhalten, aber $H \neq T + V$ da Zeitabhängigkeit der Koordinatentransformation.

Lagrange $L = L(q, \dot{q}, t)$

$$\Downarrow \boxed{\text{Legendre-Transformation}} \text{ mit } p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (3.8)$$

Hamilton $H = H(q, p, t)$

Legendre-Transformation = Übergang von einem Set unabhängiger Koordinaten auf ein anderes, hier: $(q, \dot{q}, t) \rightarrow (q, p, t)$

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}_i(q, p, t), t)$$

totales Differential bilden

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \cancel{p_i} d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i} dq_i - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \cancel{d\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &\Rightarrow \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{3.9}$$

Durch Koeffizientenvergleich (unabh. Koordinaten) folgen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}} \tag{3.10}$$

bei n Freiheitsgraden:

Hamilton = $2n$ DGL 1.Ordnung

Lagrange = n DGL 2.Ordnung

Beispiel: Harmonischer Oszillator:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 = L(x, \dot{x}) \tag{3.11}$$

Im Hamiltonformalismus muss \dot{x} durch p_x ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
 p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, & \dot{x} &= \frac{p_x}{m} \\
 H = \dot{x}p_x - L &= \frac{p_x^2}{m} - \frac{m}{2} \underbrace{\dot{x}^2}_{\frac{p_x^2}{m^2}} + \frac{k}{2}x^2 = \frac{p_x^2}{m} + \frac{k}{2}x^2
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\
 \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

- keine zusätzliche Information gegenüber Lagrangeformalismus
- grundsätzliche Bedeutung, z.B. Analogien zur Quantenmechanik (Hamiltonoperator oder "Hamiltonian")

Geometrische Bedeutung und Eindeutigkeit der Legendretransformation

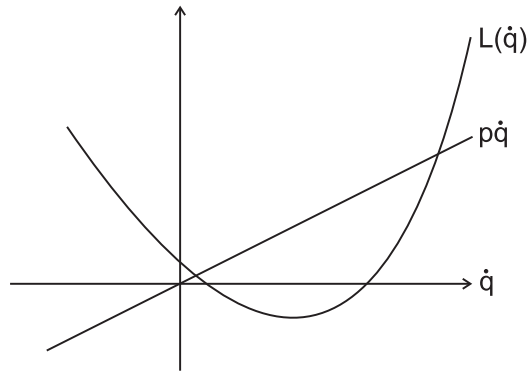


Abb. 62: $H(p) = p\dot{q} - L(\dot{q})$, p sei Parameter

Extremum von $p\dot{q} - L(\dot{q})$ als Funktion von \dot{q} :

$$p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{Definition des kanonisch konjugierten Impulses}
 \tag{3.14}$$

eindeutige Auflösbarkeit von $\dot{q}(p)$, falls $L(\dot{q})$ genau ein Extremum hat, d.h. keine Wendepunkte, $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0$

Bei mehreren Freiheitsgraden lautet die entsprechende Bedingung

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0$$

Behauptung: Die Hamiltonfunktion $H(q_i, p_i, t)$ hängt, wenn überhaupt, nur explizit von der Zeit ab.

Beweis:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{-\dot{p}_i} \dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{\dot{q}_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.15)$$

D.h. H ist eine Erhaltungsgröße, wenn es nicht explizit von der Zeit abhängt.

Sind die Transformationsgleichungen zeitunabhängig, so ist H die Energie.

Ist q_i zyklisch, so ist p_i eine Erhaltungsgröße:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow p_i = \text{konstant} \quad (3.16)$$

3.1.2 Invarianz der Hamiltongleichung unter einer kanonischen Transformation

Vorübung: Invarianz unter einer Punkttransformation

(z.B. kartesisch \rightarrow sphärisch)

Wir zeigen, dass aus der Lagrangeleichung in alten Koordinaten die Lagrangeleichung in neuen Koordinaten folgt!

$$\begin{aligned}
Q_j &= Q_j(q_i, t) \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(Q_j, \dot{Q}_j, t) &= \frac{d}{dt} \left[\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j} \underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}}_{\substack{=0 \\ \text{nach Vor.}}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial \dot{q}_i}}_{\substack{\text{Zeit ist Parameter,} \\ \text{Geschw. unabhängig}}} \right) \right] \\
&= \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} \right] \stackrel{\text{siehe NR}}{=} \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right] \\
\text{NR: } Q_j &= Q_j(q_k, t) \\
\dot{Q}_j &= \sum_k \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Q_j}{\partial t} \stackrel{\text{abl. nach } \dot{q}_i}{\Rightarrow} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(Q_j, \dot{Q}_j, t) \right) &= \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right] \\
&= \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \right) \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right)}_{\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i}} \right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Für die alten Koordinaten gilt die Lagrangegleichung: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_i}(Q_j, \dot{Q}_j, t) &= \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i} \right) \\
&\stackrel{\text{Gl. (3.17)}}{=} \sum_j \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \right) \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i} \right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Da die Vorfaktoren gleich sind und die $\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$ unabhängig, muss gelten:

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial Q_j}$, d.h. die alte Lagrangegleichung ist genau gleich der neuen.

Es müssen nur die neuen Variablen eingesetzt werden.

Bei einer allgemeinen Transformation werden Ort und Impuls transformiert.

3.1.3 Kanonische Transformationen

$$\begin{aligned}
 Q_j &= Q_j(q_i, p_i, t) \\
 P_j &= P_j \underbrace{(q_i, p_i, t)}_{2n+1 \text{ unabh. Variable}}
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

$i = 1, \dots, n$ n Freiheitsgrade $2n$ Transformationsgleichungen

Solche Transformationen heißen kanonisch, wenn es eine transformierte Hamiltonfunktion $K(Q, P, t)$ gibt, so dass wieder die Hamiltonschen Gleichungen gelten. Deshalb heißen die Hamiltonschen Gleichungen auch kanonische Gleichungen.

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_j &= \frac{\partial K}{\partial P_j} \\
 \dot{P}_j &= -\frac{\partial K}{\partial Q_j}
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Was ist K?

Hamiltonsche Gleichungen \Leftrightarrow Lagrangegleichung \Leftrightarrow Hamiltonsches Prinzip
(koordinatenfrei)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \dot{q}_i p_i - H(q, p, t) \right) dt = 0
 \tag{3.21}$$

Hieraus sind durch Variation von q, p die Hamiltonschen Gleichungen direkt herleitbar.

Damit muss auch gelten:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \dot{Q}_j P_j - K(Q, P, t) \right] dt = 0
 \tag{3.22}$$

Im Hamiltonschen Prinzip sind die Integranden (d.h. die Lagrangeftk.) nur bis auf die totale Zeitableitung einer Funktion F bestimmt.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta (F(t_2) - F(t_1)) = 0, \quad \text{da die Variation an den Endpunkten verschwindet} \quad (3.23)$$

Also gilt:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_j P_j \dot{Q}_j - K + \frac{dF}{dt} \quad (3.24)$$

F könnte eine Funktion sein von $F(q, p, Q, P, t)$. Von den $4n + 1$ Variablen sind $2n + 1$ unabhängig. F heißt erzeugende Funktion. Man unterscheidet 4 Klassen von Transformationen:

(1) $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{t})$

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (3.25)$$

Einsetzen:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (3.26)$$

Alte und neue Koordinaten sind für sich jeweils linear unabhängig, H, K hängen von Geschwindigkeit nicht ab, Koeffizientenvergleich vor \dot{q}_i, \dot{Q}_i

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}(q, Q, t) \\ p_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}(q, Q, t) \end{array}} \quad \begin{array}{l} 2n \text{ implizite} \\ \text{Transformationsgleichungen} \end{array} \quad (3.27)$$

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad \begin{array}{l} \text{Zusammenhang zwischen alter} \\ \text{und neuer Hamiltonfunktion} \end{array}$$

Zusammenhang zwischen alten und neuen Impulsen:

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \right)_{\underbrace{q, Q_{k \neq j}, t}_{\text{sind konstant}}} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} = - \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right)_{Q, Q_{k \neq i}, t} \quad (1) \quad (3.28)$$

Beispiel für Erzeugende F_1 :

$$\begin{aligned}
 F_1 = \sum_i q_i Q_i &\Rightarrow p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i \\
 P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Dieses F_1 vertauscht (bis auf Vorzeichen) Koordinaten mit Impulsen, d.h. was man Koordinate und was Impuls nennt, ist willkürlich. Koordinaten und Impulse spannen zusammen den $2n$ -dimensionalen Phasenraum auf.

Wendet man dieses $F_1 = \sum_i q_i Q_i$ auf (1) an, so erhält man Gleichungen für $F_4 = F_4(p, P, t)$.

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \right) = - \left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right) \tag{4}$$

Alle Gleichungen für F_4 kann man somit aus F_1 herleiten.

(2) $\mathbf{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$

Erinnerung: Legendre-Transformation:

$$\begin{aligned}
 L(q, \dot{q}, t) \text{ mit } p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\
 &\downarrow \\
 H(q, p, t) &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Hier gleiches Problem:

$$\begin{aligned}
 F_1(q, Q, t) \text{ mit } P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\
 &\downarrow \\
 F_2(q, P, t) &= F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

Dieses F_2 setzen wir ein in:

$$\begin{aligned}
\sum_i p_i \dot{q}_i - H &= \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} \\
\Rightarrow \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) &= \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{dF_2}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\sum_i P_i Q_i \right) \\
\frac{dF_2}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\
\frac{d}{dt} \left(\sum_i P_i Q_i \right) &= \sum_i \left(P_i \dot{Q}_i + \dot{P}_i Q_i \right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Einsetzen:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \sum_i \cancel{P_i \dot{Q}_i} - K(Q, P, t) + \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \sum_i \cancel{P_i \dot{Q}_i} - \sum_i \dot{P}_i Q_i \tag{3.34}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
\text{Glieder mit } \dot{q}_i &: \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\
\text{Glieder mit } \dot{P}_i &: \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \\
K &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Analog zu F_1 erhält man durch zweimaliges Ableiten und Vertauschen

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial P_k} \right) = \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial P_k \partial q_i} \right) = \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \right) \quad (2) \tag{3.36}$$

Beispiel:

$$F_2 = \sum_i q_i P_i$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i \quad \text{erzeugt die Identität}$$

Für $F_3(p, Q, t)$ erhält man durch Vertauschen von $(q, p) \leftrightarrow (Q, P)$

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k} \right) = \left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \right) \quad (3)$$

(3.37)

Zusammenfassung der erzeugenden Funktionen

Erzeugende	Zusammenhang neuer und alter Koordinaten	
$F_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$\left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \right) = -\left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right)$
$F_2(q, P, t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$\left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \right) = \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right)$
$F_3(p, Q, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \right) = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right)$
$F_4(p, P, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \right) = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$
	Zeitabhängigkeit ist immer $K = H + \frac{\partial F_i}{\partial t}$	

Beispiel: Harmonischer Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2, \quad k = m\omega^2$$

kanonische Transformation mit erzeugender Funktion $F_1 = \frac{m}{2}\omega q^2 \cot Q$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad (*)$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \quad \text{nach } q \text{ auflösen}$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P \sin^2 Q}{m\omega}} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

einsetzen in (*)

$$\Rightarrow p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

$K(Q, P) = H(q, p)$, da H, F_1 nicht explizit zeitabhängig, $H, K = \text{Gesamtenergie } E$

$$\begin{aligned} K(Q, P) &= \frac{1}{2m} \cdot 2m\omega P \cos^2 Q + \frac{m\omega^3}{2} \cdot \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q \\ &= \omega P (\sin^2 Q + \cos^2 Q) = \omega P \end{aligned}$$

(3.38)

Q ist zyklisch, d.h. P ist erhalten.

Pysikalisch liegt dies daran, dass $P = \frac{E}{\omega} = \frac{\text{Gesamtenergie}}{\text{Konstante}}$ ist.

$$\begin{aligned} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega &\Rightarrow Q = \omega t + \alpha \\ q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (3.39)$$

D.h. die Transformation F_1 führt auf einen neuen Impuls P , der eine Erhaltungsgröße ist. Die Bewegungsgleichungen werden sehr einfach. Wir werden uns noch mit der Frage befassen, ob das immer geht.

3.1.4 Poissonklammern

Behauptung: Orthogonale Punkttransformationen $Q_i = \sum_k a_{ik} q_k$ werden durch

$F_2 = \sum_{ik} a_{ik} P_i q_k$ erzeugt.

Beweis:

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \sum_k a_{ik} q_k \quad \text{q.e.d.} \quad (3.40)$$

Betrachte $f(q, p, t)$

totale zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &\quad \text{Hamiltonsche Gleichungen } \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \Rightarrow \frac{df}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Definition: Poissonklammer $[f, g]_{q,p} \rightarrow \text{unabh\u00e4ng. Variablen} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$

$$\boxed{\frac{df}{dt} = [f, H]_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial t}} \quad (3.41)$$

Hamiltongleichungen mit Poissonklammern schreiben:

$$\left. \begin{aligned} f &= q_i \\ \frac{df}{dt} &= \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q_i, H] \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} f &= p_i \\ \frac{df}{dt} &= \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = [p_i, H] \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Beispiele für Poissonklammern:

$$[q_i, q_j]_{q,p} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0, \text{ da } p,q \text{ unabhängig}} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = 0$$

Analog $[p_i, p_j]_{q,p} = 0$ (3.43)

$$[q_i, p_j]_{q,p} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Zu zeigen: Invarianz von $[f, g]$ unter kanonischer Transformation

Benutze $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$

Weg zum Ziel: geometrische Formulierung (Hilfsmittel der LA)

Definiere einen Vektor im $2n$ -dimensionalen Phasenraum

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Hamiltonsche Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{y}_i = \frac{\partial H}{\partial y_{n+i}}, & i = 1 \dots n \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{y}_{n+i} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Wir definieren $\vec{I} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$ (Transportmatrix / symplektische Matrix)

und können damit schreiben:

$$\boxed{\dot{\vec{y}} = \vec{I} \frac{\partial H}{\partial \vec{y}}} \quad (3.46)$$

Eigenschaften von \vec{I} : $\vec{I}^2 = -\mathbb{1}_{2n}$ und $\vec{I}^t = -\vec{I}$

Gesucht wird jetzt die Matrix \vec{M} einer kanonischen Transformation.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{M}} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{Q} \\ \vec{P} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$\vec{x} = \vec{x}(\vec{y})$ ist i.a. keine lineare Funktion von \vec{y} , d.h. die Abbildung ist nicht durch eine Matrix darstellbar. Die Abbildung kann jedoch linearisiert werden durch Betrachtung der infinitesimalen Abbildung.

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \delta y_j = \sum_j M_{ij} \delta y_j \\ \Rightarrow \boxed{\delta \vec{x} = \vec{M} \delta \vec{y} \text{ mit } M_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

inverse Transformation: $\delta \vec{y} = \vec{M}^{-1} \delta \vec{x}$, $(M^{-1})_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$

Eigenschaften einer kanonischen Transformation

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} &= -\frac{\partial P_k}{\partial q_i} & (2) \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} &= \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \\ (3) \quad \frac{\partial P_i}{\partial p_k} &= \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} & (4) \quad \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} &= -\frac{\partial q_k}{\partial P_i} \end{aligned} \quad (3.49)$$

kompakte Schreibweise

$$-\vec{I} \vec{M} = \left(\vec{I} \vec{M}^{-1} \right)^t \quad (3.50)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\text{linke Seite: } -\vec{I}\vec{M} &= - \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial q} & -\frac{\partial P}{\partial p} \\ \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \end{pmatrix} \quad \text{mit Abh. } \frac{\partial Q}{\partial q} = \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right) \\
\text{rechte Seite: } \left(\vec{I}\vec{M}^{-1} \right)^t &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} \right]^t \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \\ -\frac{\partial q}{\partial Q} & -\frac{\partial q}{\partial P} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)^t & -\left(\frac{\partial q}{\partial Q} \right)^t \\ \left(\frac{\partial p}{\partial P} \right)^t & -\left(\frac{\partial q}{\partial P} \right)^t \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Vergleich der linken und rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\text{links oben} \quad -\frac{\partial P_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \quad (1) \\
\text{rechts oben} \quad \frac{\partial P_i}{\partial p_j} &= \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \quad (3) \\
\text{links unten} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \quad (2) \\
\text{rechts unten} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} &= -\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \quad (4)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Konsequenz:

$$\vec{I}\vec{M} = - \left(\vec{I}\vec{M}^{-1} \right)^t = - \left(\vec{M}^{-1} \right)^t \vec{I}^t = \left(\vec{M}^{-1} \right)^t \cdot \vec{I} \tag{3.53}$$

Also:

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{M}^{-1} \right)^t \cdot \vec{I} = \vec{I} \cdot \vec{M} \\
\Rightarrow \underbrace{\vec{M}^t \left(\vec{M}^{-1} \right)^t}_{= \left(\vec{M}^{-1} \cdot \vec{M} \right)^t} \vec{I} &= \vec{M}^t \vec{I} \vec{M} \\
&= \left(\vec{M}^{-1} \cdot \vec{M} \right)^t = \mathbb{1} \\
\Rightarrow \vec{I} &= \vec{M}^t \cdot \vec{I} \cdot \vec{M}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

d.h. jede infinitesimale kanonische Transformation lässt die symplektische Matrix \vec{I} invariant.

Menge $M := \left\{ \vec{M} : \vec{M}^t \vec{I} \vec{M} = \vec{I} \right\}$ ist eine Gruppe im \mathbb{R}^{2n} und wird symplektische Gruppe $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ genannt.

Prüfung der Gruppeneigenschaften:

Abgeschlossenheit:

a) Gegeben seien: $\vec{M}_1, \vec{M}_2 \in Sp_{2n}$

z.Z.: $\vec{M}_3 = \vec{M}_2 \cdot \vec{M}_1 \in Sp_{2n}$

Beweis:
$$\begin{aligned} \vec{M}_3^t \vec{I} \vec{M}_3 &= \left(\vec{M}_2 \cdot \vec{M}_1 \right)^t \vec{I} \left(\vec{M}_2 \cdot \vec{M}_1 \right) = \\ &= \vec{M}_1^t \underbrace{\vec{M}_2^t \vec{I} \vec{M}_2}_{=\vec{I} \text{ da } \vec{M}_2 \in Sp_{2n}} \vec{M}_1 = \vec{M}_1^t \vec{I} \vec{M}_1 = \vec{I}, \text{ da } \vec{M}_1 \in Sp_{2n} \end{aligned}$$

Existenz der 1:

b) z.Z.: $\underline{1}_{2n} \in Sp_{2n}$

Beweis: $\underline{1}^t \cdot \vec{I} \cdot \underline{1} = \vec{I}$

Existenz des Inversen:

c) z.Z.: $\vec{M}^{-1} \in Sp_{2n}$ wenn $\vec{M} \in Sp_{2n}$

Beweis:
$$\begin{aligned} &\left(\vec{M}^{-1} \right)^t \vec{I} \vec{M}^{-1} \stackrel{?}{=} \vec{I} \\ \Leftrightarrow &\underbrace{\vec{M}^t \cdot \left(\vec{M}^{-1} \right)^t}_{\underline{1}} \cdot \vec{I} \cdot \underbrace{\vec{M}^{-1} \cdot \vec{M}}_{\underline{1}} = \vec{M}^t \cdot \vec{I} \cdot \vec{M} \\ \Leftrightarrow &\vec{I} = \vec{M}^t \vec{I} \vec{M} \end{aligned}$$

D.h. Beweis folgt bei Schlussfolgerung
in umgekehrter Reihenfolge.

(3.55)

\vec{I} definiert eine Metrik im Phasenraum

$$(\vec{X}, \vec{Y}) := \vec{X}^t \vec{I} \vec{Y} = \sum_{ij} x_i I_{ij} y_j \quad (3.56)$$

Eigenschaften der Metrik:

a) (\vec{X}, \vec{Y}) ist schiefsymmetrisch: $(\vec{X}, \vec{Y}) = -(\vec{Y}, \vec{X})$

Beweis:

$$\begin{aligned} (\vec{X}, \vec{Y}) &= \sum_{ij} x_i I_{ij} y_j \stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \sum_{ij} x_j I_{ji} y_i = \\ &= - \sum_{ij} x_j I_{ij} y_i = - \sum_{ij} y_i I_{ij} x_j = -(\vec{Y}, \vec{X}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

b) (\vec{X}, \vec{Y}) ist invariant unter kanonischen Transformationen $\vec{M} \in Sp_{2n}$:

$$(\vec{M}\vec{X}, \vec{M}\vec{Y}) = (\vec{X}, \vec{Y})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (\vec{M}\vec{X}, \vec{M}\vec{Y}) &= (\vec{M}\vec{X})^t \vec{I} (\vec{M}\vec{Y}) = \vec{X}^t \underbrace{\vec{M}^t \vec{I} \vec{M}}_{\vec{I}} \vec{Y} \\ &= \vec{X}^t \vec{I} \vec{Y} = (\vec{X}, \vec{Y}) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Jetzt zu zeigen: Invarianz der Poissonklammer unter kanonischen Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial p_n} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial g}{\partial \vec{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

Es gilt: $[f, g]_{qp} = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}, \frac{\partial g}{\partial \vec{y}} \right)$

denn $\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}, \frac{\partial g}{\partial \vec{y}} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}} \right)^t \vec{I} \left(\frac{\partial g}{\partial \vec{y}} \right) =$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n} \right) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial q_n} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial p_1} \dots -\frac{\partial f}{\partial p_n} \quad \frac{\partial f}{\partial q_1} \dots \frac{\partial f}{\partial q_n} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial q_n} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = [f, g]_{qp}$$

(3.59)

Analog gilt: $[f, g]_{QP} = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \right)$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{Q} \\ \vec{P} \end{pmatrix}$

und $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}} = \vec{M} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}$, $\frac{\partial g}{\partial \vec{y}} = \vec{M} \frac{\partial g}{\partial \vec{x}}$ weil $\delta \vec{x} = \vec{M} \delta \vec{y}$ (3.60)

Also: $[f, g]_{qp} = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}, \frac{\partial g}{\partial \vec{y}} \right) = \left(\vec{M} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}, \vec{M} \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \right) =$
 $= \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \right) = [f, g]_{QP}$

Man kann also schreiben:

$$[f, g]_{qp} = [f, g]_{QP} =: [f, g] \quad \begin{array}{l} \text{da in jeder beliebigen Basis auswertbar} \\ \text{wenn } q,p \leftrightarrow Q,P \text{ kanonische Transformation} \end{array} \quad (3.61)$$

Man kann auch zeigen:

Eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn die fundamentalen Poisson-Klammern erhalten bleiben.

Eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn

$$[Q_i, Q_j]_{qp} = 0 \quad [P_i, P_j]_{qp} = 0 \quad [Q_i, P_j]_{qp} = \delta_{ij}. \quad (3.62)$$

3.2 Symmetrien und Erhaltungssätze

3.2.1 Infinitesimale kanonische Transformationen

$$Q_i = q_i + dq_i, \quad P_i = p_i + dp_i$$

dq_i, dp_i seien klein (\leftrightarrow Taylorentwicklung)

Die Transformation werde erzeugt durch:

$$F_2(q, P, t) \cong \underbrace{\sum_i q_i P_i}_{\text{erzeugt die Identität}} + \varepsilon \underbrace{G(q, P, t)}_{\text{Erzeugende für infinitesimale Transformation}} \quad (3.63)$$

ε ist klein, von der Ordnung wie dq, dp

Vereinfachung: Linearisierung, d.h. alle Effekte der Ordnung $0(\varepsilon^n)$, $n > 1$, werden vernachlässigt!

$$\begin{aligned}
 p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \Rightarrow P_i - p_i = dp_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \\
 Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \simeq q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \\
 &\text{denn } P_i \simeq p_i \text{ in Termen } 0(\varepsilon^1) \text{ von der Ordnung } \varepsilon, \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

da der Unterschied schon von der Ordnung ε^2 ist.

$$\Rightarrow dq_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$G \simeq G(q, p, t)$, d.h. bei infinitesimalen kanonischen Transformationen sind alte und neue Koordinaten verwechselbar.

Effekt der infinitesimalen kanonischen Transformation auf $f(q, p, t)$

$$\begin{aligned}
 df &= f(q + dq, p + dp, t + dt) - f(q, p, t) \\
 &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\
 &= \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\
 \Rightarrow df &= \varepsilon [f, G] + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

Zusammenhang Hamiltonsche Bewegungsgleichung \leftrightarrow kanonische Transformationen

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{bereits hergeleitet})$$

$$df = \frac{df}{dt} dt = dt [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} dt \stackrel{\text{Gl. 3.65}}{=} \varepsilon [f, G] + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{H \text{ ist Erzeugende einer infinitesimalen kanonischen Transformation.}}$$

(3.66)

Speziell:

$$\begin{aligned} dq_i &= [q_i, H] dt = \dot{q}_i dt = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \\ dp_i &= [p_i, H] dt = \dot{p}_i dt = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt \end{aligned} \quad (3.67)$$

Energieerhaltung

$$dH = \underbrace{[H, H]}_{=0} dt + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad \text{d.h.} \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.68)$$

H ist, wenn überhaupt, nur explizit von der Zeit abhängig.

$\frac{dH}{dt} = 0$ gilt, wenn H nicht explizit von t abhängt.

\Leftrightarrow Energieerhaltung, $H = \text{Energie}$, wenn Transformation auf generalisierte Koordinaten nicht explizit zeitabhängig.

3.2.2 Erhaltungsgrößen, Symmetrien und Invarianzen

Sei $G = G(q, p)$ nicht explizit von t abhängig,

dann gilt folgende Äquivalenz: $\frac{dG}{dt} = 0 \Leftrightarrow [G, H] = 0 \Leftrightarrow G$ erhalten.

aber auch: $G(q, p)$ ist Erzeugende einer infinitesimalen kanonischen Transformation.

Betrachte:

$$q_i \rightarrow Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad p_i \rightarrow P_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (3.69)$$

Änderung von H :

$$\begin{aligned} H(q_i, p_i) &\rightarrow H\left(q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}\right) \\ &\cong H(q_i, p_i) + \underbrace{\varepsilon [H, G]}_{=dH, \text{ wenn } \frac{\partial H}{\partial t} = 0} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Wenn G Erhaltungsgröße ist, lässt es H invariant, $dH = 0$ („Symmetrietransformation“).

umgekehrt: Sei $G =$ Symmetrietransformation, d.h. $dH = 0 \Rightarrow [H, G] = 0 \Rightarrow G$ ist Erhaltungsgröße

Beispiele:

	G	Symmetrie
(1)	H	Zeit-Translation
(2)	P	Raum-Translation
(3)	$\vec{L} \cdot \vec{n}$	Drehung um Achse \vec{n}
(4)	$\vec{P}t - M\vec{R}$	Galilei-Transformation

zu (1)

$$G = H, \quad H(q, p, t) = H(q, p, t + dt), \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.71)$$

$$\Rightarrow dH = [H, H] dt = 0$$

zu (2)

$G = P$ mit $P = \sum_i p_i = P_{CM}$ Schwerpunktimпульs, Gesamtimpuls

$$\left. \begin{aligned} dp_i &= -\varepsilon \frac{\partial P}{\partial q_i} = 0 \\ dq_i &= \varepsilon \frac{\partial P}{\partial p_i} = \varepsilon \end{aligned} \right\} \text{Verschiebung im Ortsraum um } \varepsilon$$

P ist Erzeugende einer Translation.

umgekehrt sei $H(q_i + \varepsilon, p_i) = H(q_i, p_i)$ (3.72)

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \underbrace{[P, H]}_{dH=0} = - \sum_i \frac{\partial P}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\text{und } dP = \underbrace{[P, H]}_{=0} dt + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}}_{=0, \text{ nicht explizit zeitabh.}} dt = 0 \quad \text{Impulserhaltung}$$

zu (3) $G = \vec{L} \cdot \hat{n}$

$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ Gesamtdrehimpuls

z.Z. $G = \vec{L} \cdot \hat{n}$ erzeugt eine Drehung des Koordinatensystems

Vereinfachung: Drehung um die z -Achse

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X = x \cos \vartheta - y \sin \vartheta \\ Y = x \sin \vartheta + y \cos \vartheta \\ Z = z \end{pmatrix}$$

infinitesimale Transformation, $\vartheta \ll 1 \Rightarrow \cos \vartheta \simeq 1, \sin \vartheta \simeq \vartheta$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X = x - y\vartheta \\ Y = x\vartheta + y \\ Z = z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} dx &= -\vartheta y \stackrel{!}{=} \vartheta \frac{\partial G}{\partial p_x} \\ dy &= \vartheta x \stackrel{!}{=} \vartheta \frac{\partial G}{\partial p_y} \\ dz &= 0 \stackrel{!}{=} \vartheta \frac{\partial G}{\partial p_z} \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\Rightarrow G = xp_y - yp_x = (\vec{r} \times \vec{p})_z = L_z$$

analog für x_i, y_i, z_i , gleicher Winkel ϑ für alle i

$$\Rightarrow G = \sum_i l_{i,z} = L_z \quad \begin{array}{l} \text{Erzeugende der infinitesimalen} \\ \text{Drehung um die } z\text{-Achse} \end{array}$$

Verallgemeinerung: $G = \vec{L} \cdot \hat{n}$ ist die Erzeugende der Drehung um beliebige Achse \hat{n}

Drehinvarianz von Skalarprodukten

$$[\vec{r} \cdot \vec{r}, L_z] = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ [\vec{r} \cdot \vec{r}, L_z] &= [x^2 + y^2 + z^2, xp_y - yp_x] = \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial p_i} (xp_y - yp_x) = \\ &= 2x \cdot (-y) + 2y \cdot x = 0 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \quad (3.74)$$

analog kann man zeigen:

$$\begin{aligned}
 [\vec{r} \cdot \vec{r}, L_x] &= [\vec{r} \cdot \vec{r}, L_y] = 0 \\
 \text{d.h. } [\vec{r}^2, \vec{L} \cdot \hat{n}] &= 0, \quad \text{Achse } \hat{n} \text{ beliebig} \\
 \text{analog } [\vec{p}^2, \vec{L} \cdot \hat{n}] &= 0 \\
 [\vec{r} \cdot \vec{p}, \vec{L} \cdot \hat{n}] &= 0
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Alle Skalarprodukte aus Orten und Impulsen sind drehinvariant (trivial, da Skalarprodukte nach Definition drehinvariant sind).

Drehinvarianz von H:

$$[H, \vec{L} \cdot \hat{n}] = 0 \Leftrightarrow H = H \underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j, \vec{r}_i \cdot \vec{p}_j, \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j)}_{\text{nur Skalarprodukte}} \tag{3.76}$$

Dreh- und Translationsinvarianz:

$$H = H((\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_l), (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{p}_k, \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j) \tag{3.77}$$

H darf nur eine Funktion von Skalarprodukten mit Differenzen in \vec{r}_i sein.

Drehinvarianz von Drehungen:

$$\begin{aligned}
 [L_x, L_y] &= \underbrace{[yp_z - zp_y, zp_x - xp_z]}_{\text{nur } zp_z \text{ gemeinsam}} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial z} (yp_z - zp_y) \frac{\partial}{\partial p_z} (zp_x - xp_z) - \frac{\partial}{\partial z} (zp_x - xp_z) \frac{\partial}{\partial p_z} (yp_z - zp_y) \\
 &= +p_y x - p_x y = L_z
 \end{aligned}$$

Also: $[L_x, L_y] = L_z$ (3.78)

Zyklisch vertauschbar:

$$\left. \begin{aligned} [L_x, L_y] &= L_z \\ [L_y, L_z] &= L_x \\ [L_z, L_x] &= L_y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Drehimpuls-Algebra} \\ &= \text{Lie-Algebra der Drehgruppe SO3} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Also $[L_x, L_y] \neq 0$, d.h. Drehungen sind nicht drehinvariant und nicht vertauschbar, Reihenfolge der Drehungen ist wichtig.

zu (4) Galilei-Invarianz

Bewegung mit infinitesimaler gleichförmiger Geschwindigkeit $\vec{\varepsilon} = d\vec{v}$

(symbolische Vektordarstellung)

System aus N Teilchen, Translationsinvarianz

$$\begin{aligned} d\vec{r}_i &= t d\vec{v} \stackrel{!}{=} \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{p}_i} d\vec{v} \\ d\vec{p}_i &= m_i d\vec{v} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{r}_i} d\vec{v} \\ \stackrel{\text{integrieren}}{\Rightarrow} \vec{G} &= \sum_i (\vec{p}_i t - m_i \vec{r}_i) \\ \vec{P}_{CM} &= \sum_i \vec{p}_i, \quad \vec{R}_{CM} = \sum_i \frac{m_i}{M} \vec{r}_i \\ \Rightarrow \vec{G} &= \vec{P}_{CM} t - M \vec{R}_{CM}, \text{ d.h. } \vec{G} \text{ hängt explizit von der Zeit ab!} \\ \frac{d\vec{G}}{dt} &= [\vec{G}, H] + \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} = \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{r}_i}}_{-m_i} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}}_{\dot{\vec{r}}_i} - \underbrace{\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{p}_i}}_t \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i}}_{-\dot{\vec{p}}_i} \right) + \vec{P}_{CM} \\ &= \sum_i \left(-m_i \dot{\vec{r}}_i + t \dot{\vec{p}}_i \right) + \vec{P}_{CM} = -M \dot{\vec{R}}_{CM} + t \dot{\vec{P}}_{CM} + \vec{P}_{CM} \\ \dot{\vec{P}}_{CM} &= 0 \quad \text{wegen Translationsinvarianz (Voraussetzung)} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{G}}{dt} &= -M \dot{\vec{R}}_{CM} + \vec{P}_{CM} \\ \text{wenn } \frac{d\vec{G}}{dt} &= 0 \Leftrightarrow \vec{G} \text{ Erhaltungsgröße} \Leftrightarrow \vec{P}_{CM} = M \dot{\vec{R}}_{CM} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Änderung der Hamiltonfunktion unter Galilei-Transformationen

$$\begin{aligned} dH &= \varepsilon [H, \vec{G}] = d\vec{v} \cdot [H, \vec{G}] = -d\vec{v} [\vec{G}, H] = d\vec{v} \cdot M \dot{\vec{R}}_{CM} \\ &= K - H \stackrel{!}{=} \varepsilon \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Behauptung:

Die Änderung der Hamiltonfunktion unter einer Galileitransformation betrifft nur die kinetische Energie

Beweis:

$$\begin{aligned} dH &= d\vec{v} \sum_i \vec{p}_i \stackrel{!}{=} dT = \text{Änderung der kinetischen Energie} \\ dT &= \sum_i \frac{(\vec{p}_i + m_i d\vec{v})^2}{2m_i} - \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} = \\ &= \sum_i \frac{1}{2m_i} [\cancel{p_i^2} + 2m_i \vec{p}_i \cdot d\vec{v} + \underbrace{m_i^2 d\vec{v}^2}_{O(dv^2)} - \cancel{p_i^2}] \\ &\quad \text{vernachlässigen} \\ &\simeq \sum_i \vec{p}_i \cdot d\vec{v} \quad (\text{infinitesimale Transformation, nur bis lineare Ordnung entwickeln}) \\ &\text{q.e.d.} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Also gilt:

Bei Galileiinvarianz ist $dV = 0$, d.h. die potenzielle Energie darf höchstens von Geschwindigkeitsdifferenzen abhängen.

$$V = V(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \quad \forall i, j \text{ wenn nicht unabhängig von Geschwindigkeit} \quad (3.83)$$

Bei Translations-, Galilei- und Drehinvarianz gilt (zusammen):

$$\begin{aligned} V &\text{ kann nur abhängen von} \\ V &= V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{v}_k - \vec{v}_l), |\vec{v}_i - \vec{v}_j|) \quad \forall i, j, k, l \end{aligned} \quad (3.84)$$

3.2.3 Satz von Poincaré und Satz von Liouville

Phasenraum

$$\begin{aligned} \text{Harmonischer Oszillator: } q &= A \sin \omega_0 t \\ p &= m\omega_0 A \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (3.85)$$

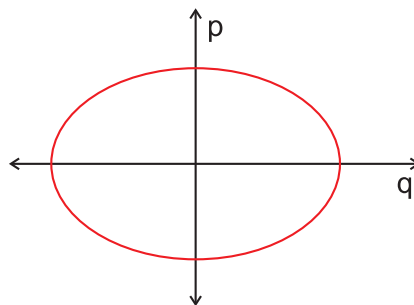


Abb. 63: periodische Bewegung = geschlossene Bahn im Phasenraum

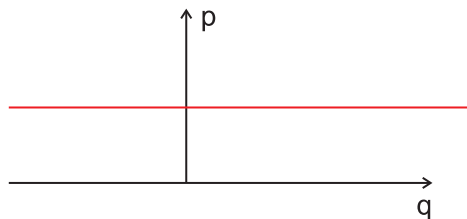


Abb. 64: freies Teilchen: $p = \text{konstant}$

Satz von Poincaré:

Das Volumen im Phasenraum bleibt unter kanonischen Transformationen erhalten.

d.h. mit $Q = Q(q, p, t)$

$$P = P(q, p, t)$$

$$\text{gilt } \int_{\Gamma} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \int_{\Gamma} |J| dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n \text{ mit } |J| = 1 \quad (3.86)$$

mit Funktionaldeterminante (Jakobi-Determinante):

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial P_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial P_n} \end{vmatrix} =: \frac{\partial (q_1 \cdots q_n p_1 \cdots p_n)}{(\partial Q_1 \cdots Q_n P_1 \cdots P_n)} \quad (3.87)$$

Exkurs über Funktionaldeterminanten - Erweiterung der Kettenregel

Gegeben seien n Funktionen $f_i(x_j)$ von m Variablen x_j . Die m x_j sind Funktionen von m unabhängigen t_k .

$$\begin{aligned} & f_i(x_1 \dots x_m), \quad i = 1 \dots n \\ & x_j(t_1 \dots t_m), \quad j = 1 \dots m \\ df_i &= \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \underbrace{dx_j}_{\downarrow} = \sum_{jk} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_k} dt_k \\ & dx_j = \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial t_k} dt_k \\ & \text{und } df_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial t_k} dt_k \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\text{Damit } \frac{\partial f_i}{\partial t_l} = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_l}$$

Matrixschreibweise:

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{t}} = \underbrace{\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{t}}}_{\text{Matrixprodukt}} \quad (3.89)$$

Sei $n = m$

\Rightarrow Funktionaldeterminante aus Matrix

$$\det \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{t}} =: \frac{\partial (f_1 \cdots f_n)}{\partial (t_1 \cdots t_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} \quad (3.90)$$

Da sich bei Matrizenmultiplikation die Determinanten auch multiplizieren ($A = B \cdot C \Rightarrow \det A = \det B \cdot \det C$), gilt für die Funktionaldeterminante auch:

$$\frac{\partial (f_1 \dots f_n)}{\partial (t_1 \dots t_n)} = \frac{\partial (f_1 \dots f_n)}{\partial (x_1 \dots x_n)} \cdot \frac{\partial (x_1 \dots x_n)}{\partial (t_1 \dots t_n)} \quad (3.91)$$

Man darf also „erweitern“.

Beweis des Satz von Poincaré

Betrachte die Funktionaldeterminante einer kanonischen Transformation

$$J = \frac{\partial (q_1 \dots q_n p_1 \dots p_n)}{\partial (Q_1 \dots Q_n P_1 \dots P_n)} = \frac{\frac{\partial (q_1 \dots q_n p_1 \dots p_n)}{\partial (q_1 \dots q_n P_1 \dots P_n)}}{\frac{\partial (Q_1 \dots Q_n P_1 \dots P_n)}{\partial (q_1 \dots q_n P_1 \dots P_n)}} \quad (3.92)$$

Damit gilt:

$$J = \frac{\left(\frac{\partial (p_1 \dots p_n)}{\partial (P_1 \dots P_n)} \right)_{q \text{ konst.}}}{\left(\frac{\partial (Q_1 \dots Q_n)}{\partial (q_1 \dots q_n)} \right)_{P \text{ konst.}}} \quad (3.93)$$

Beweis: det $\frac{\partial x}{\partial t}$ für $x_j = t_j$ berechnen

$$\frac{\partial (x_1 \dots, t_j, \dots x_n)}{\partial (t_1 \dots, t_j, \dots t_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial t_j}{\partial t_1} = 0 & \dots & \frac{\partial t_j}{\partial t_j} = 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} \quad (3.94)$$

nach j -ter Zeile entwickeln

\Rightarrow j -te Zeile + Spalte können gestrichen werden, Rang erniedrigt sich um 1, bei Bildung der übrigen partiellen Ableitungen muss t_j festgehalten werden.

$$\frac{\partial (x_1 \dots t_j \dots x_n)}{\partial (t_1 \dots t_j \dots t_n)} = \left(\frac{\partial (x_1 \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_n)}{\partial (t_1 \dots t_{j-1} t_{j+1} \dots t_n)} \right)_{t_j} \quad (3.95)$$

Fortsetzen führt auf partielle Ableitung

$$\frac{\partial x_j}{\partial t_l} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial t_l} \right)_{\substack{\text{alle } t_i \text{ mit } i \neq l \\ \text{festhalten}}} = \frac{\partial (x_j, t_1 \dots t_{l-1} t_{l+1} \dots t_n)}{\partial (t_l, t_1 \dots t_{l-1} t_{l+1} \dots t_n)}$$

z.B. $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_2} \right)_{t_1} = \frac{\partial (x_1, t_1)}{\partial (t_2, t_1)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \\ \frac{\partial t_1}{\partial t_2} & \frac{\partial t_1}{\partial t_1} \end{vmatrix}$ (3.96)

$$\frac{\partial t_1}{\partial t_2} = 0 \text{ und } \frac{\partial t_1}{\partial t_1} = 1$$

Gleichung (3.93) folgt aus Gleichung (3.92) durch n -fache Anwendung der obigen Regel.

Berechne das $i-j$ -te Element der Zählerdeterminante. Die kanonische Transformation sei durch die Erzeugende F_2 charakterisiert.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \right)_{P_{k \neq j}, q, t} &= \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right)_{q_{k \neq i}, P, t}}{\partial P_j} \right)_{P_{k \neq j}, q, t} \quad \text{Ableitung} \\ & \quad \text{vertauschen} \\ &= \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_j} \right)_{P_{k \neq j}, q, t}}{\partial q_i} \right)_{q_{k \neq i}, P, t} = \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right)_{q_{k \neq i}, P, t} = \\ &= j - i - \text{tes Element der Nennerdeterminante} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Die Determinante im Nenner ist die Determinante der transponierten Zählermatrix, d.h. die beiden Determinanten sind gleich.

$$\frac{\partial (q_1 \dots q_n p_1 \dots p_n)}{\partial (Q_1 \dots Q_n P_1 \dots P_n)} = 1 \quad \text{q.e.d.} \quad (3.98)$$

Zu fester Zeit befindet sich jedes physikalische System an einem festen Punkt im $2n$ -dimensionalen Phasenraum. (Abbildung 65)

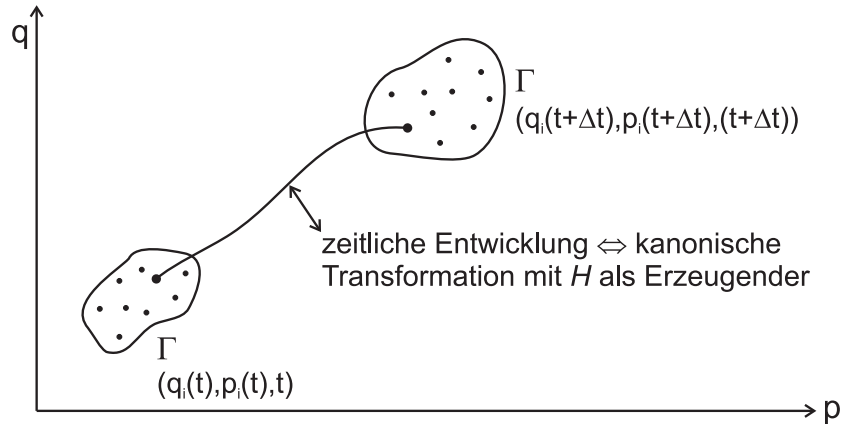


Abb. 65

Statistische Mechanik: Betrachte ein Ensemble (Schar, Gesamtheit) gleichartiger (gleiche H -Funktion) Systeme und mache Aussagen über die zeitliche Entwicklung von Mittelwerten.

Aussage des Satzes von Poincaré: Das Phasenraumvolumen Γ eines Ensembles bleibt erhalten (zum Beispiel unter Zeitentwicklung = kanonische Transformation mit Erzeugender H).

Die Zahl der Systeme in Γ (Phasenraumpunkte) bleibt auch erhalten, d.h. die Phasenraumdicke $\rho(q, p, t)$ ist erhalten,

$$\rho(q, p, t) = \frac{\text{Zahl der Systeme}}{\text{Volumen im Phasenraum}} \Leftrightarrow \boxed{\text{Satz von Liouville}} \quad (3.99)$$

Satz von Liouville: $\rho(q, p, t) = \text{konstant}$

$$\Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} = [\rho, H] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -[\rho, H] \quad (3.100)$$

Beispiel: Teilchen im Strahl eines Beschleunigers (Abbildung 66)

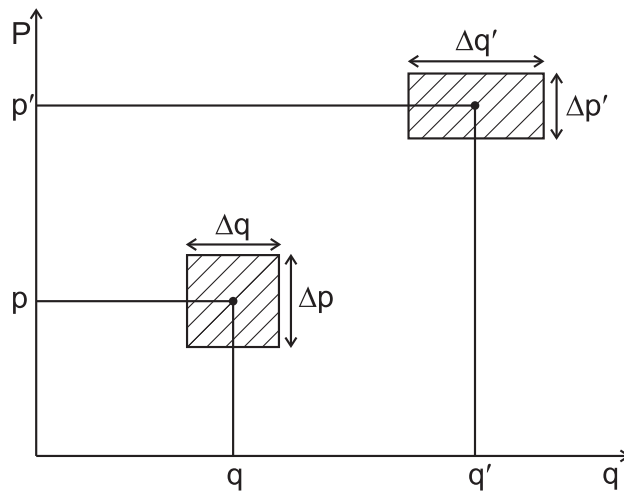


Abb. 66

Energiesatz:

obere Teilchen

$$\frac{1}{2m} \left(p + \frac{\Delta p}{2} \right)^2 + A = \frac{1}{2m} \left(p' + \frac{\Delta p'}{2} \right)^2 \quad (3.101)$$

untere Teilchen

$$\frac{1}{2m} \left(p - \frac{\Delta p}{2} \right)^2 + A = \frac{1}{2m} \left(p' - \frac{\Delta p'}{2} \right)^2$$

Klammern ausmultiplizieren, Gleichungen voneinander abziehen:

$$\begin{aligned} p\Delta p &= p'\Delta p' \\ \Rightarrow \frac{\Delta p'}{\Delta p} &= \frac{p}{p'} \ll 1 \quad (\text{Beschleunigung}) \end{aligned} \quad (3.102)$$

d.h. Impulsverteilung wird schmaler

Wegunterschiede: Nach dem Satz von Liouville muss gelten

$$\begin{aligned} \Delta q' \Delta p' &= \Delta q \Delta p \\ \Rightarrow \frac{\Delta q'}{\Delta q} &= \frac{\Delta p}{\Delta p'} = \frac{p'}{p} \gg 1 \quad \text{Aufweitung im Ortsraum} \end{aligned} \quad (3.103)$$

3.3 Hamilton-Jakobi-Theorie, periodische Bewegungen, Winkel- und Wirkungsvariable

3.3.1 Hamilton-Jakobi-Theorie

Annahme: Hamiltonfunktion mit n Freiheitsgraden sei autonom, d.h. nicht explizit zeitabhängig. (später wird gezeigt: nicht-autonome Hamiltonfunktion lässt sich auf autonome mit $n + 1$ Freiheitsgraden zurückführen)

Ziel in der Hamilton-Jakobi-Theorie:

Man suche eine kanonische Transformation $F_2(q, P)$ derart, dass die neuen Impulse Konstanten sind, $P_i = \alpha_i = \text{konstant}$.

\Rightarrow Hamiltongleichung $-\frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0$

Also kann K nur von den P_i abhängen und nicht von den Q_i , $K = K(P_i)$, und ist damit selber eine Konstante.

Sei $K = K(P) = P_1 = \alpha_1 = H(q, p) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \stackrel{=0 \text{ nach Annahme}}{\cancel{}}$

Neue Koordinaten

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = t + \beta_1 \\ Q_i = \beta_i, & i \neq 1 \end{cases} \quad (3.104)$$

Problem: Erzeugende F_2 finden, die die P_i konstant macht.

$F_2(q, P, \cancel{t}) = W(q, \alpha)$

Eliminiere in $H(q, p) = \alpha_1$ mit Hilfe von $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \left(= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right)$ die Impulse:

$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1$ Hamilton-Jakobi-Gleichung = partielle DGL in n Variablen von 1. Ordnung.

Beispiel:

$$H(q, p) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + q_1 q_2 = \alpha_1 = \frac{\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2}{2m} + q_1 q_2 \quad (3.105)$$

Die vollständige Lösung der Hamilton-Jakobi-Gleichung enthält n Konstanten, von denen eine rein additiv ist, weil mit W immer auch $W + \alpha_1$ eine Lösung ist. Die restlichen $n - 1$ Konstanten $\alpha_2 \dots \alpha_n$ und α_1 können als die neuen konstanten Impulse $P_i = \alpha_i$ aufgefasst werden.

$$\begin{aligned} Q_1 &= t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}(q, \alpha) \\ Q_i &= \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}(q, \alpha), \quad i \neq 1 \end{aligned} \quad (3.106)$$

Durch Auflösen dieser Gleichung erhält man $q_i(t)$ und dann durch $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(t)$, d.h. die Lösung des Problems.

Lösungsverfahren nach Hamilton-Jakobi

1. $H(q, p)$ aufstellen
2. $p \rightarrow \frac{\partial W}{\partial q}$
3. Lösung von $H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha \Rightarrow$ geht fast nie!
4. Vollständige Lösung $W(q, \alpha)$ enthält n Integrationskonstanten, die mit den neuen Impulsen identifiziert werden, $P_i = \alpha_i$
5. Neue Koordinaten $Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \begin{cases} t + \beta_1, i = 1 \\ \beta_i, i \neq 1 \end{cases}$
6. Inversion der Gleichungen liefert $q_i(t)$ als Funktion der $2n$ Konstanten α, β
7. Impulse berechnen aus $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$

Beispiel: Teilchen im Zentralfeld

Wähle ebene Polarkoordinaten wegen Drehimpulserhaltung, Bewegung in der Ebene.

(zu 1)

$$\frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} \right) + V(r) = H \quad (3.107)$$

(zu 2)

$$\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2 \right) + V(r) = \alpha_1 \quad (3.108)$$

(zu 3) Lösung der Gleichung (2) **Kritisch!**

multiplizieren mit $2mr^2$, umordnen

$$\underbrace{\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2}_{\text{Funktion von } \vartheta} = \underbrace{2mr^2(\alpha_1 - V(r)) - r^2 \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2}_{\text{Funktion von } r} \quad (3.109)$$

d.h. beide Seiten müssen konstant sein (Separationsansatz)

(i)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2 = \alpha_2 \Rightarrow W_\vartheta = \sqrt{\alpha_2} \vartheta \quad (3.110)$$

(ii)

$$\begin{aligned} 2mr^2(\alpha_1 - V(r)) - r^2 \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 &= \alpha_2 \\ \Rightarrow 2m(\alpha_1 - V(r)) - \frac{\alpha_2}{r^2} &= \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 \\ \Rightarrow W_r &= \int_r^r \sqrt{2m(\alpha_1 - V(r')) - \frac{\alpha_2}{r'^2}} dr' \end{aligned} \quad (3.111)$$

(zu 4) Berechnung der erhaltenen generalisierten Impulse $P_1 = \alpha_1$, $P_2 = \alpha_2$

$$W(r, \vartheta, \alpha_1, \alpha_2) = W_\vartheta + W_r = \sqrt{\alpha_2} \vartheta + \int_{r_0}^r \sqrt{2m(\alpha_1 - V(r')) - \frac{\alpha_2}{r'^2}} dr' \quad (3.112)$$

(zu 5)

$$Q_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int_{r_0}^r \frac{m dr'}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V(r')) - \frac{\alpha_2}{r'^2}}} = t + \beta_1 \rightarrow \text{liefert } r(t)$$
$$Q_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} \vartheta - \int_{r_0}^r \frac{dr'}{2r'^2 \sqrt{2m(\alpha_1 - V(r')) - \frac{\alpha_2}{r'^2}}} = \beta_2 \rightarrow \text{liefert } \vartheta(t)$$

(3.113)

Zeit eliminieren $\Rightarrow r(\vartheta)$

Bestimmung der Konstanten aus den Anfangsbedingungen

$$p_\vartheta = \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \sqrt{\alpha_2} \Rightarrow \alpha_2 \text{ ist das Quadrat des Drehimpulses, } \alpha_2 = L^2$$

u.s.w.

\Leftrightarrow Integraldarstellung der Lösung $q_i(t), p_i(t) \Rightarrow$ infinitesimale Änderungen der Anfangsbedingungen führen zu infinitesimalen Änderungen der Lösung

Wann ist die Hamilton-Jakobi-Gleichung lösbar?

Integrabilität \Leftrightarrow Separabilität der Hamilton-Jakobi-Gleichung, dafür ist erforderlich: n Separationskonstanten, die von den Erhaltungsgrößen abhängen.

Es gilt:

Ein System ist integrabel, wenn es n Erhaltungsgrößen P_i gibt, die in Involution stehen, d.h. alle Poissonklammern zwischen ihnen verschwinden.

$$[P_i, P_j] = 0 \quad \forall i, j = 1 \dots n \quad (3.114)$$

Beispiele (kein Beweis):

(i) $n = 1$ das System ist integrabel, wenn der Energiesatz gilt.

(ii) Teilchen im \mathbb{R}^3 und Zentralpotenzial, $n = 3$

Erhaltungssätze: Energie, Drehimpuls \vec{l}

$$[\vec{l}, H] = 0 \quad \text{und} \quad [l_x, l_y] = l_z \quad \not\leftarrow$$

aber 3 Erhaltungssätze in Involution H, l^2, l_z , weil $[l^2, l_z] = 0$

(iii) Mehr als 2 Körper:

6 Erhaltungssätze in Involution: $H, l^2, l_z, \vec{P}_{CM} <$ Anzahl der Freiheitsgrade = 3. Anzahl der Körper

\Rightarrow nur noch für kleine Schwingungen, d.h. lineare Kräfte, integrabel

Behauptung: Ein autonomes System $H(q, p)$ mit $n + 1$ Freiheitsgraden ist äquivalent zu einem zeitabhängigen Problem mit n Freiheitsgraden.

„ \Leftarrow “ Hamiltonsches Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt = 0 \quad (3.115)$$

Statt der Zeit t wird ein neuer Parameter τ eingeführt, der wie t von der Variation nicht beeinflusst wird.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \underbrace{H(q, p, t)}_{\text{Funktion von } q, p, t} \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{dq_i}{d\tau} - \underbrace{H}_{\substack{\text{neue} \\ \text{unabh.} \\ \text{Variable}}} \frac{dt}{d\tau} \right) d\tau \quad (3.116)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\sum_{i=1}^{n+1} (P_i \frac{dQ_i}{d\tau})}$$

Man darf t und $-H$ als die $(n + 1)$ -te generalisierte Koordinate bzw. als generalisierten Impuls auffassen.

$$P_i = p_i, \quad Q_i = q_i, \quad i = 1 \dots n$$

$$P_{n+1} = -H, \quad Q_{n+1} = t, \quad i = n + 1$$

Die ganze Transformation kann man also auffassen als kanonische Transformation mit Erzeugender

$$F_2(q, P, t) = \underbrace{\sum_{i=1}^n P_i q_i}_{\text{Identität}} - Ht \quad (\text{dabei ist } -Ht \text{ der } (n+1)\text{-te Impuls} \cdot (n+1)\text{-te Koordinate}) \quad (3.117)$$

neue Hamiltonfunktion

$$K(Q, P, \times) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \underbrace{H(q, p, t)}_{\text{Vorschrift}} - \underbrace{H}_{\substack{\text{unabh.} \\ \text{Variable}}} \quad (3.118)$$

neue Hamiltonsche Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial \tau} &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, & \frac{\partial Q_i}{\partial \tau} &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ i = n + 1 : \\ -\frac{dH}{d\tau} &= \frac{dP_{n+1}}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial Q_{n+1}} = -\frac{\partial K}{\partial t} \\ \frac{dt}{d\tau} &= \frac{dQ_{n+1}}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial P_{n+1}} = -\frac{\partial K}{\partial H} = 1 \Rightarrow t(\tau) = \tau \end{aligned} \quad (3.119)$$

„ \Rightarrow “ Sei $H(q, p, \times) = E$ eine erhaltene Hamiltonfunktion mit $n + 1$ Freiheitsgraden.

Setze $P_i = p_i$ und $Q_i = q_i$, $i = 1 \dots n$, und löse den Erhaltungssatz $H(q, p) = E$ für $p_{n+1} = p_{n+1}(Q, P, q_{n+1}, E)$.

Setze $K = p_{n+1}$, $\tau = q_{n+1} \Rightarrow$ reduzierte Beschreibung in n Freiheitsgraden mit den dynamischen Variablen (Q, P) und dem zeitanalogen Parameter τ und der τ - und E - abhängigen Hamiltonfunktion $K(Q, P, \tau, E)$.

3.3.2 Periodische Bewegungen. Winkel- und Wirkungsvariable

Es gibt zwei Arten von periodischer Bewegung. (Abbildung 67 und 68)

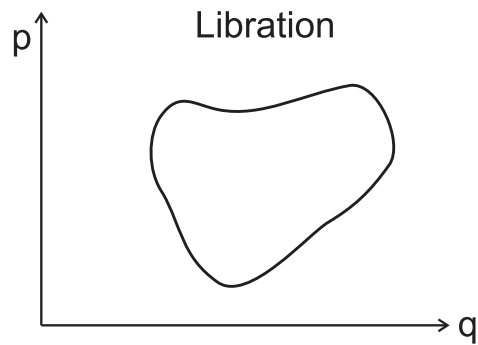


Abb. 67: Libration: $p - q$ - Kurve im Phasenraum geschlossen $\Rightarrow p, q$ periodische Funktion der Zeit mit gleicher Periode

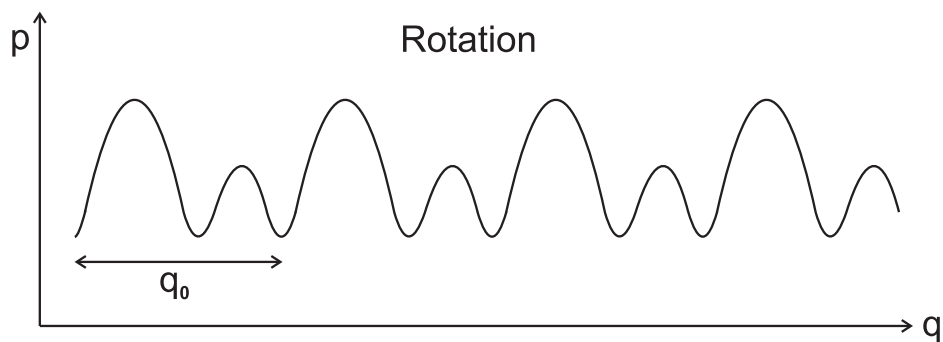
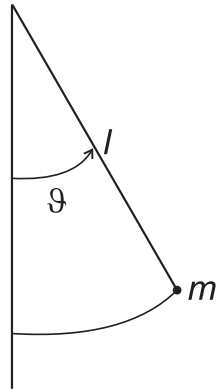


Abb. 68: Rotation: p ist periodische Funktion von q mit Periode q_0 , q kann unbeschränkt anwachsen

Beispiel: Ebenes Pendel



$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2$$

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = ml^2\dot{\vartheta} \quad (3.120)$$

$$T = \frac{p_{\vartheta}^2}{2ml^2}$$

Abb. 69

$$H = E = T + V = \frac{p_{\vartheta}^2}{2ml^2} - mgl \cos \vartheta, \quad E \text{ erhalten} \quad (3.121)$$

$$\Leftrightarrow p_{\vartheta} = \pm \sqrt{2ml^2 (E + mgl \cos \vartheta)}$$

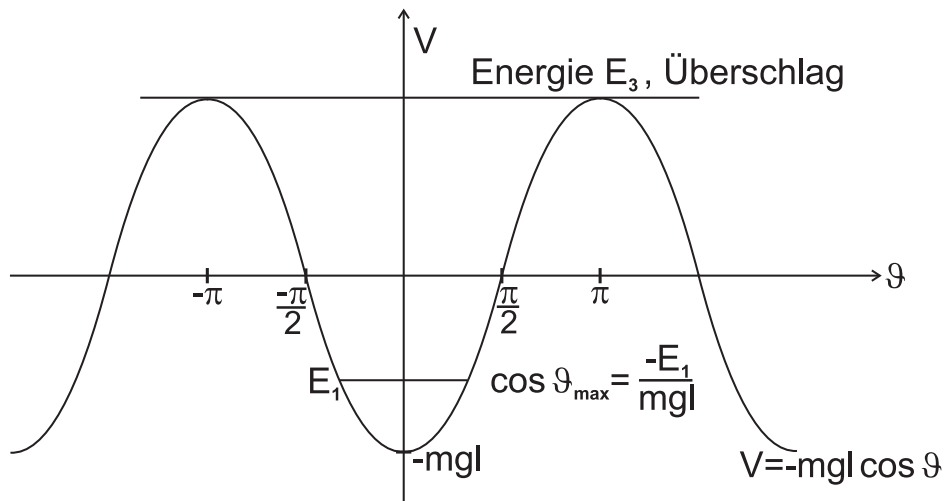


Abb. 70

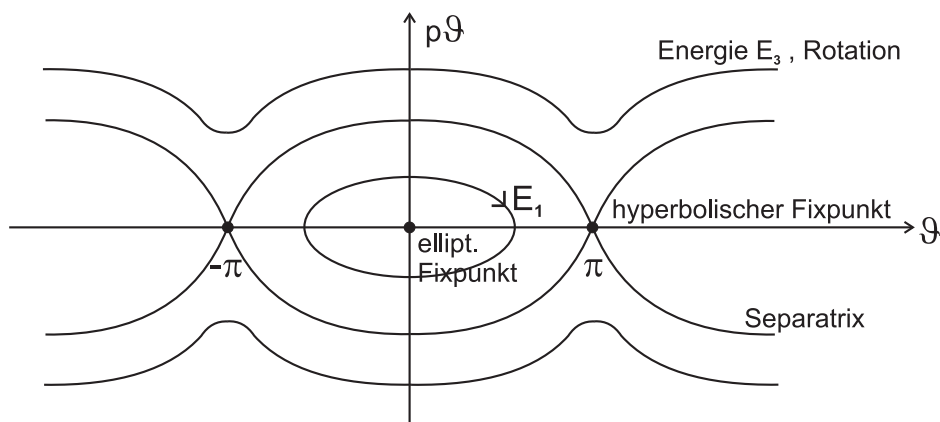


Abb. 71

Bifurkation = bei Verschiebung eines Kontrollparameters (hier: Energie E) ändern sich Struktur und Zahl der speziellen Lösungen,
 hier: bei $E = mgl$, Schwingung \rightarrow Rotation

Periodische Bewegung bei n Freiheitsgraden

Annahme: Problem vollständig separabel

$$W(q, \alpha) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \alpha)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}(q, \alpha) = \delta_{1,i} t + \beta_i \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i$$

Für eine periodische Bewegung definiert man eine nicht von den q_i abhängige Wirkungsvariable

$$J_i := \frac{1}{2\pi} \oint_{1 \text{ Periode}} p_i dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \alpha) dq_i \equiv J_i(\alpha). \quad (3.123)$$

D.h. man erhält n unabhängige Konstanten $J(\alpha)$ mit der Dimension einer Wirkung, $[p_i dq_i] = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i \right] = \text{Energie} \cdot \text{Zeit}$

Charakteristische Funktion $W(q, \alpha) = W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1(J), \dots, \alpha_n(J)) = S(q, J)$ ist abhängig von den J .

Es gilt $p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \frac{\partial S_i}{\partial q_i}(q_i, J)$

Die zu J_i konjugierte Koordinate lautet:

$\vartheta_i = \frac{\partial S}{\partial J_i}(q, J)$ Winkelvariable

neue Hamiltonfunktion

$$K = H = \alpha_1(J) = K(J) = K(J_1 \dots J_n) \quad (3.124)$$

Hamiltonsche Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{J}_i &= -\frac{\partial K}{\partial \vartheta_i} = 0 \Rightarrow J_i = \text{konstant} \\ \dot{\vartheta}_i &= \frac{\partial K}{\partial J_i} = \omega_i(J) \quad \text{zeitlich konstant} \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\vartheta_i(t) = \omega_i t + \beta_i$$

Die ω_i sind die Grundfrequenzen der Bewegung (hier kein Beweis).

Beispiel: 2-dimensionaler harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned} H &= \underbrace{\frac{p_1^2}{2m} + \frac{k_1}{2} q_1^2}_{H_1(q_1, p_1)} + \underbrace{\frac{p_2^2}{2m} + \frac{k_2}{2} q_2^2}_{H_2(q_2, p_2)} \rightarrow \text{ist separabel} \\ H &= H\left(q_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right) \quad (\text{Schritt 2 aus dem Lösungsverfahren}) \end{aligned} \quad (3.126)$$

Hamilton-Jakobi-Gleichung

$$\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2 \right) + \frac{k_1}{2} q_1^2 + \frac{k_2}{2} q_2^2 = \alpha_1 = E \quad (3.127)$$

mit dem Ansatz $W = W_1(q_1, \alpha) + W_2(q_2, \alpha)$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 + m_1 k_1 q_1^2}_{\alpha_2} = \underbrace{m (2E - k_2 q_2^2) - \left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2}_{\alpha_2} \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1 = \pm \sqrt{\alpha_2 - mk_1 q_1^2} \Rightarrow \text{Umkehrpunkte (Nullstellen)} \quad q_1^\pm = \pm \sqrt{\frac{\alpha_2}{mk_1}}$$

Betrachte das positive Vorzeichen

$$W_1 = \int_{q_0}^{q_1} \sqrt{\alpha_2 - mk_1 q_1'^2} \, dq_1'$$

$$W_2 = \int_{q_0'}^{q_2} \sqrt{2mE - \alpha_2 - mk_2 q_2'^2} \, dq_2'$$

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_1 dq_1 = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_1}{\partial q_1} dq_1 = \frac{\sqrt{mk_1}}{2\pi} \oint \sqrt{\frac{\alpha_2}{mk_1} - q_1^2} \, dq_1$$

$$= 2 \cdot \int_{q_1^-}^{q_1^+} \sqrt{\frac{\alpha_2}{mk_1} - q_1^2} \, dq_1, \text{ da f\u00fcr } q_- \rightarrow q_+ \text{ gilt } p > 0 \text{ und f\u00fcr } q_+ \rightarrow q_- \text{ gilt } p < 0$$

$$= \frac{\alpha_2}{2\sqrt{mk_1}}$$

Analog:

$$J_2 = \frac{2mE - \alpha_2}{2\sqrt{mk_2}}$$

$$\text{nach } E \text{ aufl\u00f6sen: } K = E = E(J_1, J_2) = \sqrt{\frac{k_2}{m}} J_2 + \frac{\alpha_2}{2m} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} J_2 + \sqrt{\frac{k_1}{m}} J_1$$

$$\omega_1 = \frac{\partial K}{\partial J_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

$$E = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2$$

(3.129)

Charakteristische Funktion in den Wirkungsvariablen $\alpha \rightarrow J$

Hier: $\omega = \omega_1 + \omega_2$ nur von α_2 abh\u00e4ngig

$$S = S_1(q_1, J_1) + S_2(q_2, J_2)$$

$$= \int_{q_0}^{q_1} \sqrt{2m\omega_1 J_1 - mk_1 q_1'^2} \, dq_1' + \int_{q_0'}^{q_2} \sqrt{2m\omega_2 J_2 - mk_2 q_2'^2} \, dq_2' \quad (3.130)$$

Winkelvariable:

$$\vartheta_i = \frac{\partial S}{\partial J_i} = \frac{\partial S_i}{\partial J_i} = \omega_i t + \beta_i = m\omega_i \int_{q_{0,i}}^{q_i} \frac{dq'_i}{\sqrt{2m\omega_i J_i - mk_i q_i'^2}} = \arcsin \frac{q_i - q_{0,i}}{\sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i}}} \quad (3.131)$$

Durch Invertieren folgt für q_i :

$$q_i - q_{0,i} = \sqrt{\frac{2J_i}{m\omega_i}} \sin(\omega_i(t - t_0) + \beta_i) \quad (3.132)$$

Bei geeigneten Anfangsbedingungen und rationalen Frequenzverhältnissen erhält man sogenannte Lissajous-Figuren.

$$\omega_1 : \omega_2 = 2 : 1$$

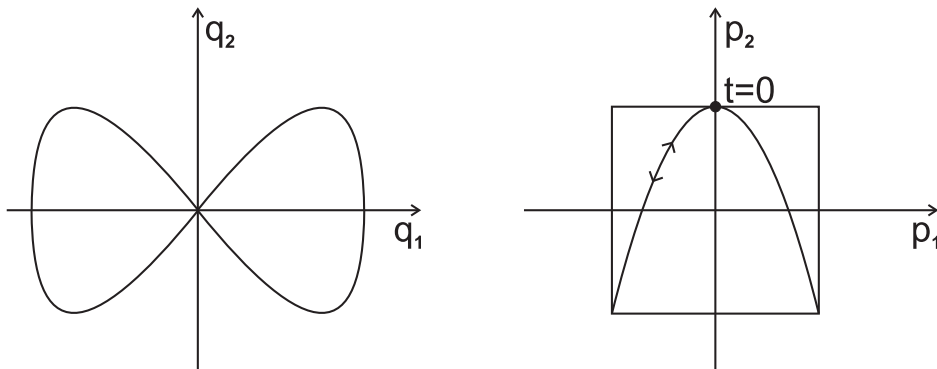


Abb. 72

aus: Wikipedia, 18.10.2010

Lissajous-Figuren sind Kurvengraphen, die durch Überlagerung harmonischer Schwingungen entstehen. Sie sind benannt nach dem französischen Physiker Jules antione Lissajous (1822-1880). Einen besonders faszinierenden Anblick bietet die Kurve bei geringfügiger Abweichung zwischen den Schwingungen, weil durch die langsam rotierende Figur ein 3D-Eindruck entsteht. In jüngerer Zeit spielten sie zum Beispiel bei der Ausbildung zum tieferen

Verständnis von Wechselströmen mit Hilfe des Oszilloskops eine Rolle.

Mathematisch handelt es sich um parametrische Schaubilder von Funktionen der Form

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} A_x \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_y \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \infty) \quad (3.133)$$

Eine solche Funktion ist genau dann periodisch, wenn das Frequenzverhältnis

$$v = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (3.134)$$

rational ist, sich also in einen ganzzahligen Bruch umwandeln lässt. In diesem Falle erhält man eine geschlossene Figur.

Bei irrationalen Frequenzverhältnissen wird der Phasenraum durch die Trajektorie voll ausgefüllt, d.h. nach hinreichend großer Zeit kommt man jedem Punkt beliebig nahe (Ergodizität).

4 Relativistische Mechanik freier Teilchen

4.1 Einführung in die Relativitätstheorie

4.1.1 Invarianz-Transformationen zwischen Koordinatensystemen in der Physik

wichtig in der Physik: Invarianz der Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{x}} \quad (\text{Newton II}) \quad (4.1)$$

unter Transformationen von einem Inertialsystem K auf ein anderes Inertialsystem K' . Es gibt vier Klassen von Transformationen, unter denen Newton II invariant ist:

- a) Translation des Koordinatensystems um konstanten Vektor \vec{a}
zugehöriger Erhaltungssatz: linearer Impuls

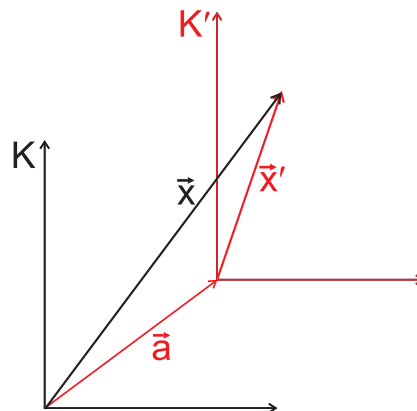


Abb. 73: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$

b) Richtungsänderung (Abbildung 74)

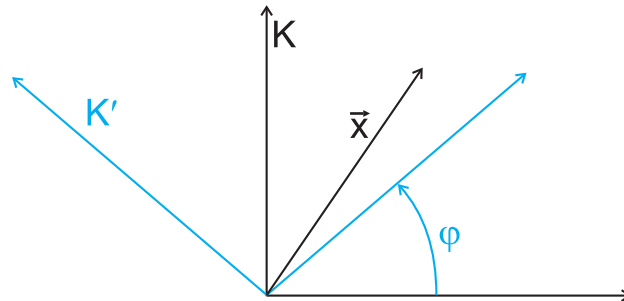


Abb. 74: $\vec{x}' = \vec{A}\vec{x}$, wobei \vec{A} eine Drehung beschreibt und (in 3D) von 3 Parametern abhängt, z.B. Eulerwinkel

\vec{A} kann nicht von der Zeit abhängen, sonst wäre K' kein Inertialsystem
zugehöriger Erhaltungssatz: Drehimpuls

c) Galilei-Transformation, K' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} relativ zu K

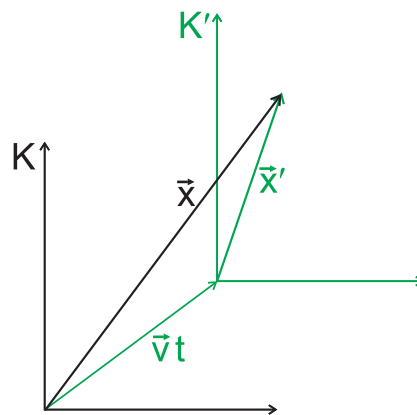


Abb. 75: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$

zugehöriger Erhaltungssatz: Bei einem Vielteilchensystem ist $\vec{P} = M\vec{V}$ erhalten.

d) Zeittranslationsinvarianz $t' = t - a_0$

zugehöriger Erhaltungssatz: Energieerhaltung

Newton II ist invariant unter $a - d$ und damit unter jeder Kombination derselben.

Dann gilt für die neuen Koordinaten

$$\begin{aligned}x'_1 &= \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j & -v_1t & -a_1 \\x'_2 &= \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j & -v_2t & -a_2 \\x'_3 &= \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j & -v_3t & -a_3 \\t' &= & t & -a_0\end{aligned}\tag{4.2}$$

Drehung Galilei Translation

Die Zeit wird unsymmetrisch behandelt.

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}' - \vec{v}t \\ \frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{d\vec{x}'}{dt} - \vec{v} \quad \text{Vektoraddition der Geschwindigkeiten}\end{aligned}\tag{4.3}$$

4.1.2 Axiome der Relativitätstheorie

Michelson: Galilei-Invarianz stimmt nicht. (Abbildung 76)

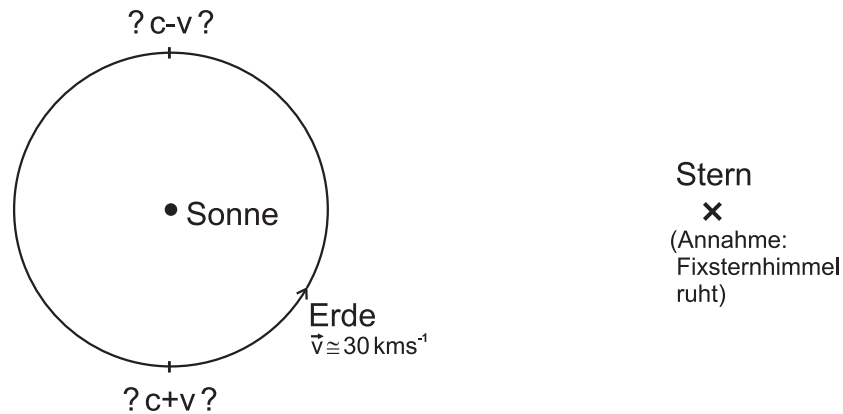


Abb. 76

Interferenz-Experiment, hohe Präzision \Rightarrow Lichtgeschwindigkeit immer $c!!!$

Einstein 1905: Spezielle Relativitätstheorie

(speziell, da sich Inertialsysteme mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen)

1. Die Naturgesetze sind in allen Koordinatensystemen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, gleich.
2. Die Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist dieselbe in allen Koordinatensystemen und unabhängig von der Geschwindigkeit des emittierenden Körpers (\neq Galilei-Invarianz).

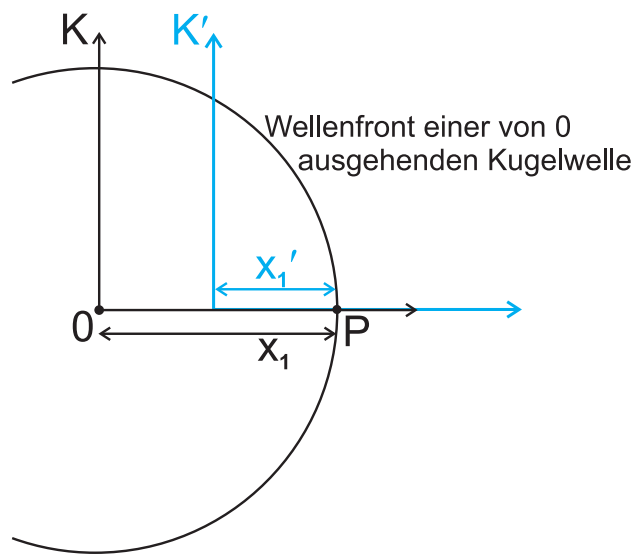


Abb. 77: Der Ursprung von K' bewege sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ gegenüber dem Ursprung von K . Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen der Ursprung von K und von K' übereinstimmen. In beiden Inertialsystemen muss die zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ursprung ausgesandte Wellenfront eine Kugelwelle ergeben.

$$x = ct \Rightarrow x_1^2 = c^2 t^2 \quad (4.4)$$

$$x_1'^2 = c^2 t'^2$$

auf der gesamten Wellenfront

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 t^2$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c^2 t'^2 \quad (4.5)$$

$$0 = c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c'^2 t'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$$

Neue Geometrie: Die Länge von Vektoren $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und die Zeit t sind nicht mehr separat invariant, sondern nur noch gemeinsam. \Rightarrow 4-er Vektor

4.1.3 Mathematische Grundlagen der Relativitätstheorie

Minkowski-Raum

Es gibt kontravariante 4-er Vektoren mit Komponenten

$$A^\mu = A^0, A^1, A^2, A^3 \quad (4.6)$$

und kovariante 4-er Vektoren

$$A_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} A^\nu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (\text{Summenkonvention})$$
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Konvention: griechische Indizes laufen von 0 bis 3.

lateinische Indizes laufen von 1 bis 3.

kontravariant $(A^0, A^1, A^2, A^3) = (ct, x_1, x_2, x_3)$

kovariant $(A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (ct, -x_1, -x_2, -x_3)$

Skalarprodukt im Minkowskiraum

$$AB = A_\mu B^\mu = A_\mu B_\nu g^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} \quad (4.8)$$

Transformationen auf ein anderes Koordinatensystem werden beschrieben durch 4×4 -Matrizen mit Elementen $a^\nu{}_\mu$

$$A'^\mu = a^\nu{}_\mu A^\nu \quad (4.9)$$

Forderung: Das Skalarprodukt muss invariant gegenüber einer Transformation auf neue Koordinaten sein.

$$\begin{aligned}
 A'_{\mu} B'^{\mu} &= a^{\nu}_{\mu} \underbrace{a^{\mu}_{\sigma} B^{\sigma}}_{B'^{\mu}} A_{\nu} \stackrel{!}{=} A_{\nu} B^{\nu} \\
 \Rightarrow a^{\nu}_{\mu} a^{\mu}_{\sigma} &= \delta^{\nu}_{\sigma} \quad \text{Kroneckerdelta}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Ko- und kontravariante Komponenten eines Vektors:

Die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_i, i = 1, 2, 3, a_i \in \mathbb{R}^3, \vec{a}_i$ normiert, bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 . Jeder Vektor \vec{r} lässt sich danach entwickeln,

$$\vec{r} = c^i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^3 c^i \vec{a}_i
 \tag{4.11}$$

mit reellen kontravarianten Komponenten c^i .

Der Vektor \vec{r} lässt sich auch auf die \vec{a}_i projizieren.

$$\vec{a}_i \cdot \vec{r} = \sum_j \underbrace{\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j}_{\substack{\text{metrischer} \\ \text{Tensor}}} c^j = g_{ij} c^j = c_i \quad \text{kovariantes } c_i!
 \tag{4.12}$$

(Kovariant, weil sich c_i unter Koordinatentransformationen bei festen \vec{r} wie die \vec{a}_i verhält.)

zum Beispiel: Schiefwinkliges Koordinatensystem im \mathbb{R}^2

(Abbildung 78)

$$\begin{aligned}
 c_1 &= c^1 + c^2 \cos \vartheta \\
 c_2 &= c^1 \cos \vartheta + c^2 \\
 \Rightarrow g_{11} &= g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \cos \vartheta
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

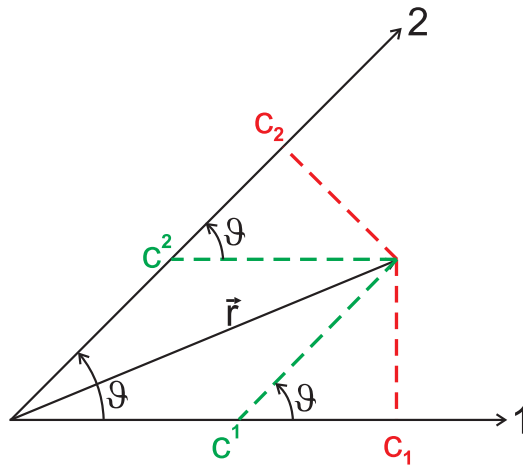


Abb. 78: parallel zu Achsen, senkrecht zu Achsen

d.h. für $\vartheta = 90^\circ$ gilt $g_{ij} = \delta_{ij}$, ko- und kontravariante Komponenten sind gleich.

Minkowski-Raum: Basisvektoren sind orthonormal, der nullte hat das Längenquadrat 1, die anderen haben das Längenquadrat -1. (Es gibt verschiedene Konventionen, auch mit imaginärer nullter Komponente.)

Gesucht: Lorentztransformation für ein K' , das sich (gleichförmig) mit v entlang der x -Achse von K bewegt (Boost) (\vec{v} zeige o.B.d.A. entlang der x -Achse, sonst kann man K entsprechend drehen).

Da \vec{v} entlang der x -Achse zeigt, werden die y - und z -Komponente nicht verändert. $\Rightarrow x'^2 = x^2, x'^3 = x^3$

Transformationsmatrix für kontravariante Vektoren

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} a^0{}_0 & a^0{}_1 & 0 & 0 \\ a^1{}_0 & a^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Berechnung von $a^\nu{}_\mu$ über $a^\nu{}_\mu = g_{\mu\sigma} a^\sigma{}_\lambda g^{\lambda\nu}$ aus $a^\mu{}_\nu$

Zur Berechnung betrachten wir 2×2 -Matrizen, da die y - und z -Komponente invariant sind.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_0^0 & a_0^1 \\ a_1^0 & a_1^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0_0 & a^0_1 \\ a^1_0 & a^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^0_0 & a^0_1 \\ -a^1_0 & -a^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0_0 & -a^0_1 \\ -a^1_0 & a^1_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Einsetzen in $a_\mu{}^\nu a^\mu{}_\sigma = \delta^\nu{}_\sigma$ liefert 3 Beziehungen für die 4 nichttrivialen Elemente:

$$\begin{aligned} \nu = \sigma = 0 : a_0^0 a^0_0 + a_1^0 a^1_0 &= (a^0_0)^2 - (a^1_0)^2 = 1 \quad (1) \\ \nu = \sigma = 1 : a_0^1 a^0_1 + a_1^1 a^1_1 &= -(a^0_1)^2 + (a^1_1)^2 = 1 \quad (2) \\ \left. \begin{array}{l} \nu = 1, \sigma = 0 \\ \nu = 0, \sigma = 1 \end{array} \right\} &\rightarrow a_0^1 a^0_0 + a_1^1 a^1_0 = a_0^0 a^0_1 + a_1^0 a^1_1 \quad (4.16) \\ &= -a^0_1 a^0_0 + a^1_1 a^1_0 = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

4. Beziehung / Bestimmungsgleichung

Der Ursprung O' von K' ($x'^1 = 0$) bewegt sich mit v in K .

$$x^1 = vt = \frac{v}{c} x^0, \quad (4.17)$$

deswegen gilt

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} x'^1 = a^1{}_\mu x^\mu = a^1_0 x^0 + a^1_1 x^1 = \\ &= \left(a^1_0 + \frac{v}{c} a^1_1 \right) x^0 = 0 \quad (4.18) \\ \Rightarrow a^1_0 &= -\frac{v}{c} a^1_1 \quad (4) \end{aligned}$$

Abkürzung in der Relativistik: $\frac{v}{c} = \beta$

(4) in (3) einsetzen

$$-a^0_1 a^0_0 - \beta (a^1_1)^2 = 0 \quad (5) \quad (4.19)$$

(4) in (1) einsetzen

$$(a^0_0)^2 - \beta^2 (a^1_1)^2 = 1 \quad (6) \quad (4.20)$$

nach (5) gilt

$$a^0_1 = -\frac{\beta (a^1_1)^2}{a^0_0} \quad (4.21)$$

in (2) einsetzen

$$\begin{aligned} & -\frac{\beta^2 (a^1_1)^4}{(a^0_0)^2} + (a^1_1)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & -\beta^2 (a^1_1)^4 + (a^1_1)^2 (a^0_0)^2 = (a^0_0)^2 \\ \Leftrightarrow & (a^1_1)^2 \underbrace{\left[-\beta (a^1_1)^2 + (a^0_0)^2 \right]}_{=1 \text{ wg. (6)}} = (a^0_0)^2 \\ \Leftrightarrow & (a^1_1)^2 = (a^0_0)^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Positive Wurzelziehung, da bei $\beta \rightarrow 0 (v \rightarrow 0)$

Lorentztransformation in Galileitransformation übergehen muss.

$$\Rightarrow a^1_1 = a^0_0 \stackrel{(6)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} =: \gamma$$

$$a^0_1 \stackrel{(5)}{=} -\beta \gamma \stackrel{(4)}{=} a^1_0$$

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Boost entlang } x\text{-Achse} \quad (4.23)$$

Für $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma \rightarrow 1 \Rightarrow a^\mu{}_\nu \rightarrow \delta^\mu{}_\nu$

$\det(a^\mu{}_\nu) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ eigentliche Lorentztransformation

Ausführlich: $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$

$$\begin{aligned} x'^0 &= ct' = a^0{}_\nu x^\nu = \gamma(ct - \beta x^1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(ct - \frac{v}{c} x \right) \xrightarrow{v \ll c} ct \\ x'^1 &= x' = a^1{}_\nu x^\nu = \gamma(x - \beta ct) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \xrightarrow{v \ll c} x - vt \\ x'^2 &= x' = y \\ x'^3 &= z' = z \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.1.4 Längenkontraktion und Zeitdilatation

Längenkontraktion (Fitz-Gerald):

Ein Beobachter im ungestrichenen System misst zu einer Zeit t die Länge eines Stabes (d.h. gleichzeitig die Position beider Enden), der im gestrichenen System ruht. Im gestrichenen, dem Ruhesystem des Stabes, ist die „wahre“ Länge des Stabes:

$$\Delta'_{\perp} = x'^1_e - x'^1_a = \gamma(x^1_e - \beta ct) - \gamma(x^1_a - \beta ct) = \gamma \underbrace{(x^1_e - x^1_a)}_{\Delta x^1} = \gamma \Delta x^1 \quad (4.25)$$

Also ist die gemessene Länge

$$l = \gamma^{-1}l' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l' \leq l' \quad (4.26)$$

Zeitdilatation:

Im gestrichenen System werden an einem festen Punkt $x^1_a = x^1_e$ ein Zeitintervall $t'_e - t'_a = \Delta t'$ gemessen.

$$\begin{aligned} \Delta t' = t'_e - t'_a &= \gamma \left(t_e - t_a - \frac{\beta}{c} (x^1_e - x^1_a) \right) \\ x^1_e - x^1_a &= \gamma (x^1_e - x^1_a - \beta c (t_e - t_a)) \stackrel{!}{=} 0 \\ x^1_e - x^1_a &= \beta c (t_e - t_a) = v \underbrace{(t_e - t_a)}_{\Delta t} = v \Delta t \\ \Rightarrow \Delta t' &= \gamma \left(\underbrace{t_e - t_a}_{\Delta t} - \frac{\beta}{c} \underbrace{(x^1_e - x^1_a)}_{=v\Delta t = \beta c \Delta t} \right) \\ &= \gamma (\Delta t - \beta^2 \Delta t) = \gamma \Delta t (1 - \beta^2) = \frac{\Delta t}{\gamma}, \quad \text{da } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \Rightarrow \Delta t' &= \frac{\Delta t}{\gamma} < \Delta t \end{aligned} \quad (4.27)$$

Invarianz des 4-er Wegelements $\Delta t' \Delta x'^1 \Delta x'^2 \Delta x'^3 = \frac{1}{\gamma} \Delta t \gamma \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3 = \Delta t \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$

Also $c\Delta t' \Delta x' \Delta y' \Delta z' = c\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$.

Probleme zum Nachdenken über die Längenkontraktion

(Diskussion in den Übungen):

- a) Das „Garagen-Paradoxon“: Passt ein sehr schnell bewegtes Auto in eine viel zu kleine Garage?

Für den Fahrer des Autos hat sich die Länge seines Autos nicht verändert, für ihn sind die Entfernungen verkürzt, die es zurückzulegen hat, insbesondere auch die Länge der Garage. Aus seiner Sicht passt das Auto also nicht in die Garage. Im Bezugssystem der Garage ist die Länge des Autos kontrahiert, so dass es hinein passt.

- b) Explosion?: Ein U-förmiges Werkstück aus dem härtesten Stahl enthält den Auslöser einer Sprengkapsel. Ein T-förmiges Werkstück aus dem gleichen harten Stahl passt genau von oben in das U hinein, der längere senkrechte Balken des T ist aber etwas zu kurz, um den Auslöser zu erreichen, wenn beide Bauteile in Ruhe sind.

Nun wird das T-förmige Bauteil weit nach oben gezogen und auf eine hohe Geschwindigkeit beschleunigt. Es erfährt eine Lorentz-Kontraktion längs seiner Bewegungsrichtung. Als Folge davon ist der senkrechte Balken des T nicht lang genug, um beim Zusammenstoß beider Bauteile den Auslöser der Sprengkapsel zu erreichen. Es wird daher keine Explosion erfolgen.

Berachten Sie dieselbe Situation jedoch im Bezugssystem des T-förmigen Werkstücks. In diesem Bezugssystem hat der senkrechte Balken des T seine Ruhelänge, während die beiden Schenkel des U-förmigen Werkstücks der Lorentzkontraktion unterliegen. Der senkrechte Balken des T wird also mit Sicherheit auf den Auslöser der Sprengkapsel prallen und es wird zu einer fürchterlichen Explosion kommen.

Wird es eine Explosion geben oder nicht?

Definition Eigenzeit: $\Delta\tau = \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$ d.h. die Zeit, die auf einer mit dem Körper mitbewegten Uhr vergeht. Die Eigenzeit ist wie die Vakuumlichtgeschwindigkeit ein Skalar.

Längenquadrat: $(cd\tau)^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$, im Ruhesystem $dx'^k = 0$ für $k = 1, 2, 3$, $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ im bewegten System.

Ruhesystem:

$$dx'_\mu dx'^\mu = c^2 d\tau^2 - 0 = c^2 d\tau^2 \quad (4.28)$$

bewegtes System:

$$\begin{aligned} dx_\mu dx^\mu &= c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \\ &= c^2 dt^2 - v^2 dt^2 \\ &= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{c^2 dt^2}{\gamma^2} = c^2 d\tau^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

$dx_\mu dx^\mu$ ist sichtbar ein Lorentzskalar.

Für die Lorentztransformation gilt

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu \quad (4.30)$$

Für die inverse Transformation gilt dann

$$x^\mu = \bar{a}^\mu{}_\sigma x'^\sigma = \underbrace{\bar{a}^\mu{}_\sigma a^\sigma{}_\nu}_{\delta^\mu{}_\nu} x^\nu \quad (4.31)$$

Also:

$$\bar{a}^\mu{}_\sigma a^\sigma{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \quad (4.32)$$

Für $a^\nu{}_\mu$ hatten wir auch folgende Orthogonalität gefunden

$$\begin{aligned}
 & a^\nu{}_\mu a^\mu{}_\sigma = \delta^\nu{}_\sigma \\
 \text{Berechne } & a^\nu{}_\lambda a^\lambda{}_\sigma \bar{a}^\sigma{}_\mu = \begin{cases} a^\nu{}_\lambda \delta^\lambda{}_\mu = a^\nu{}_\mu \\ \delta^\nu{}_\sigma \bar{a}^\sigma{}_\mu = \bar{a}^\nu{}_\mu \end{cases} \\
 \text{Dabei ist: } & a^\nu{}_\lambda a^\lambda{}_\sigma = \delta^\nu{}_\sigma \text{ und } a^\lambda{}_\sigma \bar{a}^\sigma{}_\mu = \delta^\lambda{}_\mu \\
 \Rightarrow & a^\nu{}_\mu = \bar{a}^\nu{}_\mu \\
 & a^\nu{}_\mu = g_{\mu\sigma} a^\sigma{}_\lambda g^{\lambda\nu}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Für eine Transformation mit der Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$ entlang der x -Richtung gilt also

$$\bar{a}^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

D.h. wie erwartet entspricht die Umkehrtransformation der Transformation mit $v \rightarrow -v$, $\beta \rightarrow -\beta$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{ursprüngliche Transformation} & K \xrightarrow{\beta} K' \\
 \text{Umkehrtransformation} & K' \xrightarrow{-\beta} K
 \end{array}$$

4.1.5 Zeit-, raum- und lichtartige Vektoren

Lichtkegel

Betrachte ein Ereignis an einem Weltpunkt $x = (ct, \vec{r})$. Der Abstand zu einem zweiten Ereignis y ist unabhängig vom Bezugssystem.

$$s^2 = (x_\mu - y_\mu)(x^\mu - y^\mu) = c^2 \Delta t^2 - (\Delta \vec{r})^2 \tag{4.35}$$

Mögliche Fälle:

- (i) $s^2 > 0$: Abstand zeitartig
- (ii) $s^2 = 0$: Abstand lichtartig
- (iii) $s^2 < 0$: Abstand raumartig

(siehe Abbildung 79)

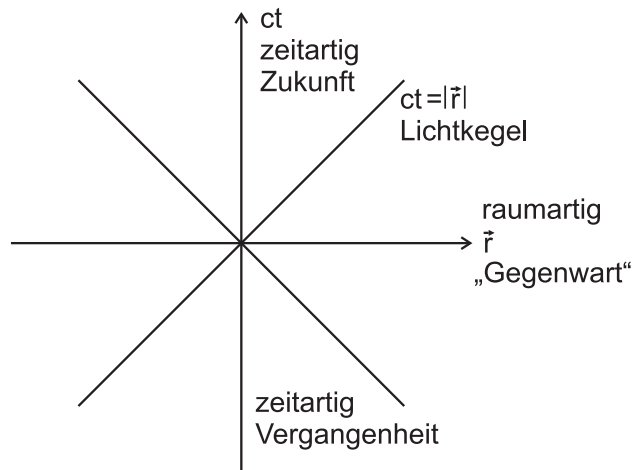


Abb. 79

Fall (i):

Im Prinzip kann ein Massenpunkt bei beiden Ereignissen anwesend sein.

$$v = \left(\frac{\Delta \vec{r}^2}{\Delta t^2} \right)^{1/2} = \sqrt{c^2 - \frac{s^2}{\Delta t^2}} < c \quad (4.36)$$

Ein kausaler Zusammenhang zwischen beiden Ereignissen ist möglich. Es kann dagegen kein Inertialsystem geben, in dem beide Ereignisse gleichzeitig sind, dann wäre $\Delta t = 0 \Rightarrow s^2 = -(\Delta \vec{r})^2 < 0 \quad \not\leq$

Fall (iii):

Es gibt ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse gleichzeitig sind. Ein kausaler Zusammenhang ist hingegen nicht möglich.

Fall (ii):

„Lichtkegel“ separiert zeitartige und raumartige Bereiche und trennt zwei getrennte zeitartige Bereiche ab: „Zukunft“ und „Vergangenheit“. Die kausale Reihenfolge ist stets eindeutig: Wenn Ereignis x Ereignis y beeinflussen kann, dann nicht umgekehrt!

Graphische Veranschaulichung - Minkowski-Diagramm

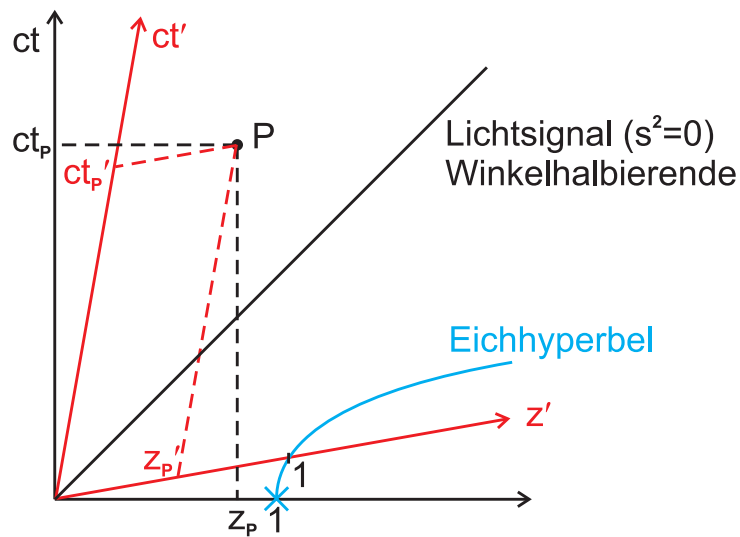


Abb. 80: Jeder Punkt P des Minkowski-Raumes stellt ein bestimmtes Ereignis dar.

Jetzt Übergang in neues Koordinatensystem $K \rightarrow K'$:

Koordinatenursprünge sollen zur Zeit $t = t' = 0$ übereinstimmen.

$\Rightarrow K'$ -Zeitachse ist definiert durch

$$0 \stackrel{!}{=} z' = \gamma(z - vt) \Rightarrow z = vt, \quad ct = \frac{1}{\beta} z \quad (4.37)$$

Gerade mit der Steigung $\frac{1}{\beta} > 1$, liegt stets zwischen Zeitachse und Lichtsignal

\Rightarrow K' -Raumachse ist definiert durch

$$0 \stackrel{!}{=} t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right) \Rightarrow ct = \beta z \quad (4.38)$$

Gerade mit der Steigung $\beta < 1$, liegt stets zwischen Raumachse und Lichtsignal

Eichung der Achsen:

$$\begin{aligned} s^2 &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad \text{ist eine Lorentzinvariante, } x, y \text{ gleich in } K, K' \\ \Rightarrow s'^2 &= c^2 t'^2 - z'^2 \quad \text{ändert sich nicht} \\ s'^2 = -1 &\Rightarrow z'^2 = (ct')^2 + 1 \Rightarrow \text{Eichung Raumachse} \\ s'^2 = 1 &\Rightarrow (ct')^2 = z'^2 + 1 \Rightarrow \text{Eichung Zeitachse} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Weltlinie = Bahnkurve eines materiellen Körpers in der Raumzeit bzw. Verlauf eines Signals. (ct, \vec{r}) muss lokal zeitartig sein, d.h. $ds^2 > 0$ entlang der Kurve.

Eigenzeit = Bogenlänge entlang der Weltlinie $d\tau = \frac{ds}{c}$

Weltgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \frac{dx}{d\tau} = \left(c \cdot \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) \\ \text{mit } dt &= \gamma d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{folgt } u(\tau) = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Längenquadrat der 4-er Geschwindigkeit

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (c^2 - v^2) = c^2$$

Lorentzvariante

4.2 Relativistische Mechanik

Frage: Was tritt an die Stelle der bisherigen mechanischen Gesetze, z.B. Newton II? Gesucht ist eine sogenannte kovariante Formulierung, d.h. das Naturgesetz muss unter Lorentztransformationen forminvariant sein.

Relativistisches Kraftgesetz:

Gesucht: Kraftgesetz für ein einzelnes Teilchen der Geschwindigkeit \vec{v}

Forderungen:

- (i) Im Grenzfall $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ soll Newton II herauskommen
- (ii) Gesetz soll kovariant sein (Vierervektor-Gleichung)

Ansatz:

$$\underbrace{K^u}_{\text{Minkowski-Kraft, noch zu bestimmen}} = m \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (4.41)$$

Nichtrelativistisch kann man das Trägheitsgesetz auch schreiben als:

$$F_i = \frac{d}{dt} P_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.42)$$

d.h. Impulserhaltung, falls keine äußeren Kräfte wirken.

Frage: lorentzinvariante Impulserhaltung?

$$K_i = m \frac{d}{d\tau} u_i = m \gamma \frac{d}{dt} (\gamma v_i) \quad \text{mit } u_i = \gamma v_i \text{ und } \tau = \frac{t}{\gamma} \quad (4.43)$$

Durch Vergleich legen wir für die Raumkomponente fest:

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m v_i \\ K_i &= \gamma F_i = \frac{F_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Zeitkomponente:

$$\begin{aligned}
 K^\mu u_\mu &= K^0 u^0 - \vec{K} \cdot \vec{u} &= m \left(\frac{d}{d\tau} u^0 \right) u^0 - m \left(\frac{d}{d\tau} \vec{u} \right) \cdot \vec{u} \\
 & &= \frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} (u^0 u^0 - \vec{u} \cdot \vec{u}) \\
 & &= \frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} \underbrace{u^\mu u_\mu}_{c^2} \\
 & &= \frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} c^2 = 0 \\
 \Rightarrow K^\mu u_\mu &= \gamma K^0 c - \gamma \vec{F} \cdot \vec{v} \gamma = 0 \\
 \Rightarrow K^0 &= \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Also lautet die Minkowskikraft

$$K^\mu = \left(\gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \gamma F_x, \gamma F_y, \gamma F_z \right) \tag{4.46}$$

physikalische Bedeutung der Zeitkomponente:

$$\begin{aligned}
 \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} &= m \frac{d}{d\tau} u^0 = m \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c) \\
 \Rightarrow \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{v}} &= \frac{d}{dt} \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 \text{Arbeit, die die Kraft } \vec{F} \text{ pro Zeiteinheit} & \\
 \text{an dem Teilchen der Masse } m \text{ leistet} & \\
 \hat{=} \text{Änderung der kinetischen Energie} & \\
 \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} &= \frac{d}{dt} T_r \\
 \Rightarrow \text{relativistische} & \\
 \text{kinetische Energie } T_r &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m c^2
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Grenze kleiner Geschwindigkeiten $\hat{=}$ Taylorentwicklung nach $\beta = \frac{v}{c}$

$$\begin{aligned}
 T_r(\beta) &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\
 \frac{dT_r}{d\beta} &= -\frac{1}{2} \frac{mc^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-2\beta) \\
 &= \frac{\beta mc^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 \frac{d^2T_r}{d\beta^2} &= \frac{mc^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} \frac{\beta mc^2}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}} (2\beta) \\
 T_r &= mc^2 + 0 + \frac{1}{2} mc^2 \frac{v^2}{c^2} + O(\beta^3) \\
 &= mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + O(\beta^3)
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

d.h. T_r reduziert sich nicht auf den nichtrelativistischen Ausdruck $T = \frac{1}{2}mv^2$?

$$T_r \xrightarrow{\frac{v}{c} \ll 1} mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{4.49}$$

Dabei ist mc^2 eine Konstante, unbedeutend für die Kinematik eines Massenpunktes. Aber mc^2 stellt sich als die Ruheenergie des Massenpunktes heraus.

Wir definieren den Vierer-Impuls

$$\begin{aligned}
 p^\mu &= mu^\mu = m\gamma(c, \vec{v}) \\
 &= \left(\frac{T_r}{c}, \gamma m \vec{v} \right) = \left(\frac{T_r}{c}, \vec{p}_r \right)
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Die Masse taucht stets in der Kombination γm auf. Man kann eine „relativistische Masse“ definieren:

$$m(v) = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.51}$$

\Rightarrow Experimentalphysik, Populärwissenschaft

Norm des Viererimpulses

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= \frac{T_r^2}{c^2} - \vec{p}_r^2 = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2 \\ \Rightarrow T_r &= \sqrt{c^2 \vec{p}_r^2 + m^2 c^4} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Da der Viererimpuls die Energie enthält, gilt in der Relativitätstheorie:

Impulserhaltung \Leftrightarrow Energieerhaltung

Nichtrelativistisch gilt das nicht! (z.B. Granate)

\Rightarrow In der Relativitätstheorie muss die Änderung der Ruhemasse die Änderung der kinetischen Energie kompensieren.

\Rightarrow Einsteins Äquivalenz von Masse + Energie

$$\boxed{\Delta E = \Delta m c^2} \quad (4.53)$$

Beispiele:

1. Massenzuwachs, wenn man 100kg um 1km in die Höhe hebt:

$$\Delta m = 10^{-12} \text{kg}$$

2. Paarerzeugung: Zerfall eines masselosen Photons in ein Elektron e^- und ein Positron e^+ ist möglich, wenn $E_\nu \leq 2m_e c^2 = 1,022 \text{MeV}$
Die Energiedifferenz $E_\nu - 2m_e c^2$ erscheint als kinetische Energie von e^- und e^+ .

3. Masseverlust der Sonne durch Energieabstrahlung $\frac{\Delta m}{\Delta t} \simeq 4 \cdot 10^{12} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

4. Atombombe: Massenverlust von etwa 0,1%

4.3 Relativistische Lagrangefunktion für freie Teilchen

L muss ein lorentzinvarianter Skalar sein, der höchstens abhängen kann von x^μ, u^μ, τ .

Hamiltonsches Prinzip: L kann nur von den Eigenschaften des freien Teilchens abhängen, d.h. Masse m (Ladung im feldfreien Raum uninteressant) Ansatz:

$$L_f = -mc^2 \quad (4.54)$$

in Hamiltonsches Prinzip einsetzen ²

$$0 \stackrel{!}{=} -mc \delta \int_1^2 ds = -mc \delta \int_1^2 \sqrt{dx^\mu dx_\mu} \quad (4.55)$$

Vollständige Herleitung siehe Landau-Lifschitz II (E-Dynamik)

Im Unterschied zur klassischen Mechanik wird jetzt auch das Eigenzeitintervall mitvariiert.

Schritte beim Ausführen der Variation:

a) $\delta dx_\mu = d \delta x_\mu$

b) $\delta x_\mu = 0$ an den Endpunkten

²Vollständige Herleitung siehe L. Landau, E. Lifschitz: *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 2, Klassische Feldtheorie*, Verlag Deutsch (Harry), 12., überarbeitete Auflage, 1997

c) partielle Integration

$$\begin{aligned}
 0 &= -mc \delta \int_1^2 \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = -mc \int_1^2 \frac{dx^\mu \delta dx_\mu}{\underbrace{\sqrt{dx^\mu dx_\mu}}_{ds} = cd\tau} = \\
 &= -m \int_1^2 u_\mu d\delta x_\mu =
 \end{aligned}$$

partielle Integration

(4.56)

$$= \underbrace{-m u_i \delta x^\mu}_{=0, \text{ da Variation an Endpunkten verschwindet}} \Big|_a^b + m \int_1^2 du^\mu \delta x_\mu = m \int_1^2 \frac{du^\mu}{d\tau} \delta x_\mu d\tau$$

Da δx_μ beliebig, folgt $m \frac{du^\mu}{d\tau} = 0$ Newton II

Masse · 4er-Beschleunigung = 0

Die relativistische Mechanik kann also analog zur klassischen Mechanik im Lagrangeformalismus hergeleitet werden.

A Rechenregeln für grad, div, rot, Δ

Es seien Φ, Ψ skalare Felder, \vec{A}, \vec{B} Vektorfelder, $f(x)$ eine differenzierbare Funktion, λ eine Zahl.

Der Ausdruck $\vec{B} \cdot \text{grad} \vec{A} = (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A}$ ist z.B. in kartesischen Koordinaten gegeben durch $\vec{B} \cdot \text{grad} \vec{A} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \sum_i \vec{e}_i ((B_1 \partial / \partial x_1 + B_2 \partial / \partial x_2 + B_3 \partial / \partial x_3) A_i)$.

Gradient

$$\text{grad}(\Phi + \Psi) = \text{grad}\Phi + \text{grad}\Psi$$

$$\text{grad}(\lambda\Phi) = \lambda\text{grad}\Phi$$

$$\text{grad}(\Phi\Psi) = \Psi\text{grad}\Phi + \Phi\text{grad}\Psi$$

$$\text{grad}f(\Phi) = f'(\Phi)\text{grad}\Phi$$

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{grad}\vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad}\vec{B} + \vec{B} \times \text{rot}\vec{A} + \vec{A} \times \text{rot}\vec{B}$$

Divergenz

$$\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div}\vec{A} + \text{div}\vec{B}$$

$$\text{div}(\lambda\vec{A}) = \lambda\text{div}\vec{A}$$

$$\text{div}(\Phi\vec{A}) = \Phi\text{div}\vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad}\Phi$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot}\vec{B}$$

Laplace

$$\Delta(\Phi + \Psi) = \Delta\Phi + \Delta\Psi$$

$$\Delta(\lambda\Phi) = \lambda\Delta\Phi$$

$$\Delta(\Phi\Psi) = \Phi\Delta\Psi + 2\text{grad}\Phi \cdot \text{grad}\Psi + \Psi\Delta\Phi$$

Rotation

$$\text{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot}\vec{A} + \text{rot}\vec{B}$$

$$\operatorname{rot}(\lambda \vec{A}) = \lambda \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\operatorname{rot}(\Phi \vec{A}) = \Phi \operatorname{rot} \vec{A} + (\operatorname{grad} \Phi) \times \vec{A}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{grad} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \vec{B} + \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A}$$

Verschiedenes

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = \vec{0}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

$$\vec{B} \cdot \operatorname{grad} \vec{A} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) + \operatorname{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) + \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \times \vec{A} - \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} \right\}$$

$$\vec{A} \cdot \operatorname{grad} \vec{A} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \vec{A}^2 - \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$$

B Differentialoperationen in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

B.1 Allgemein

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v, w); g_u := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|, g_v := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|, g_w := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right|;$$

$$\vec{e}_u := \frac{1}{g_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \vec{e}_v := \frac{1}{g_v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \vec{e}_w := \frac{1}{g_w} \frac{\partial \vec{r}}{\partial w},$$

Es seien $\Phi = \Phi(u, v, w)$ ein skalares Feld und $\vec{A}(u, v, w) = A_u(u, v, w)\vec{e}_u + A_v(u, v, w)\vec{e}_v + A_w(u, v, w)\vec{e}_w$ ein Vektorfeld.

Gradient:

$$\text{grad}\Phi = \frac{1}{g_u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{g_v} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{g_w} \frac{\partial \Phi}{\partial w} \vec{e}_w$$

Divergenz:

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{g_u g_v g_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (g_v g_w A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (g_u g_w A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (g_u g_v A_w) \right]$$

Laplace:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{g_u g_v g_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{g_v g_w}{g_u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{g_u g_w}{g_v} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{g_u g_v}{g_w} \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right) \right]$$

Rotation:

$$\text{rot}\vec{A} = \frac{1}{g_u g_v g_w} \begin{vmatrix} g_u \vec{e}_u & g_v \vec{e}_v & g_w \vec{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ g_u A_u & g_v A_v & g_w A_w \end{vmatrix}$$

B.2 Zylinderkoordinaten

Es ist $g_\rho = 1, g_\phi = \rho, g_z = 1$.

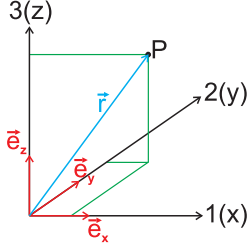
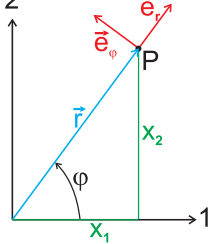
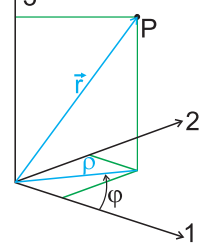
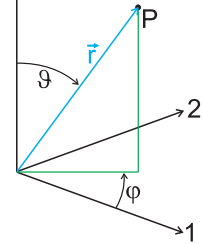
$$\text{grad}_\rho \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \text{grad}_\phi \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \text{grad}_z \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \operatorname{rot}_\rho \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \operatorname{rot}_\phi \vec{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \operatorname{rot}_z \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \\ \Delta \Phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

B.3 Kugelkoordinaten

Es ist $g_r = 1$, $g_\theta = r$, $g_\phi = r \sin \theta$.

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}_r \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \operatorname{grad}_\theta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \operatorname{grad}_\phi \Phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \operatorname{rot}_r \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right], \\ \operatorname{rot}_\theta \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r}, \\ \operatorname{rot}_\phi \vec{A} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \\ \Delta \Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

	Kartesische Koordinaten	Ebene Polarkoordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
				
Einheitsvektoren	$\vec{e}_x = (1, 0, 0)$ $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$ $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$	$\vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ $\vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi)$	$\vec{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ $\vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$	$\vec{e}_r = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ $\vec{e}_\vartheta = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)$ $\vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$
$d\vec{r}$	$d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$	$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi$	$d\vec{r} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z$	$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\vartheta \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \vec{e}_\varphi$
dA	$dA = dx dy$	$dA = r dr d\varphi$	$dA = \rho d\rho d\varphi$ $dA = \rho d\varphi dz$	$dA = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$
dV	$dV = dx dy dz$		$dV = \rho d\rho d\varphi dz$	$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$
Nabla-Operator	$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$	$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$	$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$	$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$
Zeitliche Ableitung der Einheitsvektoren	$\dot{\vec{e}}_x = 0$ $\dot{\vec{e}}_y = 0$ $\dot{\vec{e}}_z = 0$	$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_r$	$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho$ $\dot{\vec{e}}_z = 0$	$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ $\dot{\vec{e}}_\vartheta = \dot{\varphi} \cos \vartheta \vec{e}_\varphi - \dot{\vartheta} \vec{e}_r$ $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta - \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_r$
$\vec{r}(t)$	$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z$	$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r$	$\vec{r}(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho + z(t) \vec{e}_z$	$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r$
$\vec{v}(t)$	$\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y + \dot{z}(t) \vec{e}_z$	$\vec{v}(t) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$	$\vec{v}(t) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$	$\vec{v}(t) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$
$\vec{a}(t)$	$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \vec{e}_y + \ddot{z}(t) \vec{e}_z$	$\vec{a}(t) = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi$ $a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$ $a_\varphi = r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}$	$\vec{a}(t) = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z$ $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2$ $a_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}$ $a_z = \ddot{z}$	$\vec{a}(t) = a_r \vec{e}_r + a_\vartheta \vec{e}_\vartheta + a_\varphi \vec{e}_\varphi$ $a_r = \ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2$ $a_\vartheta = r \ddot{\vartheta} + 2 \dot{r} \dot{\vartheta} - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2$ $a_\varphi = r \sin \vartheta \ddot{\varphi} + 2 \sin \vartheta \dot{r} \dot{\varphi} + 2 r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi}$