Übungen zur Kontinuumsmechanik

Klaus Morawetz, Zi 564, klaus.morawetz@physik.tu-chemnitz.de, www.mpipks-dresden.mpg.de/∼morawetz

VI. Ideale Strömungen Aufgaben 1-21

1. Berechnen Sie die Positionen von Flüssigkeitselementen zur Zeit t, die Bahn- sowie Stromlinien einer ebenen Flüssigkeitsströmung, deren Geschwindigkeitsfeld durch

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{a}{r}\left(a(t-t_0)+r_0\right)\vec{e}_r + b\vec{e}_\phi$$

gegeben ist, wenn sich die Flüssigkeitselemente zur Zeit t_0 auf dem Kreis $r = r_0$ befanden.

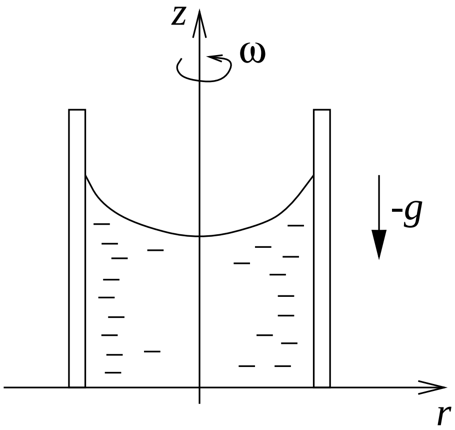
2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Volumenänderung für eine kugelsymmetrische Strömung, die außerhalb einer Kugel durch

$$\vec{v} = \frac{v_0(t)}{r^n}\vec{e}_r$$

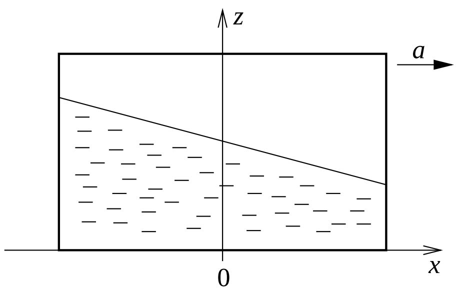
gegeben ist.

3. Eine Flüssigkeit fließt durch ein kreiszylindrisches Rohr (Querschnittsfläche F_1), das sich teilt und in zwei kreiszylindrische Rohre ausläuft (Flächen F_2 und F_3). Die Geschwindigkeits- und Dichteverteilungen seien konstant über der jeweiligen Fläche. Leiten Sie eine Relation zwischen den Geschwindigkeiten an den Querschnitten F_1, F_2, F_3 her.

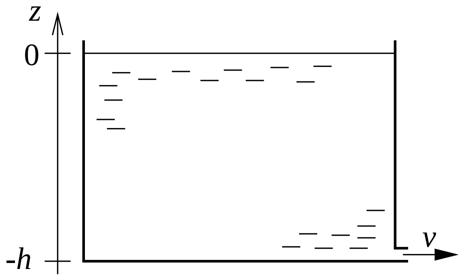
4. Ein mit Wasser gefüllter Eimer rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse. Zusätzlich wirke nur noch die Schwerkraft (Newtonscher Eimerversuch, vgl. Bild). Die Dichte des Wassers sei konstant. Man berechne die Druckverteilung in der Flüssigkeit und die geometrische Form der oberen Flüssigkeitsoberfläche.



5. Ein rechteckiger Tank, gefüllt mit einer Flüssigkeit konstanter Dichte, bewegt sich horizontal (in x-Richtung) mit konstanter Beschleunigung a. Zusätzlich wirke nur noch die Schwerkraft. Man bestimme die Druckverteilung und die Form der oberen Flüssigkeitsoberfläche.



6. Eine (ideale) Flüssigkeit fließt aus einem sehr großen Reservoir durch eine schmale Öffnung aus. Unter der Voraussetzung, daß die Dichte der Flüssigkeit konstant sei und daß der Fluß stationär und wirbelfrei ist, bestimme man die Austrittsgeschwindigkeit des Flüssigkeitsstrahls. Als äußere Kraft wirkt die Schwerkraft. (Torricelli 1646)



7. Mit welcher Geschwindigkeit strömt ein Gas aus einem Behälter mit dem Druck p_1 in einen anderen Bahälter mit kleinerem Druck $p_2 < p_1$? (Bunsen'sches Ausströmungsgesetz)

8. Beweisen Sie folgende Identitäten

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \vec{w}\times\vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - (\vec{v}\cdot\nabla)\operatorname{div}\vec{v} = |\mathbf{D}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{w}|^2 = \nabla\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}^T$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}\times\vec{w}) = \frac{1}{2}(\nabla^2 v^2 + w^2) - |\mathbf{D}|^2 - (\vec{v}\cdot\nabla)\operatorname{div}\vec{v}$$

9. Zeigen Sie

$$\operatorname{div}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\operatorname{div}\vec{v} + |\mathbf{D}|^2 - \frac{1}{2}w^2$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \frac{\partial\vec{w}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\vec{w}\times\vec{v}) = \frac{d\vec{w}}{dt} + \vec{w}\operatorname{div}\vec{v} - (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}(J\mathbf{F}^{-1}\vec{w}) = J\mathbf{F}^{-1}\operatorname{rot}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

10. Bestimmen Sie für folgende Geschwindigkeitsfelder den Verlauf der Strom-, Bahn- und Streichlinien und interpretieren Sie die Strömung für positive und negative Konstanten c:

a) $v_1 = \frac{c}{r}\cos\phi \qquad v_2 = \frac{c}{r}\sin\phi \qquad v_3 = 0$

b) $v_1 = -\frac{c}{r}\sin\phi \qquad v_2 = \frac{c}{r}\cos\phi \qquad v_3 = 0$

c) $v_1 = \frac{c}{r}\sin\phi \qquad v_2 = \frac{c}{r}\cos\phi \qquad v_3 = 0$

d) $v_1 = \frac{c}{r}(\cos\phi - \sin\phi) \qquad v_2 = \frac{c}{r}(\cos\phi + \sin\phi) \qquad v_3 = 0$

11. Der Austrittswinkel $\alpha(t)$ des Strahles eines Gartenschlauches wird periodisch verändert:

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \omega t$$

a) Bestimmen Sie für die gegebene Austrittsgeschwindigkeit v_0 die Bahnlinien zu den Zeiten $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2\omega}$ und $t = \frac{\pi}{\omega}$.

b) Wie lautet die Gleichung der Streichlinie zur aktuellen Zeit t und welche Aussagen können Sie über die Stromlinien treffen?

12. Für eine inkompressible, zweidimensionale Strömung sei die Geschwindigkeitskomponente in x_2 Richtung gegeben durch
$$v_2 = {x_1}^2 + 2x_1\, x_2$$
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Komponente in x_1 Richtung so, daß die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.

13. Für ein bestimmtes inkompressibles Strömungsfeld wird vorgeschlagen, daß die Geschwindigkeitskomponenten gegeben sind durch
$$v_1 = {x_1}^2 x_2 \qquad v_2 = 4{x_2}^3 x_3 \qquad v_3 = 2x_3$$
Kann dieses Strömungsfeld real beobachtet werden?

14. Für eine stationäre, inkompressible, reibungsfreie, zweidimensionale ($v_3 = 0$, alle Variablen unabhängig von x_3) Strömung sei die x_1 Komponente der Strömungsgeschwindigkeit gegeben als
$$v_1 = x_1^2 - x_2$$
Ist der zugehörige Druckgradient in horizontaler x_1 Richtung eine Funktion von x_1, nur von x_2 oder beiden? Begründen Sie Ihre Antwort.

15. Bestimmen Sie das Strömungspotential einer Quell- bzw. Senkenströmung mit der Quelle bzw. Senke im Ursprung des Koordinatensystems.

16. Das Strömungspotential für ein bestimmtes Strömungsfeld sei gegeben durch
$$\phi = 4x_1 x_2$$
Bestimmen Sie die zugehörige Stromfunktion.

17. Die Stromfunktion eines Strömungsfeldes einer zweidimensionalen, inkompressiblen Strömung ist durch die Gleichung
$$\psi = 2x_1 - 2x_2$$
gegeben.

    a) Skizzieren Sie die Stromlinien für diese Strömung und kennzeichnen Sie die Strömungsrichtung entlang der Stromlinien.

    b) Ist dieses Strömungsfeld wirbelfrei?

    c) Welche Beschleunigung erfahren Teilchen am Punkt (1,2)?

18. Ein zweidimensionales Strömungsfeld wird beschrieben durch das Hinzufügen einer Quelle im Ursprung des Koordinatensystems zu dem Strömungspotential
$$\phi = r^2 \cos 2\theta$$
. Bestimmen Sie die Staupunkte in der oberen ($0 \leq \theta \leq \pi$) Halbebene.

19. Die Stromfunktion für die Strömung eines reibungsfreien, inkompressiblen Fluids in der Nähe einer Ecke mit einem Winkel der Wände zueinander von $\frac{3}{4}\pi$ ist gegeben durch

$$\psi = 2r^{4/3} \sin \frac{4}{3}\theta$$

Dabei wurde der Ursprung des Koordinatensystems im Eckpunkt mit $\theta = 0$ für eine Wand gewählt. Bestimmen Sie einen Ausdruck für den Druckgradienten entlang der anderen Wand $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

20. Die Strömung zwischen zwei konzentrischen Zylindern wird durch die Differentialgleichung

$$\left[{d_r}^2 + d_r \frac{1}{r}\right] v_\theta(r) = 0$$

bestimmt. $v_\theta(r)$ bezeichnet dabei die Tangentialgeschwindigkeit an einem gegebenen Radius r. Der innere Zylinder sei in Ruhe und der äußere Zylinder rotiere mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω. Schreiben Sie die Differentialgleichung in dimensionsloser Form unter Benutzung von R_a (Radius des äußeren Zylinders) und ω als Referenzgrößen.

21. Ein inkompressibles Fluid strömt mit der Geschwindigkeit u zwischen zwei großen parallelen Platten parallel zur x_1 Achse. Die obere Platte sei in Ruhe. Das Fluid und die untere Platte sind zu Beginn in Ruhe und die untere Platte bewegt sich plötzlich mit einer konstanten Geschwindigkeit U ebenfalls in x_1 Richtung. Unter diesen Bedingungen lauten die Bewegungsgleichungen

$$\rho \partial_t u = \mu \partial_y^2 u$$

mit der Viskosität μ und der Dichte ρ. Schreiben sie die Gleichung und die Anfangs- bzw. Randbedingungen in dimensionsloser Form unter Benutzung des Plattenabstandes h, der Plattengeschwindigkeit U und der Größe $h^2\rho/\mu$ als Referenzgrößen für Längen, Geschwindigkeiten und Zeiten.