Übungen zur Kontinuumsmechanik

Klaus Morawetz, Zi 564, klaus.morawetz@physik.tu-chemnitz.de, www.mpipks-dresden.mpg.de/~morawetz

III. Dynamik Aufgaben 1-14

1. Gegeben sei ein Verschiebungsfeld in räumlichen Koordinaten

$$\vec{u}(\vec{x}) = x_1^2\vec{e}_1 + x_3^2\vec{e}_2 + x_2^2\vec{e}_3$$

   Man berechne

   a) die Koeffizientenmatrix $(\nabla_{\vec{x}})^T\vec{u} \equiv K$ zur Basis $\vec{e}_i$

   b) $(\nabla_{\vec{x}}\vec{u})^T \cdot u; (\nabla_{\vec{x}}\vec{u})^T \times \vec{u}$

   c) grad $\vec{u}$, div $\vec{u}$, rot $\vec{u}$ in den Koordinaten $\vec{e}_i$ sowie in Kugelkoordinaten

2. Für den Gummiblock aus Aufgabe II.1 sei die Zeitabhängigkeit durch $k_2 = h/t^2$ gegeben. Man berechne

   a) den Geschwindigkeitsgradienten $L_{ij} = \partial v_i/\partial x_j$

   b) die zeitliche Änderung des Volumenelementes dV, des Flächenelementes dA sowie des Linienelementes dx^2

   c) den Deformationsgeschwindigkeitstensor sym$L$ und den Rotationsgeschwindigkeitstensor asym$L$ sowie daraus den Wirbelvektor

   d) die Normaldehnungen ϵ_i und Scherwinkel

3. Man berechne die Größen der letzten Aufgabe, wenn der Gummiblock zusätzlich um 45^o verdreht wurde unter der Annahme der gleichen zeitlichen Relaxation.

4. Falls $\phi = \phi(x_i)$ und $f = f(\phi)$ zeige man, daß

$$\nabla\phi \times \nabla f = 0$$

$$\nabla \int f(\phi) d\phi = f(\phi)\nabla\phi$$

5. Man zeige

$$\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = v \operatorname{rot} u - u \operatorname{rot} v$$

$$\nabla^2(\vec{x}\vec{v}) = 2 \operatorname{div} \vec{v} + \vec{x}\nabla^2 v$$

6. Man zeige, daß $\vec{v}$ orthogonal zu $\operatorname{rot}\vec{v}$ ist, gdw. $\vec{v} = \phi\nabla\psi$.

7. Für die Deformation

$$x_1^0 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad x_2^0 = \arctan(\frac{x_2}{x_1}), \quad x_1 \neq 0, \quad x_3^0 = x_3$$

   finde man $\mathbf{F}$ sowie $\mathbf{F}^{-1}$.

a) Man zeige, daß diese Deformation isochor ist.

b) Man berechne die 3 Hauptverzerrungen (Eigenwerte von $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$) von $\mathbf{B}^{-1}$ und finde $|\mathbf{B}^{-1}|$

8. Man zeige, daß die Spannung eines materiellen Bogenelementes ds einen Extremwert annimmt, falls ds anfänglich in einer der Hauptrichtungen von $\mathbf{C}$ liegt. Man benutze, daß die Spannung gegeben ist durch $\eta = ds/ds^0$ und daß sie in den Einheitsvektoren $\vec{a}^0$ der Richtung von $d\vec{x}^0$ die Darstellung $\eta^2 = \vec{a}^0 \cdot \mathbf{C}\vec{a}^0$ hat.

9. In einer gewissen Deformation wurden die Komponenten

$$u_1 = 3(x_1^0)^2 + x_2^0, \quad u_2 = 2(x_2^0)^2 + x_3^0, \quad u_3 = 4(x_3^0)^2 + x_1^0$$

gefunden. Man berechne:

a) den Green'schen Verzerrungstensor am Koordinatenursprung O

b) die Spannung und die Länge eines Materialbogens, der anfänglich die Länge ds_0 hatte, sich im Urspung befand und in die Richtung zeigte, die mit allen Achsen den gleichen Winkel bildet.

10. Für die kleine Deformation

$$\vec{u} = \alpha x_1 x_2 (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + 2\alpha(x_1 + x_2) x_3 \vec{e}_3$$

mit konstantem α finde man den Streßtensor (Eulerscher Verzerrungstensor oder Deformationstensor), den Rotationstensor und den Rotationsvektor.

11. Für eine gewisse Bewegung eines Kontinuums ist die Geschwindigkeit gegeben durch

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = \frac{2x_2}{1+t}, \quad v_3 = \frac{3x_3}{1+t}.$$

Man finde die Geschwindigkeit in materieller Form und die Beschleunigung in materieller sowie räumlicher Form.

12. Falls $\vec{v} = \nabla\phi$ ist, zeige man, daß

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2\right).$$

13. Man zeige folgende Identitäten

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = (\nabla\vec{v})\mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{F}^{-1}}{dt} = -\mathbf{F}^{-1}(\nabla\vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{x}) = (\nabla\vec{v})(d\vec{x})$$

$$\frac{d}{dt}(ds)^2 = 2d\vec{x} \cdot (\nabla\vec{v})(d\vec{x})$$

14. Man zeige die Eulerformel ($J = |\nabla^0\vec{x}|$):

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \vec{v}$$