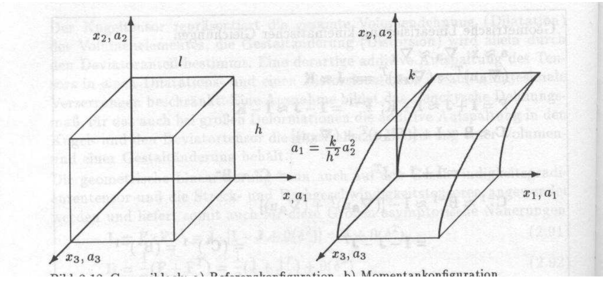
Übungen zur Kontinuumsmechanik

Klaus Morawetz, Zi 564, klaus.morawetz@physik.tu-chemnitz.de, www.mpipks-dresden.mpg.de/~morawetz

II. Deformations- und Verzerrungstensoren Aufgaben 1-9

1. Ein rechteckiger Gummiblock habe die im Bild a) angegebene Lage (Referenzkonfiguration). Nach der Deformation hat er die Lage im Bild b) (Momentankonfiguration). Der Positionsvektor $\vec{x} = \vec{x}(\vec{a})$ für die materiellen Punkte des Körpers habe in der Lage b) die Koordinaten in Lagrangedarstellung (LD)



$$x_1 = a_1 + k_2 a_2^2 \quad x_2 = a_2 \quad x_3 = a_3.$$

Man formuliere den verformten Zustand in Eulerdarstellung (ED), berechne die Koordinaten des Verschiebungsfeldes in LD und ED sowie die Koordinaten der nichtlinearen und der linearen Lagrangeschen und Almansi-Verzerrungstensoren.

2. Die materielle Beschreibung der Bewegung einer Flüssigkeit sei durch die Bahnlinien $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t)$ – also $x_i = x_i(\xi_j, t)$ – gegeben mit

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1, \\ x_2 &= k\xi_1^2 t^2 + \xi_2, \quad (k = \text{const}), \\ x_3 &= \xi_3. \end{aligned}$$

   a) Zeigen Sie, daß die Funktionaldeterminante $J = \det(\partial x_i / \partial \xi_j)$ nicht verschwindet und geben Sie die Transformation $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{x}, t)$ an.

   b) Man bestimme die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten

      1.) in materieller Beschreibungsweise $v_i(\xi_j, t)$, $b_i(\xi_j, t)$,

      2.) in Feldbeschreibungsweise $v_i(x_j, t)$, $b_i(x_j, t)$.

3. Ein materieller Punkt bewege sich im Zeitverlauf auf einer gegebenen Bahnkurve $x_i = x_i(\xi_j, t)$ mit

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + 2\xi_2 t, \\ x_2 &= \xi_1 t + \xi_2, \\ x_3 &= 3\xi_3 \end{aligned}$$

in einem bestehenden stationären Temperaturfeld

$$\vartheta = \vartheta(x_i) = 2x_1 + 3x_2.$$

   a) Man stelle das Temperaturfeld in materiellen Koordinaten dar. Was besagt diese Darstellung anschaulich?

b) Man berechne die Geschwindigkeit $v_i(\xi_j, t)$ und die Temperaturänderung $\dot{\vartheta}$ für einen bestimmten materiellen Punkt entlang seiner Bahn.

c) Wie lauten Geschwindigkeits- und das Beschleunigungsfeld $v_i(x_j, t)$ bzw. $b_i(x_j, t)$?

4. Ein starrer Körper rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(\vec{x}) = \omega_3 \vec{e}_3$ um die x_3-Achse. Man berechne das Geschwindigkeits- und das Beschleunigungsfeld $v_i(x_j, t)$ bzw. $b_i(x_j, t)$. Wie sieht die Bahnkurve $x_i(\xi_j, t)$ aus?

5. Man gebe jene Abhängigkeit $x_i(\xi_j, t)$ an, die einer reinen Volumendehnung des Materials entspricht, und zwar einer solchen, die das Volumen

   a) linear

   b) exponentiell

   mit der Zeit wachsen läßt. Wie lauten die zugehörigen Deformationstensoren F_{ij}?

6. Man berechne für ein gegebenes Geschwindigkeitsfeld $v_i(x_j, t) = x_i/(1+t)$ das zugehörige Beschleunigungsfeld $b_i = b_i(x_j, t)$ und bestimme die Bahnkurve $x_i = x_i(\xi_j, t)$ eines Substanzpunktes ξ_j.

7. Gegeben sei für eine Flüssigkeit das instationäre Geschwindigkeitsfeld $v_i(x_j, t)$

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1/(t_0 + t) \\ v_2 &= v_0 \\ v_3 &= 0 \qquad (t_0, v_0 = \text{const}) \end{aligned}$$

   a) Man gebe die Gleichung der Stromlinie an, die zur Zeit t durch den Raumpunkt (a, b, c) läuft.

   b) Wie lautet die Gleichung der Bahnlinie $x_i(\xi_j, t)$, also eines Flüssigkeitsteilchens mit den Substanzkoordinaten $x_i(t = 0) = \xi_i$?

   c) Man ermittle die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens längs seiner Bahn.

   d) Was widerfährt den Teilchen mit den materiellen Koordinaten $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$?

8. Man formuliere für folgende Deformations-und Verzerrungstensoren

   a) Starrkörperdeformation

   b) Reine Verzerrung

   c) Isochore Deformation

   d) Homogene Deformation mit Sonderfällen:

   -d1) Gleichmäßige Dilatation (sphärische oder isotrope Deformation)

   -d2) Einfache Dehnung

   -d3) Einfacher Schub

9. Man berechne für eine gegebene Deformation $\vec{x}(\vec{a}, t) = (a_1 + \alpha t a_2)\vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$

   a) das räumliche und materielle Geschwindigkeitsfeld

   b) den räumlichen und den materiellen Geschwindigkeitsgradiententensor

   c) die Änderungsgeschwindigkeiten von $(d\vec{x})$, $(d\mathbf{a})$ und (dV)