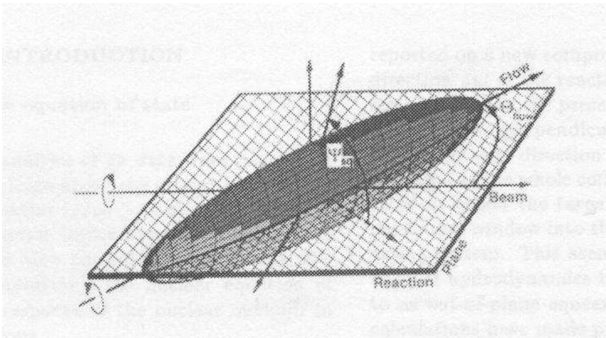
Übungen zur Kontinuumsmechanik

Klaus Morawetz, Zi 564, klaus.morawetz@physik.tu-chemnitz.de, www.mpipks-dresden.mpg.de/~morawetz

I. Matrizen (Tensoren) Aufgaben 1-16

1. Geben Sie die Transformationsmatrix R_{ij} an, die eine 90-Drehung des Koordinatensystems (im positiven Drehsinn) um die x_3-Achse bewirkt.

2. Bei Schwerionenstößen werden die Geschwindigkeiten und die Richtungen der Reaktionsprodukte gemessen. Aus diesen lässt sich ein Impulstensor konstruieren $F_{ij} = \sum_\nu \frac{p_i(\nu)p_j(\nu)}{2m(\nu)}$. Eine wichtige experimentelle Observable ist der Flußwinkel (flow) Θ_{flow} sowie der Stauchwinkel (squeeze) Ψ_{sq}.



   a) Geben Sie ein Verfahren an, wie diese Winkel berechnet werden können (Mathematica Programm).

   b) Durch die Strahlachse (beam) sowie die Flußachse (flow) wird die Reaktionsebene aufgespannt. Wie sieht die Koordinatentransformation in dieses System aus ?

   c) Zusatz: Für realistische Simulationen von Au+Au Stößen sind die zeitliche Änderung des Fluß-und Stauchwinkels zu berechnen. Dazu befinden sich die Daten unter: /afs/tu-chemnitz.de/home/urz/m/morawetz/PUBLIC/elast/BUU/auau40/auau00r.n440 entspricht z.B. Strahlenergie von 40MeV, Stossparameter 00fm und 440 ist die zeitliche Schrittzahl in 0.5fm/c. Die Datenstruktur ist im README erkärt.

3. Sei $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ eine Matrix mit den Komponenten a_{ij} und $\det \mathbf{A} = \det(a_{ij})$ deren Determinante. Zeigen Sie, daß

   a)
$$\varepsilon_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix},$$

   b)
$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{pqr} a_{1p} a_{2q} a_{3r} = \varepsilon_{pqr} a_{p1} a_{q2} a_{r3}.$$

   c)
$$\varepsilon_{ijk} \det \mathbf{A} = \varepsilon_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr} = \varepsilon_{pqr} a_{pi} a_{qj} a_{rk}\ .$$

   d)
$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} & a_{ir} \\ a_{jp} & a_{jq} & a_{jr} \\ a_{kp} & a_{kq} & a_{kr} \end{vmatrix}$$

e) Daraus sind nunmehr folgende Relationen abzuleiten:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} &= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \\
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} &= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \\
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk} &= 2\delta_{ip} \\
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 6.
\end{aligned}$$

4. Für die Determinante von $\mathbf{A}$ bestätige man die folgenden Darstellungen:

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{jq}a_{kr} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}a_{pi}a_{qj}a_{rk} \\
\det \mathbf{A} &= \frac{1}{6}(a_{ii}a_{jj}a_{kk} + 2a_{ij}a_{jk}a_{ki} - 3a_{ij}a_{ji}a_{kk}).
\end{aligned}$$

5. Für eine gegebene Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ist deren sogenannte Adjungierte $\mathbf{A}^* = [a^*_{ij}]$ elementweise definiert durch

$$a^*_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}a_{pr}a_{qs}.$$

(Vorzeichenbehaftete Unterdeterminante)

a) Man zeige, daß

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{*T} = \mathbf{A}^{*T}\mathbf{A} = D\,\mathbf{I}$$

wobei $D = \det \mathbf{A}$ und $\mathbf{I} = [\delta_{ij}]$ die Einheitsmatrix ist.

b) Für $D \neq 0$, also den Fall, daß $\mathbf{A}^{-1}$ existiert, bestätige man:

$$a^{-1}_{ij} = \frac{1}{D}a^*_{ji} \quad \text{also} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{D}\mathbf{A}^{*T}.$$

(Diese Beziehung dient der Berechnung der Inversen einer nichtsingulären Matrix.)

6. Man zeige $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$ mit Hilfe obiger Beziehungen.

7. Zeigen Sie

a)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

b)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{d}, \vec{a}, \vec{b})\vec{c} - (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})\vec{d} = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})\vec{b} - (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})\vec{a}$$

c)

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\vec{d})$$

8. Man berechne die polare Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$ für folgende Tensoren

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{array} \right\} \qquad \text{HA}: \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right\},$$

where the rotation is orthogonal $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$.

9. Der symmetrische bzw. antisymmetrische Anteil eines Tensors $\mathbf{A}$ sei wie folgt abgekürzt:

$$\begin{aligned}\mathrm{sym}\mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\\ \mathrm{asym}\mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T)\end{aligned}$$

   a) Falls $\mathbf{A}$ ein symmetrischer Tensor und $\mathbf{B}$ ein antisymmetrischer, dann zeige man, daß

   $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \;=\; a_{ij}\,b_{ij} \;=\; 0.$$

   ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ ist das Skalarprodukt zweier Matrizen.)

   b) Falls $\mathbf{A}$ ein symmetrischer Tensor und $\mathbf{B}$ ein beliebiger, dann zeige man, daß

   $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(\mathrm{sym}\mathbf{B}).$$

10. Eine der wichtigsten Eigenschaften eines antisymmetrischen Tensors ist die Existenz eines zugeordneten, sogenannten *dualen* oder *axialen* Vektors, die sich in folgendem Satz formulieren läßt: *Ist* $\mathbf{A}$ *ein antisymmetrischer Tensor, so existiert ein eindeutiger Vektor* $\vec{\omega}$ *derart, daß*

$$\mathbf{A}\vec{u} = \vec{\omega}\times\vec{u}$$

für jeden beliebigen Vektor $\vec{u}$*. Umgekehrt ebenso: Ist ein Vektor* $\vec{\omega}$ *gegeben, so existiert ein eindeutiger antisymmetrischer Tensor* $\mathbf{A}$*, für den obige Beziehung für beliebigen Vektor* $\vec{u}$ *gilt.*

   a) Man beweise diesen Satz und zeige, daß dieser duale Vektor die Koordinaten hat:

   $$\omega_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{kpq}a_{pq}.$$

   b) Man berechne die explizite Gestalt von $\vec{\omega}$ bei gegebenem $\mathbf{A}$ bzw. von $\mathbf{A}$ bei gegebenem $\vec{\omega}$.

11. Wenn $\vec{\omega}$ der duale Vektor eines antisymmetrischen Tensors $\mathbf{A}$ ist, so zeige man, daß

$$|\vec{\omega}| = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{A}|,$$

wobei $|\vec{\omega}|$ wie üblich der Betrag von $\vec{\omega}$ und $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$, koordinatenweise: $\sqrt{a_{ij}a_{ij}}$.

12. Als die drei sogenannten skalaren Hauptinvarianten eines Tensors sind erklärt (Eigenwerte: $\lambda^3 - I_A\lambda^2 + II_A\lambda - III_A$)

$$\begin{aligned} I_A &= \mathrm{Sp}(\mathbf{A}) \;=\; a_{ii}\\ II_A &= \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Sp}\mathbf{A})^2 - \mathrm{Sp}(\mathbf{A}^2)\right] \;=\; \frac{1}{2}\left[a_{ii}a_{kk} - a_{ik}a_{ki}\right]\\ III_A &= \frac{1}{6}\left[(\mathrm{Sp}\mathbf{A})^3 + 2\mathrm{Sp}(\mathbf{A}^3) - 3\mathrm{Sp}(\mathbf{A}^2)\mathrm{Sp}\mathbf{A}\right]\\ &= \frac{1}{6}\left[a_{ii}a_{jj}a_{kk} + 2a_{ik}a_{km}a_{mi} - 3a_{ik}a_{ki}a_{jj}\right] \;=\; \det\mathbf{A}\end{aligned}$$

Für einen antisymmetrischen Tensor $\mathbf{A}$ zeige man $I_A = III_A = 0$ und $II_A = |\vec{\omega}|^2$, wo $\vec{\omega}$ der duale Vektor zu $\mathbf{A}$ ist.

13. Für *reelle symmetrische* Matrizen (reelle symmetrische Tensoren 2. Stufe) $\mathbf{A}$ gilt:

    (i) $\mathbf{A}$ besitzt nur reelle Eigenwerte, und die Eigenvektoren können immer reell gewählt werden.

    (ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

    (iii) Algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte stimmen überein, d. h. zu einem Eigenwert λ_i der algebraischen Vielfachheit α_i – α_i-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $|\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})| = 0$ – gehören auch α_i linear unabhängige Eigenvektoren (Eigenrichtungen). (Ein *symmetrischer* Tensor $\mathbf{A}$ hat also genau drei reelle Eigenwerte, nicht notwendig voneinander verschieden, aber die drei Eigenvektoren spannen einen dreidimensionalen Raum auf.)

14. Man zeige: Für jeden beliebigen Tensor $\mathbf{A}$ sind die Tensoren $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ und $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ symmetrisch und, falls $\mathbf{A}$ invertierbar, positiv definit.
    Anmerkung: Ein Tensor $\mathbf{A}$ heißt positiv definit, wenn $\vec{a} \cdot \mathbf{A}\vec{a} > 0$ für jeden nichtverschwindenden Vektor $\vec{a}$.

15. Man zeige: Ein positiv definiter Tensor hat nur positive Eigenwerte.

16. Wenn $\mathbf{A}^*$ der adjungierte Tensor zu $\mathbf{A}$ ist, zeige man, daß

$$\mathbf{A}^*(\vec{a} \times \vec{b}) = \mathbf{A}\vec{a} \times \mathbf{A}\vec{b}$$

$$(\mathbf{A}^*)^T\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \mathbf{A}\vec{b} \times \mathbf{A}\vec{c}$$