Theoretische Physik II

Mechanik, Quantenmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik und Statistische Physik

Blatt 13: mathematische Apparat der QM & Näherungsverfahren II

PD Dr. Hans-Reinhard Berger
Raum 2/P311, ☎ 531-34639
✉ berger@physik.tu-chemnitz.de
Martin Puschmann
Raum 2/P314, ☎ 531-33238
✉ martin.puschmann@physik.tu-chemnitz.de
www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/TP2.php

2015/16

01 **HA** Man berechne die adjungierten Operatoren zu

a) $\hat{A} = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}$ b) $\hat{A} = x + \frac{\partial}{\partial x}$ c) $\hat{A} = x + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}$ d) $\hat{A} = x\frac{\partial}{\partial x}$

02 **HA** Man berechne die folgenden Kommutatoren!

a) $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]$ b) $\left[\hat{n}, \hat{a}\right]$ c) $\left[\hat{L}_x, \hat{x}\right]$

d) $\left[\hat{L}_x, \hat{y}\right]$ e) $\left[\hat{L}_x, \hat{p}_x\right]$ f) $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_y\right]$

$\hat{n}$, $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ sind Teilchenzahl-, Erzeugungs- und Vernichtungsoperator des harm. Oszillators

03 **HA** Zeigen Sie, dass $\hat{L}_x$ hermitisch ist.

04 **HA** Die Quantenmechanik kann auf verschiedenen Weise betrachtet und beschrieben werden. Eine Möglichkeit ist die Matrixdarstellung. Für den harmonischen Oszillator lässt sich der Hamiltonian $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ im Eigensystem durch die unendliche Matrix

$$\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

darstellen. Der normierter $n$te Eigenzustand ist in dieser Darstellung ein Vektor, der an $n$ter Stelle eine 1 trägt und sonst mit 0 gefüllt ist.
Bestimmen sie die Matrixdarstellungen zu den Operatoren $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$, $\hat{x}$ und $\hat{p}$!

05 Schätzen Sie mit dem Ritzschen Variationsverfahren die Energie des Grundzustandes im folgenden Potential $V(x) = a|x|$ (a>0) ab! Nutzen Sie für die Wellenfunktion folgenden Ansatz $\psi(x) = c_\beta \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta}\right)$!

06 Berechnen Sie die Energieeigenwerte mit Störungstheorie erster Ordnung für ein Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf mit

$$V(x) = \begin{cases} \lambda\cos\frac{2\pi x}{a} & 0 \le x \le a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

07 Für den Grundzustand des H-Atoms gilt $\Psi(r,\phi,\theta) = 2a^{-\frac{3}{2}}\exp(-\frac{r}{a})Y_{0,0}(\phi,\theta)$. Für den Winkelanteil gilt $\int |Y_{0,0}|^2\,\mathrm{d}\Omega = 1$. Prüfen Sie die Normierung. Berechnen Sie den mittleren Abstand des Elektrons vom Abstand, sowie die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron in einer Kugel mit Radius $\frac{a}{2}$ vom Kern aufhält.

08 Im dreidimensionale Zentralkraftfeldproblem ist eine dem System symmetrische Beschreibung von Vorteil. Drücken Sie hierfür die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$,$\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ durch Kugelkoordinaten aus. Berechnen Sie die damit den Auf- bzw. Absteigeoperator $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$. Berechnen Sie des weiteren $\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right]$.