Theoretische Physik II

Mechanik, Quantenmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik und Statistische Physik

Blatt 11: Harmonischer Oszillator

PD Dr. Hans-Reinhard Berger
Raum 2/P311, ☎ 531-34639
✉ berger@physik.tu-chemnitz.de
Martin Puschmann
Raum 2/P314, ☎ 531-33238
✉ martin.puschmann@physik.tu-chemnitz.de
www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/TP2.php

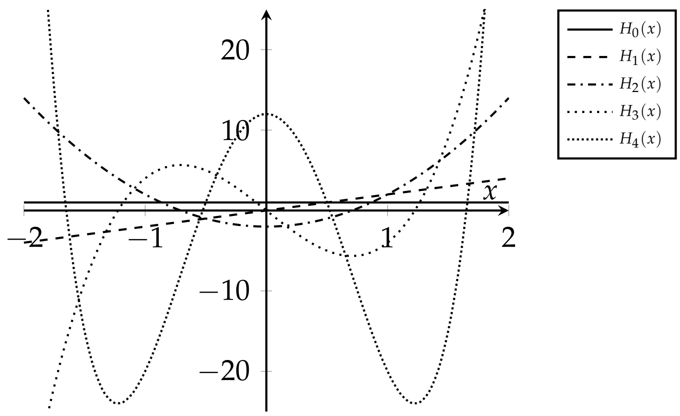
2015/16

01 Die Hermiteschen Polynome sind die zum Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$ und zum Integralkern $p(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ gehörigen orthogonalen Polynome, welche durch

$$H_n(x) = (-1)^n \left(p(x)\right)^{-1} \frac{d^n}{dx^n} p(x)$$

gebildet werden. Sie lösen die Differentialgleichung $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

a) Berechnen Sie $H_0(x), \ldots, H_4(x)$!



b) Zeigen Sie mit Hilfe der gegeben Formeln die rekursiven Beziehungen

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad \text{und}$$
$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad .$$

c) Berechnen Sie die Normierung $\int \mathrm{d}x\, p(x) H_n^2(x) = \sqrt{\pi} 2^n n!$ (Hinweis: partielle Integration).

d) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators orthogonal sind, d.h. $\int dx\, p(x) H_n(x) H_m(x) = 0$ für $n \neq m$.

02 Wir betrachten den 1-dimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator in Ortsdarstellung

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\hat{p}_\xi^2 + \xi^2\right) \quad \text{mit} \quad \hat{p}_\xi = -\mathrm{i}\frac{d}{d\xi}.$$

a) Zeigen Sie die Wirkung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperator

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \mathrm{i}\hat{p}_\xi\right) \quad \text{und} \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \mathrm{i}\hat{p}_\xi\right)$$

auf die Eigenzustände $\varphi_n(\xi)$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ und $\hat{a}\,\hat{a}^\dagger$ für einen Oszillator im Zustand $\varphi_n(\xi)$.