

**01** Bilden Sie die Gradienten der folgenden Funktionen:

a)  $V(\vec{r}) = V_0$     b)  $V(\vec{r}) = V_0 \frac{|\vec{r}|}{a}$     c)  $V(\vec{r}) = V_0 \frac{r^2}{a^2}$     d)  $V(\vec{r}) = \frac{V_0}{|\vec{r}|} \exp\left(-\frac{|\vec{n} \times \vec{r}|}{a}\right)$

$V_0, a, \vec{n}$  und  $\vec{a}$  sind konstante Skalare bzw. Vektoren.

**02** Diskutieren Sie Richtung und Betrag der Zentrifugalkraft

$$\vec{F} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad !$$

Wie sieht das gesamte Kraftfeld aus? Welche Form haben die zugehörigen Potentialflächen? Geben Sie das Potential formelmäßig an und beweisen Sie dessen Richtigkeit durch die Berechnung des Gradienten.

**03** Gegeben ist ein geschlossener Weg  $\textcircled{A} \xrightarrow{1} \textcircled{B} \xrightarrow{2} \textcircled{A}$  durch das Kraftfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \mu \begin{pmatrix} 2xz \\ -2yz \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} .$$

Das erste Teilstück  $\textcircled{A} \xrightarrow{1} \textcircled{B}$  ist durch  $x = a \cos \omega t, y = a \sin \omega t$  und  $z = ct$  mit  $t \in [0, 2\pi/\omega]$  bestimmt. Der Rückweg  $\textcircled{A} \xrightarrow{2} \textcircled{B}$  ist durch die Gerade mit  $x = a$  und  $y = 0$  gegeben.

- Berechnen Sie das Linienintegral  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$  längs des gegebenen Weges!
- Man untersuche, ob das Integral längs jedes geschlossenen Weges verschwindet!

**04** Gegeben ist das Potentialfeld  $V(\vec{r}) = (\vec{a} \cdot \vec{r})^2$  für einen konstanten Vektor  $\vec{a}$ . Man diskutiere:

- den Potentialverlauf,
- den berechneten Kraftverlauf und
- die allgemeinste Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluss dieser Kraft!

**05** Ein Teilchen wird im Schwerfeld der Erde unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Horizontale mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  abgeschossen. Berechnen Sie die Flugzeit auf ein Plateau der Höhe  $h$  sowie die dazu gehörende Flugweite! Geben Sie eine Gleichung für die Flugbahn an und berechnen Sie die maximale Wurfhöhe und den Krümmungsradius im Scheitel der Flugbahn! Der Luftwiderstand kann vernachlässigt werden.

**06** Ein homogenes Seil der Masse  $m$  und der Länge  $L$  liegt gestreckt auf einer Tischplatte, sodass ein Stück der Länge  $x_0$  überhängt und zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  losgelassen wird.

- Fertigen Sie eine Skizze an.
- Wie lautet die Bewegungsgleichung des im Erdschwerfelds reibungsfrei abrutschenden Seils vom Tisch?
- Berechnen Sie den Bewegungsablauf!
- Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn das Seilende über die Kante rutscht?

**07** Ein Teilchen bewege sich unter dem Einfluss einer Kraft mit dem Potential

$$V(x) = -Ax^2 e^{-ax} \quad \text{mit } A, a > 0$$

- Man berechne die Kraft und skizziere den Potentialverlauf. Wie muss man die Energie wählen, damit sich das Teilchen nur in einer kleinen Umgebung von  $x_{\min}$  bewegt?
- Man entwickle das Potential in der Umgebung von  $x_{\min}$  in eine Taylorreihe und bestimme die Frequenz der für kleine Auslenkungen aus  $x_{\min}$  entstehenden harmonischen Schwingung.