Theoretische Physik II

Mechanik, Quantenmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik und Statistische Physik

Blatt 03: Indexschreibweise

PD Dr. Hans-Reinhard Berger
Raum 2/P311, ☎ 531-34639
✉ berger@physik.tu-chemnitz.de
Martin Puschmann
Raum 2/P314, ☎ 531-33238
✉ martin.puschmann@physik.tu-chemnitz.de
www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/TP2.php

Hinweise zur Indexschreibweise

- Das Kronecker-Delta δ_{ij} ist wiefolgt definiert:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- Der ϵ-Tensor / Das Levi-Civita-Symbol ist wiefolgt definiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{falls min. 2 Indizes gleich sind} \end{cases}$$

  Für eine orthonormierte Rechtsbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ist die Identifikation

$$\epsilon_{ijk} = \det\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\right)$$

  möglich.

- *Einstein'sche Summenkonvention* (ESK): Tritt in einem Term der selbe Index i, j, … zweimal auf, so wird über diesen Index von 1 bis N zu summieren. Im Fall des $\mathbb{R}^3$ ist N gleich 3.

---

01 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke unter Berücksichtigung der ESK:

a) $\delta_{ij}\delta_{jk}$ b) $\delta_{ij}\epsilon_{ijk}$ c) $\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj}$ d) $\epsilon_{ijk} - \epsilon_{klm}\delta_{il}\delta_{mj}$

02 Formulieren Sie folgende Ausdrücke mithilfe des Kronecker-Deltas oder des ϵ-Tensors in Indexschreibweise:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $\vec{a} \times \vec{b}$ c) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

03 Berechnen Sie das Produkt zweier ϵ-Tensoren $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$ und zeigen Sie die Identität

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \quad .$$

04 Beweisen Sie die Graßmann-Identität unter Verwendung des ϵ-Tensors.

05 Beweisen Sie die Lagrange-Identität unter Verwendung des ϵ-Tensors.

06 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke unter Berücksichtigung der ESK:

a) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lim}$ b) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}$ c) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$