Theoretische Physik II

Mechanik, Quantenmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik und Statistische Physik

Blatt 01: Vektoren

PD Dr. Hans-Reinhard Berger
Raum 2/P311, ☎ 531-34639
✉ berger@physik.tu-chemnitz.de

Martin Puschmann
Raum 2/P314, ☎ 531-33238
✉ martin.puschmann@physik.tu-chemnitz.de

www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/TP2.php

01 Wann verschwinden die folgenden Ausdrücke und welche geometrische Bedeutung haben diese?

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

02 Zeigen Sie durch explizite Auswertung von Skalar- und Vektorprodukt, dass die Produkte

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

das Volumen V des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds liefern. Bestimmen Sie dieses Volumen für $\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$, $\vec{b} = 4\vec{e}_y$ und $\vec{c} = \vec{e}_y + \vec{e}_z$.

03 Zeigen Sie den Entwicklungssatz (Graßmann-Identität)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

und die Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad .$$

04 Zeigen Sie $\vec{c} \cdot \left[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})\right] = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

05 Stellen Sie den Ausdruck $(\vec{a} \times \vec{b})^2$ durch Skalarprodukte dar!

06 Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zu einander stehen, wenn gilt $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

07 Welche geometrischen Gebilde des Raumes werden durch die Ortsvektoren $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ in den folgenden Gleichungen beschrieben? $\vec{a}, \vec{c}, a$ und c sind konstante Vektoren des $\mathbb{R}^3$ bzw. Skalare. $\vec{e}$ ist ein Einheitsvektor.

a) $\vec{a} \cdot \vec{r} = c$ b) $a\vec{r}^2 = c$ c) $(\vec{a} \times \vec{r})^2 = c$

d) $\vec{a} \times \vec{r} = \vec{c}$ e) $\vec{e} \cdot \vec{r} - (\vec{e} \times \vec{r})^2 = 0$ f) $\mathrm{e}^{\vec{a} \cdot \vec{r}} = 1$ und $\mathrm{e}^{\vec{a} \cdot \vec{r}} = \mathrm{e}$

08 Ein Vektor $\vec{a}$ eines zweidimensionalen Systems ist in seine Komponenten parallel und senkrecht zu einem Einheitsvektor $\vec{e}$ zu zerlegen. In dieser Darstellung berechne man $|\vec{a}|^2$.

09 Bestimmen Sie unter Verwendung der Vektorrechnung die Schnittwinkel zwischen den Raumdiagonalen eines Würfels!

10 Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie!

11 Berechnen Sie folgende Ausdrücke für den Ortsvektor $\vec{r}$ und dem konstanten Vektor $\vec{a}$.

a) $\operatorname{grad} r$ b) $\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r})$ c) $\operatorname{div} \vec{r}$ d) $\operatorname{rot} \vec{r}$ e) $\left(\vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \vec{r}$

f) $\operatorname{grad} f(r)$ g) $\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r}$ h) $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r})$ i) $\operatorname{grad}(\vec{a} \times \vec{r})^2$ j) $\operatorname{rot} f(r)\vec{r}$