Dr. P. Cain
cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Teichert
fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 13 (29.04.2015)

– Matrixmultiplikation, Determinanten, Gleichungssysteme –

13/1 Führen Sie die angegebenen Matrix-Vektor- und Matrix-Matrix-Multiplikationen durch. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus g) mit dem Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$.

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 0 & -a_\mathrm{z} & a_\mathrm{y} \\ a_\mathrm{z} & 0 & -a_\mathrm{x} \\ -a_\mathrm{y} & a_\mathrm{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_\mathrm{x} \\ b_\mathrm{y} \\ b_\mathrm{z} \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13/2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$ und $\vec{c}_0$. Bei einer Drehung um den Winkel $\alpha = 60°$ um die z-Achse gehen diese in die Vektoren $\vec{a}_1 = D_\alpha \vec{a}_0$, $\vec{b}_1 = D_\alpha \vec{b}_0$ und $\vec{c}_1 = D_\alpha \vec{c}_0$ über. Dabei ist D_α die zu α gehörende Drehmatrix.

$$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ und $\vec{c}_1$.
Anschließend wird eine zweite Drehung um den Winkel $\beta = -60°$ durchgeführt. Berechnen Sie die Gesamt-Drehmatrix $D_{\alpha+\beta} = D_\beta D_\alpha$.

13/3 Bestimmen Sie die Determinanten der gegebenen Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

13/4 Zeigen Sie für 3×3-Matrizen die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln für Determinanten.

a) $\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

b) $\det(\alpha A) = \alpha^3 \det A$

c) $\det A = \det A^T$

13/5 Schreiben Sie die folgenden Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise und bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel.

a) $\begin{array}{rcr} 2x - y & = & 1 \\ x + y & = & 2 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcr} 3x + 2y & = & 1 \\ y - 3x & = & -7 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcr} 2x + y & = & -9 \\ x + 2y & = & 3 \end{array}$

d) $\begin{array}{ccc} x + y + z & = & 0 \\ 2x - z & = & -3 \\ -x + 2y - 3z & = & -2 \end{array}$

e) $\begin{array}{ccc} x - y - z & = & 1 \\ -2x + 2z + y & = & 2 \\ -6z + 6x - 4y & = & 3 \end{array}$