

Theoretische Physik I

Mathematische Grundlagen

[http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/
de/lehre/MM1_WS1415.php](http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1415.php)

Dr. P. Cain

cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Teichert

fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 7 (14.01.2015)

– Differentialgleichungen 1. Ordnung –

7/1 Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen diejenige Funktion $y(x)$, die die angegebene Randbedingung erfüllt.

- a) $x - y'(x) = 0$ $y(x = 2) = -1$
- b) $x - 3 \arccos y'(x) = 0$ $y(x = -\pi) = \sqrt{3}$
- c) $e^x - y'(x)(e^x + 1) = 0$ $y(x = 0) = \ln 2$

7/2 Die Öffnung eines mit Luft gefüllten Ballons der Masse m wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ geöffnet. Aufgrund der ausströmenden Luft erfährt der Ballon eine nach oben gerichtete, zeitabhängige Kraft $F_{\uparrow}(t)$. Gleichzeitig wirkt auf den Ballon die Gewichtskraft $F_{\downarrow}$. Reibungseffekte und die Masse der Luft werden vernachlässigt.

$$F_{\uparrow}(t) = \frac{a}{t + \tau} \quad F_{\downarrow} = -m \cdot g$$

(a, τ konstant; $g \dots$ Fallbeschleunigung)

- a) Was muss für die konstanten Größen τ , a und m gelten, damit der Ballon nach dem Öffnen vom Boden abhebt?
 - b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ sowie die Höhe $h(t)$ des Ballons in Abhängigkeit der Zeit t und skizzieren Sie die zeitlichen Verläufe.
(Anfangsbedingung: $v_0 = 0$, $h_0 = 0$)
 - c) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit? Wo befindet sich der Ballon zu diesem Zeitpunkt?
- 7/3 Ein Kondensator mit der Kapazität C wird durch einen zeitabhängigen Strom $I(t)$ aufgeladen bzw. entladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Kondensator vollständig entladen.

$$I(t) = I_0 \left(\alpha t - \frac{\alpha^2 t^2}{4} \right) e^{-\lambda t}$$

- a) Bestimmen Sie die Ladung $Q(t)$.
- b) Wie groß ist die maximale Ladung $Q_{\max}$?
Zu welchem Zeitpunkt $t_{\max}$ wird sie erreicht?
- c) Wie verhält sich die Ladung für $t \rightarrow \infty$.

7/4 Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen eine Funktion $y(x)$.

a) $y' = \sqrt{1 - y^2}$

b) $y' = \frac{y^2}{2(x^2 + 1)}$

c) $y' = \frac{\ln x}{e^y}$

d) $y' = \frac{e^y + 1}{e^y}$