

Theoretische Physik I

Mathematische Grundlagen

[http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/
de/lehre/MM1_WS1415.php](http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1415.php)

Dr. P. Cain

cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Teichert

fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 5 (03.12.2014)

– Komplexe Zahlen –

5/1 Bestimmen Sie jeweils den Realteil $\operatorname{Re} z$, den Imaginärteil $\operatorname{Im} z$, den Betrag $|z|$ und das Argument $\arg z$ der folgenden komplexen Zahlen z_i . Stellen Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene dar.

a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = -\sqrt{3} + i$

c) $z_3 = -4i$

d) $z_4 = 2(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6})$

e) $z_5 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

f) $z_6 = 2e^{i4\pi/3}$

5/2 Berechnen Sie jeweils Summe $z_1 + z_2$, Differenz $z_1 - z_2$, Produkt $z_1 \cdot z_2$ und Quotient z_1/z_2 .

a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = 1 - i$

b) $z_1 = \cos t + i \sin t$ $z_2 = i$

c) $z_1 = 1 + 2i$

$z_2 = 3 - 4i$

d) $z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 2 - 3i$

5/3 Zeigen Sie die Gültigkeit folgenden Aussagen

a) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

b) $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$

c) $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

d) $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$

5/4 Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von z .

a) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$

b) $z = \frac{\frac{5}{2} + \frac{i}{2}}{2 + \frac{1}{1-i}}$

c) $z = (\sqrt{3} + i)^{-2}$

d) $z = \sqrt{-4i}$

e) $z^8 = 256(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$

f) $z = \sqrt[7]{i}$

5/5 Betrachten Sie die eulersche und trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen.

a) Zeigen Sie die folgenden Zusammenhänge:

$$(1) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$(2) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

b) Verwenden Sie die Beziehungen aus a) und zeigen Sie:

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$(3) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$(4) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$(5) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$(6) \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(7) \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$