

Theoretische Physik I

Mathematische Grundlagen

[http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/
de/lehre/MM1_WS1415.php](http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1415.php)

Dr. P. Cain

cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Teichert

fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 3 (05.11.2014)

– Partielle Ableitung & Integration –

3/1 Gegeben ist die Funktion $f(x, y)$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial}{\partial x} f$ und $\frac{\partial}{\partial y} f$ sowie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)$ und $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)$.

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ b) $f(x, y) = \sin x \cos y$ c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = \ln y e^{-x^2}$ e) $f(x, y) = \frac{\sin x}{y}$ f) $f(x, y) = y^x$

3/2 Bestimmen Sie die Stammfunktionen $F(x)$ der angegebenen Funktionen $f(x)$.

a) $f(x) = 5x^2$ b) $f(x) = 3x^{-4}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{5x}$

d) $f(x) = x^3(2x + 1)$ e) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

g) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ h) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ i) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}} \right)^7$

j) $f(x) = \frac{-3}{5x^{2/3}}$ k) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^3}}$ l) $f(x) = \frac{7x^{-2/5} - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$

m) $f(x) = x^4 + 3x\sqrt{x} - 2 + \frac{4}{x^2}$

3/3 Lösen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung einer linearen Substitution.
Hinweis: Bringen Sie die angegebenen Ausdrücke erst in die entsprechende Form.

a) $\int \sin(3x) dx$ b) $\int \frac{5}{7 - 3x} dx$ c) $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} dx$

d) $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 1} dx$ e) $\int \frac{1}{\sqrt{-x(1+x)}} dx$ f) $\int 7e^{\frac{x}{2}+3} dx$

g) $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$ h) $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$

i) $\int \frac{x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 9x - 4}{x - 1} dx$

3/4 Lösen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration.

- | | | |
|---|-------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\int x^3(2x+1) \, dx$ | b) $\int \ln x \, dx$ | c) $\int \sin^2 x \, dx$ |
| d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}(x^2+1) \, dx$ | e) $\int \arctan x \, dx$ | f) $\int \cos^2 x \, dx$ |
| g) $\int x \sin x \, dx$ | h) $\int x \ln x \, dx$ | i) $\int \sqrt{x}(\ln x)^2 \, dx$ |
| j) $\int (\ln x)^2 \, dx$ | k) $\int \sin x \, e^x \, dx$ | |

3/5 Lösen Sie die folgenden Integrale mit einer geeigneten Substitution.

- | | | |
|--|---|--------------------------------------|
| a) $\int x \, e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx$ | b) $\int \frac{x}{x^2-3} \, dx$ | c) $\int \tan \frac{x}{2} \, dx$ |
| d) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$ | e) $\int x^{-2} \sin(x^{-1}) \, dx$ | f) $\int \frac{4x}{x^2+3} \, dx$ |
| g) $\int \cot x \, dx$ | h) $\int x(x^2+4) \, dx$ | i) $\int (3x^2+1)(x^3+x-4) \, dx$ |
| j) $\int x^2 \sin\left(\frac{x^3}{3}\right) \, dx$ | k) $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) \, dx$ | l) $\int \frac{1}{x}(\ln x+1) \, dx$ |

3/6 Lösen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

- | | | |
|--|---|----------------------------------|
| a) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$ | b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$ | c) $\int_0^x y^3 e^{-y^2} \, dy$ |
| d) $\int_3^4 \frac{x^2}{x^3-13} \, dx$ | e) $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx, n \in \mathbb{N}$ | f) $\int_1^a x^m \ln x \, dx$ |

3/7 Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ für die Funktionen $f(x)$ mittels Differenzieren nach der Konstanten.

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = x \cos(\alpha x)$ | b) $f(x) = x \sin(\alpha x)$ | c) $f(x) = x^2 e^{-\alpha x}$ |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|