Theoretische Physik I
Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1314.php

Dr. P. Cain
cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Günther
florian.guenther@s2008.tu-chemnitz.de
Raum 2/P312, Telefon 531-32334

Übung 7 (30.01.2013)

–Differentialgleichungen–

7/1 Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen diejenige Funktion $y(x)$, die die angegebene Randbedingung erfüllt.

a) $x - y'(x) = 0$ $\quad y(x = 2) = -1$

b) $x - 3\arccos y'(x) = 0$ $\quad y(x = -\pi) = \sqrt{3}$

c) $\mathrm{e}^x - y'(x)(\mathrm{e}^x + 1) = 0$ $\quad y(x = 0) = \ln 2$

7/2 Die Öffnung eines mit Luft gefüllten Ballons der Masse m wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ geöffnet. Aufgrund der ausströmenden Luft erfährt der Ballon eine nach oben gerichtete, zeitabhängige Kraft $F_\uparrow(t)$. Gleichzeitig wirkt auf den Ballon die Gewichtskraft $F_\downarrow$. (Reibungseffekte und die Masse der Luft werden vernachlässigt)

$$F_\uparrow(t) = \frac{a}{t+\tau} \qquad F_\downarrow = -m \cdot g$$

(a, τ konstant; $g \ldots$ Fallbeschleunigung)

a) Was muss für die konstanten Größen τ, a und m gelten, damit der Ballon nach dem Öffnen vom Boden abhebt?

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ sowie die Höhe $h(t)$ des Ballons in Abhängigkeit der Zeit t und skizzieren Sie die zeitlichen Verläufe. (Anfangsbedingung: $v_0 = 0$, $h_0 = 0$)

c) Was ist die maximale Geschwindigkeit? Wo befindet sich der Ballon zu diesem Zeitpunkt?

7/3 Ein Kondensator mit der Kapazität C wird durch einen zeitabhängigen Strom $I(t)$ aufgeladen bzw. entladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Kondensator vollständig entladen.

$$I(t) = I_0 \left(\alpha t - \frac{\alpha^2 t^2}{4} \right) \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

a) Bestimmen Sie die Ladung $Q(t)$.

b) Was ist die maximale Ladung Q_{max}. Zu welchem Zeitpunkt t_{max} wird sie erreicht.

c) Wie verhält sich die Ladung für $t \to \infty$.

7/4 Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen eine Funktion $y(x)$.

a) $y' = \sqrt{1-y^2}$ b) $y' = \dfrac{y^2}{2(x^2+1)}$

c) $y' = \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^y}$ d) $y' = \dfrac{\mathrm{e}^y+1}{\mathrm{e}^y}$

7/5 Ein Teilchen der Masse m tritt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Ort $x_0 = 0$ senkrecht in ein Medium ein und erfährt dort die Reibungskraft F_R. Zu welchem Zeitpunkt kommt das Teilchen zum stehen? Wie weit ist es in das Medium eingedrungen?Skizzieren Sie die Verläufe $x(t)$ und $v(t)$ sowie $v(x)$!

a) $F_R = -\beta \dot{x}^2$ b) $F_R = -\beta\sqrt{\dot{x}}$

7/6 Eine Population wächst nach folgendem Gesetz:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = aN(1-bN)\,.$$

$(a, b \in \mathbb{R},\ b > 0)$

a) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf $N(t)$ der Population (Anfangsbedingung: N_0). Machen Sie eine Fallunterscheidung bezüglich

i) $a < 0$

ii) $a > 0$ und $N_0 > 1/b$

iii) $a > 0$ und $N_0 < 1/b$.

b) Wie verhält sich das Wachstum für $b \approx 0$?

c) Welches Verhalten beobachtet man für große Zeiten t?