Theoretische Physik I
Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1314.php

Dr. P. Cain
cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Günther
florian.guenther@s2008.tu-chemnitz.de
Raum 2/P312, Telefon 531-32334

Übung 3 (26.11.2013)

– partielle Ableitungen & Taylorreihen –

3/1 Gegeben ist die Funktion $f(x, y)$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial}{\partial x} f$ und $\frac{\partial}{\partial y} f$ sowie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)$ und $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)$.

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ b) $f(x, y) = \sin x \cos y$ c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = \ln y \; \mathrm{e}^{-x^2}$ e) $f(x, y) = \dfrac{\sin x}{y}$ f) $f(x, y) = y^x$

3/2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ xy^2z \\ -xyz^2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen.

a) $\frac{\partial}{\partial x}\vec{a}$ b) $\frac{\partial}{\partial y}\vec{a}$ c) $\frac{\partial}{\partial z}\vec{a}$

d) $\frac{\partial}{\partial x}\vec{b}$ e) $\frac{\partial}{\partial y}\vec{b}$ f) $\frac{\partial}{\partial z}\vec{b}$

g) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ h) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ i) $\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

3/3 Bestimmen Sie die Taylorreihen für die gegebenen Funktionen $f(x)$.

a) $f(x) = \tan x$ b) $f(x) = \sin(x^2)$ c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e) $f(x) = \ln(1-x)$ f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ i) $f(x) = \cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

3/4 Entwickeln Sie folgende Funktionen an der Stelle x_0 in eine Taylorreihe bis zum 5. Glied.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 1$ b) $f(x) = \mathrm{e}^x$ $x_0 = 2$

c) $f(x) = \ln x$ $x_0 = 1$ d) $f(x) = \sin x$ $x_0 = \pi$

e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{-x}\right)$ $x_0 = -1$ f) $f(x) = f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$

3/5 Das bestimmte Integral $I = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ lässt sich analytisch nicht lösen. Bestimmen Sie unter Betrachtung der Taylerreihe eine Gleichung mit der I numerisch bestimmt werden kann. Bis zu welcher Ordnung muss die Reihenentwicklung betrachtet werden, damit der Fehler kleiner als 10^{-5} ist?

3/6 Nutzen Sie die Reihenentwicklung zum Bestimmen der Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2/2 + \cos x - 1}{x^4}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$