

Theoretische Physik I

Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1314.php

Dr. P. Cain

cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Günther

florian.guenther@s2008.tu-chemnitz.de
Raum 2/P312, Telefon 531-32334

Übung 2_(14.11.2013)

– Ableitung von Umkehrfunktionen & Integration –

2/1 Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$ von folgenden Funktionen $f(x)$.

- | | |
|--------------------|---|
| a) $f(x) = x^2$ | $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ |
| b) $f(x) = \sin x$ | $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow [-1, 1]$ |
| c) $f(x) = e^x$ | $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ |
| d) $f(x) = \cos x$ | $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ |
| e) $f(x) = \tan x$ | $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ |

2/2 Bestimmen Sie die Stammfunktionen $F(x)$ der angegebenen Funktionen $f(x)$.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $f(x) = 5x^2$ | b) $f(x) = 3x^{-4}$ | c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{5x}$ |
| d) $f(x) = x^3(2x + 1)$ | e) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ | f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ |
| g) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ | h) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ | i) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^7$ |
| j) $f(x) = \frac{-3}{5x^{\frac{2}{3}}}$ | k) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^3}}$ | l) $f(x) = \frac{7x^{\frac{-2}{5}} - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$ |
| m) $f(x) = (x^4 + 3x\sqrt{x} - 2 + \frac{4}{x^2})$ | | |

2/3 Lösen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung einer linearen Substitution.
Hinweis: Bringen Sie die angegeben Ausdrücke erst in die entsprechende Form.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\int \sin(3x) \, dx$ | b) $\int \frac{5}{7 - 3x} \, dx$ | c) $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} \, dx$ |
| d) $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 1} \, dx$ | e) $\int \frac{1}{\sqrt{-x(1+x)}} \, dx$ | f) $\int 7e^{\frac{x}{2}+3} \, dx$ |
| g) $\int \tan \frac{x}{2} \, dx$ | h) $\int \frac{1}{x^2 - 1} \, dx$ | i) $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \, dx$ |
| j) $\int \frac{x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 9x - 4}{x - 1} \, dx$ | | |

2/4 Lösen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration.

a) $\int x^3 (2x + 1) \, dx$	b) $\int \ln x \, dx$	c) $\int \sin^2 x \, dx$
d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} (x^2 + 1) \, dx$	e) $\int \arctan x \, dx$	f) $\int \cos^2 x \, dx$
g) $\int x \sin x \, dx$	h) $\int x \ln x \, dx$	i) $\int \sqrt{x} (\ln x)^2 \, dx$
j) $\int (\ln x)^2 \, dx$	k) $\int \sin x \, e^x \, dx$	

2/5 Lösen Sie die folgenden Integrale mit einer geeigneten Substitution.

a) $\int x \, e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$	b) $\int \frac{x}{x^2 - 3} \, dx$	c) $\int \tan x \, dx$
d) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$	e) $\int x^{-2} \sin(x^{-1}) \, dx$	f) $\int \frac{4x}{x^2 + 3} \, dx$
g) $\int \cot x \, dx$	h) $\int x (x^2 + 4) \, dx$	i) $\int (3x^2 + 1) (x^3 + x - 4) \, dx$
j) $\int x^2 \sin\left(\frac{x^3}{3}\right) \, dx$	k) $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) \, dx$	l) $\int \frac{1}{x} (\ln x + 1) \, dx$

2/6 Lösen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

a) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$	b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$	c) $\int_0^x y^3 e^{-y^2} \, dy$
d) $\int_3^4 \frac{x^2}{x^3 - 13} \, dx$	e) $\int_0^\infty x^N e^{-x} \, dx, N \in \mathbb{N}$	f) $\int_1^a x^m \ln x \, dx$

2/7 Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ für die Funktionen $f(x)$ mittels Differenzieren nach der Konstanten.

a) $f(x) = x \cos(\alpha x)$	b) $f(x) = x \sin(\alpha x)$	c) $f(x) = x^2 \cdot e^{-\alpha x}$
------------------------------	------------------------------	-------------------------------------