Theoretische Physik I
Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/lehre/MM2_SS13.php

Dr. P. Cain
cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Günther
florian.guenther@s2008.tu-chemnitz.de
Raum 2/P312, Telefon 531-32334

Übung 16 (16.05.2013)

–Vektorrechnung & Umrechnen von Koordinatensystemen –

16 /1 Löse unter Verwendung der Regeln der Vektorrechnung

a) Vereinfache den Ausdruck $\vec{c}(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) + (\vec{c} \times \vec{a})(\vec{c} \times \vec{b})$

b) Zeige, dass gilt $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2$

c) Zeige, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ genau dann senkrecht aufeinanderliegen wenn gilt: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

16 /2 Gegeben ist die Basis $A = \{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$. Die Vektoren $\{\vec{b}_x, \vec{b}_y, \vec{b}_z\}$ bilden die Basis B. Sie sind in der Basis A gegeben durch:

$$\vec{b}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A, \vec{b}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_A, \vec{b}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A$$

a) Bestimmen Sie die Matrix M, die die Darstellung eines Vektors $\vec{r}_A$ aus Basis A in Basis B transformiert.

b) Bestimmen Sie die Determinante von M.

c) Wie lautet die Darstellung von $(1\ 1\ 1)_A^T$ in der Basis B.

d) Fertigen Sie eine Skizze an.

16 /3 Welche Flächen werden mit folgenden Gleichungen beschrieben? (k, a sind reele Konstanten, $\vec{e}$ ist ein Einheitsvektor)
Hinweis: Tragen Sie jeweils in einer Skizze mehrere Ortsvektoren $\vec{r}$ ein, die die angegebenen Bedingungen erfüllen.

a) $|\vec{r} \times \vec{e}|^2 = k$

b) $a\vec{r}^2 = 1$

c) $|\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{e})\vec{e}| = k$

d) $\vec{e} \cdot \vec{r} - (\vec{e} \times \vec{r})^2 = 0$

16 /4 Die Gleichungen (I), (II) und (III) beschreiben die Umrechnung von Kugelkoordinaten $\{r, \varphi, \vartheta\}$ in kartesische Koordinaten $\{x, y, z\}$. Bestimmen Sie die Zugehörige Funktionalmatrix und die Funktionaldeterminante.

(I) $x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta$

(II) $y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta$

(III) $z = r \cdot \cos\vartheta$

16 /5 Gegeben sei der Vektor $\vec{r}$ in kartesischen Koordinaten. Bestimmen Sie die Komponenten in Kugel- und Zylinderkoordinaten.

a) $\vec{r} = \left(1, -1, \sqrt{2}\right)$

b) $\vec{r} = (-2, 2, -2)$

c) $\vec{r} = \left(4, \sqrt{11}, 3\right)$