Theoretische Physik I
Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM2_WS1415.php

Dr. P. Cain
cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Teichert
fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 22 (22.01.2014)

– Arbeit & konservative Kräfte –

22/1 Ein Teilchen wird in einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}\,)$ entlang der Kurve $\vec{r}(t)$ von A nach B bewegt. Berechnen Sie die benötigte Arbeit. Wählen Sie einen beliebigen Rückweg $B \to A$ und untersuchen Sie, ob das Umlaufintegral $A \to B \to A$ verschwindet.

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ ct \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} 2z^2 - y^2 \\ x^2 - z^2 \\ y^2 - 2x^2 \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$

b) $\vec{r} = r_0 \cos(\omega t)\vec{e}_\mathrm{r} \qquad \vec{F} = \dfrac{\alpha}{r+1}\vec{e}_\mathrm{r} \qquad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2\omega}$

22/2 Berechnen Sie die benötigte Arbeit um ein Teilchen durch das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}\,) = (-y, x, \mathrm{e}^z)$ entlang der gegebenen Wege $\vec{r}(t)$ von (0,0,0) nach (1,1,1) zu verschieben.

a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t} \\ t^2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}t\cos\frac{9\pi}{4}t \\ \sqrt{2}t\sin\frac{9\pi}{4}t \\ \frac{\ln(t+1)}{\ln 2} \end{pmatrix}$

22/3 Ein Teilchen wird entlang der Bahn $\vec{r} = r(\varphi)\vec{e}_\mathrm{r}$ durch das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}\,)$ bewegt.

$$\vec{F} = -r\vec{e}_\varphi \quad , \quad r(\varphi) = r_0(1+\cos\varphi) \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

a) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge s für einen Umlauf.

c) Bestimmen Sie die benötigte Arbeit für einen Umlauf gegen den Uhrzeigersinn.

22/4 Untersuchen Sie ob die folgenden Kräfte $\vec{F}(\vec{r}\,)$ konservativ sind. Geben Sie gegebenenfalls das Potential $V(\vec{r}\,)$ an.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} xyz \\ z^2 \\ 2yz + x \end{pmatrix}$ b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{z}{\sqrt{y}} \\ 2\sqrt{y} + \mathrm{e}^z \end{pmatrix}$

c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-y^2}\sin z \\ -2yx\mathrm{e}^{-y^2}\sin z \\ x\mathrm{e}^{-y^2}\cos z \end{pmatrix}$ d) $\vec{F} = \begin{pmatrix} xyz \\ \sin z\cos y \\ \sin y\cos z \end{pmatrix}$