Theoretische Physik I
Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM2_WS1415.php

Dr. P. Cain
cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Teichert
fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 14 (06.11.2014)

– Determinanten, Gleichungssysteme & Geraden und Ebenen –

14/1 Bestimmen Sie die Determinanten der gegebenen Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

14/2 Zeigen Sie für 3×3-Matrizen die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln für Determinanten.

a) $\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

b) $\det(\alpha A) = \alpha^3 \det A$

c) $\det A = \det A^T$

14/3 Schreiben Sie die folgenden Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise und bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel.

a) $\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ y - 3x &= -7 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + y &= -9 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - z &= -3 \\ -x + 2y - 3z &= -2 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ -2x + 2z + y &= 2 \\ -6z + 6x - 4y &= 3 \end{aligned}$

14/4 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sowie die Punkte P und Q.
Die Ebene E_1 wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und die Ebene E_2 wird durch die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ aufgespannt. Der Punkt P liegt in E_1 und der Punkt Q in E_2.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$P = (1, -2, -3)$ $\qquad$ $Q = (-2, 1, 0)$

Fertigen Sie eine Skizze an.
Bestimmen Sie

a) die selektive Form und die Hessesche Normalenform der Ebenen E_1 und E_2.
b) die Schnittgerade und den Schnittwinkel der Ebenen.
c) den Abstand von Q zu E_1 bzw. von P zu E_2.
d) welche drei Vektoren das Parallelepiped mit dem größten bzw. dem kleinsten Volumen aufspannen.