Theoretische Physik I
Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM2_WS1415.php

Dr. P. Cain
cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

F. Teichert
fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 13 (30.10.2014)

– Vektorrechnung & Matrixmultiplikation –

13/1 Welche der folgenden Aussagen sind wahr für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$?

a) $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$

b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

d) wenn $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ dann gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} = 0$

e) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{b}[\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})]$

13/2 Für welche α stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht bzw. parallel zueinander?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha/2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha} \\ \mathrm{e}^{-\alpha} \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{e}^{\alpha} + 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

13/3 Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den Raumdiagonalen eines Würfels der Kantenlänge a.

13/4 Führen Sie die angegebenen Matrix-Vektor- und Matrix-Matrix-Multiplikationen durch.

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 0 & -a_{\mathrm{z}} & a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} & 0 & -a_{\mathrm{x}} \\ -a_{\mathrm{y}} & a_{\mathrm{x}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus g) mit dem Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$.

13/5 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$ und $\vec{c}_0$. Bei einer Drehung um den Winkel α um die z-Achse gehen diese in die Vektoren $\vec{a}_1 = D_\alpha \vec{a}_0$, $\vec{b}_1 = D_\alpha \vec{b}_0$ und $\vec{c}_1 = D_\alpha \vec{c}_0$ über. Dabei ist D_α die zu α gehörende Drehmatrix.

$$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ und $\vec{c}_1$.
Anschließend wird eine zweite Drehung um den Winkel $\beta = -60^\circ$ durchgeführt. Berechnen Sie die Gesamt-Drehmatrix $D_{\alpha+\beta} = D_\beta D_\alpha$.