Theoretische Physik I: Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1516.php

Dr. Philipp Cain
cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

Fabian Teichert
fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 8

– Differentialgleichungen 1. Ordnung –

8/1 Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen diejenige Funktion $y(x)$, die die angegebene Randbedingung erfüllt.

a) $x - y'(x) = 0$ $\quad y(x = 2) = -1$

b) $x - 3 \arccos y'(x) = 0$ $\quad y(x = -\pi) = \sqrt{3}$

c) $\mathrm{e}^x - y'(x)(\mathrm{e}^x + 1) = 0$ $\quad y(x = 0) = \ln 2$

8/2 Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen eine Funktion $y(x)$.

a) $y' = \sqrt{1 - y^2}$

b) $y' = \dfrac{y^2}{2(x^2 + 1)}$

c) $y' = \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^y}$

d) $y' = \dfrac{\mathrm{e}^y + 1}{\mathrm{e}^y}$

8/3 Lösen Sie folgende homogene lineare Differentialgleichungen 1.Ordung.

a) $y' + \dfrac{x^2}{2} y = 0$

b) $y' + \sin(x) y = 0$

c) $\dfrac{y'}{2} - \dfrac{x}{x^2 - 1} y = 0$

d) $y' + xy = 0$

e) $y' + \ln(x) y = 0$

f) $y' + \tan(x) y = 0$

8/4 Lösen Sie folgende inhomogene lineare Differentialgleichungen 1.Ordung.

a) $y' + x^2 y = x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}$

b) $y' = \sin(x)(1 - y)$

c) $y' + \tan(x) y = -\sin(x) \cos(x)$

8/5 Die Öffnung eines mit Luft gefüllten Ballons der Masse m wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ geöffnet. Aufgrund der ausströmenden Luft erfährt der Ballon eine nach oben gerichtete, zeitabhängige Kraft $F_\uparrow(t)$. Gleichzeitig wirkt auf den Ballon die Gewichtskraft $F_\downarrow$. Reibungseffekte und die Masse der Luft werden vernachlässigt.

$$F_\uparrow(t) = \frac{a}{t + \tau} \qquad F_\downarrow = -m \cdot g$$

(a, τ konstant; $g \ldots$ Fallbeschleunigung)

a) Was muss für die konstanten Größen τ, a und m gelten, damit der Ballon nach dem Öffnen vom Boden abhebt?

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ sowie die Höhe $h(t)$ des Ballons in Abhängigkeit der Zeit t und skizzieren Sie die zeitlichen Verläufe. (Anfangsbedingung: $v_0 = 0$, $h_0 = 0$)

c) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit? Wo befindet sich der Ballon zu diesem Zeitpunkt?

8/6 Ein Kondensator mit der Kapazität C wird durch einen zeitabhängigen Strom $I(t)$ aufgeladen bzw. entladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Kondensator vollständig entladen.

$$I(t) = I_0 \left(\alpha t - \frac{\alpha^2 t^2}{4} \right) \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

a) Bestimmen Sie die Ladung $Q(t)$.

b) Wie groß ist die maximale Ladung Q_{max}?
Zu welchem Zeitpunkt t_{max} wird sie erreicht?

c) Wie verhält sich die Ladung für $t \to \infty$.

8/7 Ein Teilchen der Masse m tritt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Ort $x_0 = 0$ senkrecht in ein Medium ein und erfährt dort die Reibungskraft F_{R}. Zu welchem Zeitpunkt kommt das Teilchen zum stehen? Wie weit ist es in das Medium eingedrungen? Skizzieren Sie die Verläufe $x(t)$ und $v(t)$ sowie $v(x)$.

a) $F_{\text{R}} = -\beta \dot{x}^2$

b) $F_{\text{R}} = -\beta \sqrt{\dot{x}}$

8/8 Eine Population wächst nach folgendem Gesetz:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = aN(1 - bN) \qquad (a, b \in \mathbb{R}, b > 0)$$

a) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf $N(t)$ der Population
(Anfangsbedingung: N_0). Machen Sie eine Fallunterscheidung bezüglich

i) $a < 0$ und $bN_0 > 1$

ii) $a < 0$ und $bN_0 < 1$

iii) $a > 0$ und $bN_0 > 1$

iv) $a > 0$ und $bN_0 < 1$

b) Wie verhält sich das Wachstum für $b \approx 0$?

c) Welches Verhalten beobachtet man für große Zeiten t?

8/9 Eine Flasche Bier wird mit $T_1 = 7°\text{C}$ aus einem Kühlschrank genommen und 90 min bei $T_0 = 19°\text{C}$ stehen gelassen. Anschließend besitzt es eine Temperatur von $T_2 = 15°\text{C}$. Wie lange muss das Bier wieder in den 7°C-Kühlschrank, damit man es mit annehmbaren $T_3 = 8°\text{C}$ trinken kann? Es gelte das Newtonsche Abkühlungsgesetz:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_0)$$