

# Theoretische Physik I: Mathematische Grundlagen

[http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1\\_WS1516.php](http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1516.php)

**Dr. Philipp Cain**

cain@physik.tu-chemnitz.de

Raum 2/P310, Telefon 531-33144

**Fabian Teichert**

fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de

Raum 2/W449, Telefon 531-32314

## Übung 6

– Komplexe Zahlen –

6/1 Bestimmen Sie jeweils den Realteil  $\operatorname{Re} z$ , den Imaginärteil  $\operatorname{Im} z$ , den Betrag  $|z|$  und das Argument  $\arg z$  der folgenden komplexen Zahlen  $z_i$ . Stellen Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene dar.

a)  $z_1 = 1 + i$

b)  $z_2 = -\sqrt{3} + i$

c)  $z_3 = -4i$

d)  $z_4 = 2(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6})$

e)  $z_5 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

f)  $z_6 = 2e^{i4\pi/3}$

6/2 Berechnen Sie jeweils Summe  $z_1 + z_2$ , Differenz  $z_1 - z_2$ , Produkt  $z_1 \cdot z_2$  und Quotient  $z_1/z_2$ .

a)  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = 1 - i$

b)  $z_1 = \cos t + i \sin t$   $z_2 = i$

c)  $z_1 = 1 + 2i$

$z_2 = 3 - 4i$

d)  $z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 2 - 3i$

6/3 Zeigen Sie die Gültigkeit folgenden Aussagen

a)  $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

b)  $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$

c)  $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

d)  $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$

6/4 Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von  $z$ .

a)  $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$

b)  $z = \frac{\frac{5}{2} + \frac{i}{2}}{2 + \frac{1}{1-i}}$

c)  $z = \left(\sqrt{3} + i\right)^{-2}$

d)  $z = \sqrt{-4i}$

e)  $z^8 = 256(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$

f)  $z = \sqrt[7]{i}$

6/5 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

a)  $\sin(4i)$

b)  $\ln(e)$

c)  $\ln(-1)$

d)  $\ln\left(\frac{1}{2e^2}i - \frac{\sqrt{3}}{2e^2}\right)$

e)  $\left(\frac{e}{\sqrt{2}} + \frac{e}{\sqrt{2}}i\right)^{3-\frac{\pi}{12}i}$

6/6 Skizzieren Sie Realteil, Imaginärteil, Betrag und Argument der Funktion

a)  $f(z) = e^z$

b)  $f(z) = \cos z$

für

A) reelle  $z$

B) rein imaginäre  $z$

C)  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

Hinweis: Parametrisieren Sie zunächst  $z(t) \in \mathbb{C}$  und leiten Sie geeignete Ausdrücke  $f(t)$  her.

6/7 Betrachten Sie die eulersche und trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen.

a) Zeigen Sie die folgenden Zusammenhänge:

$$(1) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$(2) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

b) Verwenden Sie die Beziehungen aus a) und zeigen Sie:

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$(3) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$(4) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$(5) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$(6) \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(7) \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$