

Theoretische Physik I: Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1516.php

Dr. Philipp Cain

cain@physik.tu-chemnitz.de

Raum 2/P310, Telefon 531-33144

Fabian Teichert

fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de

Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 3

– Integration –

3/1 Bestimmen Sie die Stammfunktionen $F(x)$ der angegebenen Funktionen $f(x)$.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $f(x) = 5x^2$ | b) $f(x) = 3x^{-4}$ | c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{5x}$ |
| d) $f(x) = x^3(2x + 1)$ | e) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ | f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ |
| g) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ | h) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ | i) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^7$ |
| j) $f(x) = \frac{-3}{5x^{2/3}}$ | k) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^3}}$ | l) $f(x) = \frac{7x^{-2/5} - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$ |
| m) $f(x) = x^4 + 3x\sqrt{x} - 2 + \frac{4}{x^2}$ | | |

3/2 Lösen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung einer linearen Substitution.

Hinweis: Bringen Sie die angegebenen Ausdrücke erst in eine geeignete Form.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\int \sin(3x) \, dx$ | b) $\int \frac{5}{7 - 3x} \, dx$ | c) $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} \, dx$ |
| d) $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 1} \, dx$ | e) $\int \frac{1}{\sqrt{-x(1+x)}} \, dx$ | f) $\int 7e^{\frac{x}{2}+3} \, dx$ |
| g) $\int \frac{1}{x^2 - 1} \, dx$ | h) $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \, dx$ | |
| i) $\int \frac{x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 9x - 4}{x - 1} \, dx$ | | |

3/3 Lösen Sie die folgenden Integrale mit einer geeigneten Substitution.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\int x e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx$ | b) $\int \frac{x}{x^2 - 3} \, dx$ | c) $\int \tan \frac{x}{2} \, dx$ |
| d) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$ | e) $\int x^{-2} \sin(x^{-1}) \, dx$ | f) $\int \frac{4x}{x^2 + 3} \, dx$ |
| g) $\int \cot x \, dx$ | h) $\int x(x^2 + 4) \, dx$ | i) $\int (3x^2 + 1)(x^3 + x - 4) \, dx$ |
| j) $\int x^2 \sin\left(\frac{x^3}{3}\right) \, dx$ | k) $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) \, dx$ | l) $\int \frac{1}{x} (\ln x + 1) \, dx$ |

3/4 Lösen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration.

- a) $\int x^3(2x+1) \, dx$ b) $\int \ln x \, dx$ c) $\int \sin^2 x \, dx$
d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}(x^2+1) \, dx$ e) $\int \arctan x \, dx$ f) $\int \cos^2 x \, dx$
g) $\int x \sin x \, dx$ h) $\int x \ln x \, dx$ i) $\int \sqrt{x}(\ln x)^2 \, dx$
j) $\int (\ln x)^2 \, dx$ k) $\int \sin x e^x \, dx$

3/5 Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ für die Funktionen $f(x)$ mittels Differenzieren nach der Konstanten.

- a) $f(x) = x \cos(\alpha x)$ b) $f(x) = x \sin(\alpha x)$ c) $f(x) = x^2 e^{-\alpha x}$

3/6 Mit welchen Methoden kann die Stammfunktion $F(x)$ für die Funktionen $f(x)$ bestimmt werden? Mit welcher Methode ist der Aufwand am geringsten? Bestimmen Sie $F(x)$.

- a) $f(x) = x^4 e^x$ b) $f(x) = \sin x \cos x$ c) $f(x) = x \frac{x+2}{x^3+3x^2+2}$

3/7 Gegeben seien die folgenden Integrale.

$$I_1 = \int \frac{x+1}{f_1(x)} \, dx \qquad f_1(x) \approx (x+1)$$
$$I_2 = \int f_2(x) \sin x \, dx \qquad f_2(x) \approx \frac{1}{\sin x}$$

Finden Sie je eine Funktion $f_{1/2}(x)$, für die $I_{1/2}$

- a) elementar
b) mittels Substitution, aber nicht elementar oder partiell
c) partiell, aber nicht elementar oder mittels Substitution
d) sowohl mittels Substitution als auch partiell, aber nicht elementar integrierbar ist. Lösen Sie das Integral für Ihr gewähltes Beispiel.

3/8 Lösen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

- a) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$ b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$ c) $\int_0^x y^3 e^{-y^2} \, dy$
d) $\int_3^4 \frac{x^2}{x^3-13} \, dx$ e) $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx, n \in \mathbb{N}$ f) $\int_1^a x^m \ln x \, dx, a > 0$

3/9 Führen Sie für die Funktionen $f(x)$ eine Partialbruchzerlegung durch. Bestimmen Sie anschließend die Stammfunktion $F(x)$.

- a) $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+x}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)^2}$ c) $f(x) = \frac{3x^2+2x+3}{x^3+x}$