Theoretische Physik I: Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1516.php

Dr. Philipp Cain
cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

Fabian Teichert
fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 2

– Taylorreihen –

2/1 Bestimmen Sie die vollständige Taylorreihe für die gegebenen Funktionen $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^x$

d) $f(x) = \sin x$

e) $f(x) = \ln(1-x)$

f) $f(x) = \cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

2/2 Bestimmen Sie die Taylorreihe bis zur n. Ordnung für die gegebenen Funktionen $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \sin(x^2)$ $\quad n = 6$

b) $f(x) = 2x\cos(x^2)$ $\quad n = 5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad n = 2$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ $\quad n = 3$

2/3 Bestimmen Sie die vollständige Taylorreihe für die Funktionen $f(x)$ aus den Aufgaben 1f und 2 mittels bekannter Taylorreihen.

2/4 Entwickeln Sie folgende Funktionen an der Stelle x_0 in eine Taylorreihe bis zum 5. Glied.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 1$

b) $f(x) = \mathrm{e}^x$ $\quad x_0 = 2$

c) $f(x) = \ln x$ $\quad x_0 = 1$

d) $f(x) = \sin x$ $\quad x_0 = \pi$

e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{-x}\right)$ $\quad x_0 = -1$

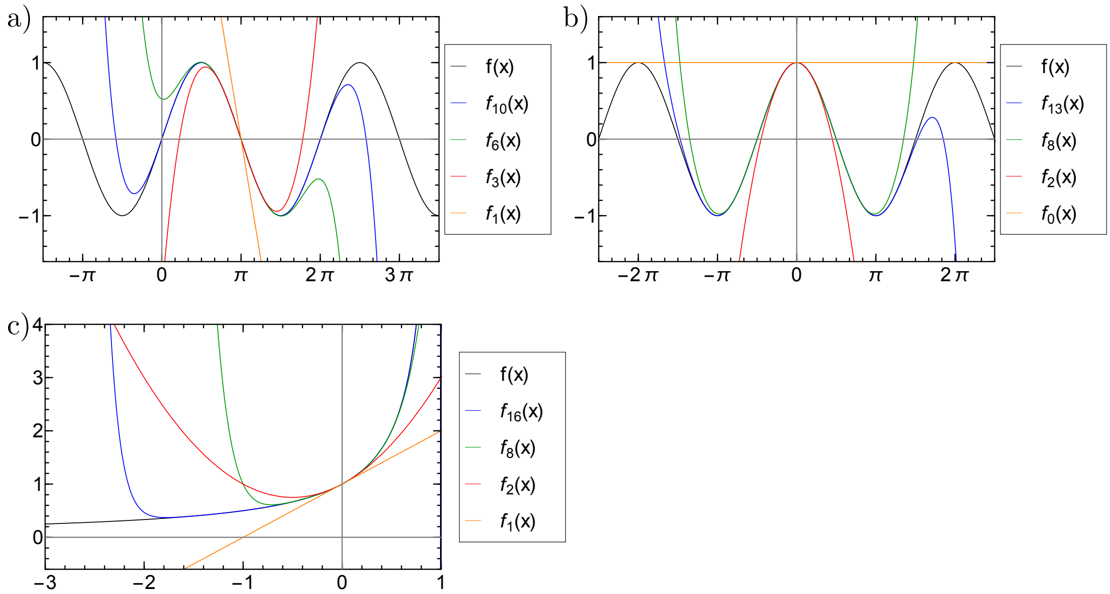
f) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

g) $f(x) = \tan x$ $\quad x_0 = 0$

2/5 Entwickeln Sie die Funktionen $f(x)$ aus den Aufgaben 4b, 4c, 4d und 4e mittels bekannter Taylorreihen an der Stelle x_0 in eine Taylorreihe bis zum 5. Glied.

2/6 Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ und die zugehörigen Taylorpolynome im Punkt $x_0 = 0$ bis zur 3. Ordnung.

2/7 In den folgenden Diagrammen sind Funktionen $f(x)$ und Näherungen $f_i(x)$ gegeben. Kann es sich bei den Funktionen $f_i(x)$ um Taylorpolynome i-ter Ordnung von $f(x)$ handeln? Begründen Sie.



2/8 Nutzen Sie die Reihenentwicklung zum Bestimmen folgender Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2 + \cos x - 1}{x^4}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$

2/9 Das bestimmte Integral

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\ \mathrm{d}x$$

lässt sich analytisch nicht lösen. Bestimmen Sie unter Betrachtung der Taylorreihe eine Gleichung, mit der I numerisch bestimmt werden kann.