Theoretische Physik I: Mathematische Grundlagen

http://www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/MM1_WS1516.php

Dr. Philipp Cain
cain@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/P310, Telefon 531-33144

Fabian Teichert
fabian.teichert@physik.tu-chemnitz.de
Raum 2/W449, Telefon 531-32314

Übung 1

– Differenzieren, Kurvendiskussion & Extremwertaufgaben –

1/1 Berechnen Sie die 1. Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$.

a) $y = x^2(1-3x)$ b) $y = a^x$ c) $y = \tan x$

d) $y = x^3(x^2-1)^2$ e) $y = 2^{\sin 3x}$ f) $y = \tan^2(x^3-1)$

g) $y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ h) $y = \dfrac{x^6}{2+x+3x^4}$ i) $y = \dfrac{1}{1+e^{-x^2}}$

j) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ k) $y = \ln\dfrac{x^6}{2+x+3x^4}$ l) $y = x^x$

1/2 Berechnen Sie die 1. Ableitung $y' = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ als Grenzwert des Differenzenquotienten.

a) $y = x$ b) $y = x^2$ c) $y = \dfrac{1}{x}$ d) $y = \mathrm{e}^x$

1/3 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$ i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

1/4 Sind die folgenden Funktionen im gesamten Definitionsgebiet stetig? Wie oft sind sie differenzierbar?

a) $f(x) = x^3 + 2$ b) $f(x) = \mathrm{e}^x$

c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ d) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ 3-x & x < 2 \end{cases}$ f) $f(x) = |x+1|^3$

g) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ h) $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

i) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$

1/5 Nennen Sie eine Funktion, die

a) auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und an genau 2 Stellen nicht differenzierbar ist.

b) an genau 2 Stellen unstetig und auf ganz $\mathbb{R}$ differnzierbar ist.

1/6 Führen Sie für folgende Funktionen $f(x)$ eine Kurvendiskussion durch. Bestimmen Sie Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und Symmetrien, sowie asymptotisches Verhalten. Fertigen Sie eine Skizze an. Diskutieren Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von f und f' im Punkt $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ c) $f(x) = x\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$

1/7 Für die folgenden Aufgaben lassen sich keine analytischen Gleichungen für die Extrempunkte x_E und die Wendepunkte x_W angeben. Bestimmen Sie stattdessen die Funktion $G_\mathrm{E}(x)$ bzw. $G_\mathrm{W}(x)$, für die $G_\mathrm{E}(x_\mathrm{E}) = 0$ bzw. $G_\mathrm{W}(x_\mathrm{W}) = 0$ gilt. Diskutieren Sie das Verhalten für $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = x \cdot \cos x$

1/8 Die Punkte $A = (0, 0)$, $B = (0, f(x))$, $C = (x, 0)$ und $D = (x, f(x))$ bilden ein Rechteck. Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie für welche Werte von $x \geq 0$ der Flächeninhalt extremal wird. Um was für ein Extremum handelt es sich?

a) $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^3}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ d) $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2 + 3}{x}$

1/9 Ein Ohmscher Widerstand der Größe $300\,\Omega$ soll so in zwei Teilwiderstände R_1 und R_2 aufgeteilt werden, dass der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung der beiden Teilwiderstände maximal wird. Für den Gesamtwiderstand R der Parallelschaltung zweier Widerstände R_1 und R_2 gilt $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Bestimmen Sie den Widerstand der beiden Teilwiderstände so, dass der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung der beiden Teilwiderstände maximal wird, und geben Sie den maximalen Gesamtwiderstand an.

1/10 Ein mit einer Flüssigkeit vollständig gefülltes Gefäß der Höhe h ($h = 1\,\mathrm{m}$) mit vertikaler Wand steht auf einer horizontalen Ebene. Aus einer Öffnung in der Gefäßwand, die in der Tiefe x unterhalb des Flüssigkeitsspiegels liegt, dringt ein Flüssigkeitsstrahl. Nach dem Gesetz von Torricelli verlässt die Flüssigkeit das Gefäß mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$ ($g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$). Bestimmen Sie die Tiefe x so, dass der Flüssigkeitsstrahl die maximale Weite s erzielt, und geben Sie die maximale Weite an.

1/11 Im Stadtzentrum soll eine zylinderförmige Werbesäule aufgestellt werden. Aus Ersparnisgründen soll sie innen möglichst hohl sein. Um andererseits eine hohe Standfestigkeit zu erreichen, muss sie zumindest teilweise gefüllt sein. Das Äußere ist ein hohler Metallzylinder. Sie ist innen 6 m hoch und ihre Masse beträgt leer 400 kg. Wie hoch muss die Werbesäule mit Füllmaterial gefüllt werden, damit sie möglichst standfest ist, d.h. ihr Schwerpunkt möglichst tief liegt? Wäre sie vollständig gefüllt, so hätte das Füllmaterial die Masse 1200 kg.

1/12 Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$ von folgenden Funktionen $f(x)$.

a) $f(x) = x^2$ $\quad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

b) $f(x) = \sin x$ $\quad f : (-\pi/2, \pi/2) \to [-1, 1]$

c) $f(x) = \mathrm{e}^x$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

d) $f(x) = \cos x$ $\quad f : [0, \pi] \to [-1, 1]$

e) $f(x) = \tan x$ $\quad f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$