Kontinuumsphysik

PD Dr. Hans-Reinhard Berger
Raum 2/P311, ☎ 531-34639
✉ berger@physik.tu-chemnitz.de
Martin Puschmann
Raum 2/P314, ☎ 531-33238
✉ martin.puschmann@physik.tu-chemnitz.de
www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/KP.php

Blatt 03: Grundlagen der Kinematik II

01 **HA** Berechnen Sie mit Hilfe der Summenkonvention die folgenden Ausdrücke:

a) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ b) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$

02 **HA** Berechnen Sie mit Hilfe der Summenkonvention die folgenden Ausdrücke, wobei φ, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ortsabhängige Funktionen sind.

a) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$ b) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$ c) $\operatorname{div}(\varphi\vec{a})$ d) $\operatorname{rot}(\varphi\vec{a})$

e) $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b})$ f) $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b})$ g) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$

03 Gegeben sei für eine Flüssigkeit das instationäre Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1/(t_0+t) \\ v_o \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v_0, t_0 = \text{const.}$$

a) Geben Sie die Gleichung der Stromlinie an, die zur Zeit t durch den Raumpunkt (a, b, c) läuft!

b) Wie lautet die Gleichung der Bahnlinie $x_i(\xi_j, t)$ (eines Flüssigkeitsteilchens) mit den Substanzkoordinaten $x_i(t=0) = \xi_i$?

c) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens längs seiner Bahn!

d) Was widerfährt den Teilchen mit den materiellen Koordinaten $\xi_1 = 0,\ \xi_3 = 0$?

04 Bestimmen Sie für folgende stationäre zweidimensionale Geschwindigkeitsfelder den Verlauf der Strom-, Bahn- und Streichlinien und interpretieren Sie die Strömung für positive und negative Konstanten c. Im Folgenden gelte $\tan\phi = x_2/x_1$ und $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

a) $v_1 = \frac{c}{r}\cos\phi,\ v_2 = \frac{c}{r}\sin\phi$ b) $v_1 = -\frac{c}{r}\sin\phi,\ v_2 = \frac{c}{r}\cos\phi$

c) $v_1 = \frac{c}{r}\sin\phi,\ v_2 = \frac{c}{r}\cos\phi$ d) $v_{1/2} = \frac{c}{r}\left(\cos\phi \mp \sin\phi\right)$

05 Berechnen Sie für eine gegebene Deformation

$$\vec{r} = \vec{f}(\vec{\xi}, t) = \begin{pmatrix} \xi_1 + \alpha t \xi_2 \\ \xi_2 + v_0 t \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, v_0 = \text{const.}$

a) das räumliche und materielle Geschwindigkeitsfeld,

b) en räumlichen und materiellen Geschwindigkeitsgradiententensor sowie

c) die Änderungsgeschwindigkeiten von Vektor-, Flächen- und Volumenelement!

06 Man zeige, dass für die zweite Zeitableitung der Determinante des Deformationsgradienten die folgende Beziehung erfüllt ist

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\det\mathbf{F} = \det\mathbf{F}\operatorname{div}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\operatorname{div}\vec{v}\right) \quad .$$