Kontinuumsphysik

Blatt 01: Mathematische Grundlagen

PD Dr. Hans-Reinhard Berger
Raum 2/P311, ☎ 531-34639
✉ berger@physik.tu-chemnitz.de
Martin Puschmann
Raum 2/P314, ☎ 531-33238
✉ martin.puschmann@physik.tu-chemnitz.de
www.tu-chemnitz.de/physik/THUS/de/lehre/KP.php

---

01 Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke unter Verwendung der Summenkonvention im $\mathbb{R}^3$ mit numerischen Indizes! Formulieren Sie die entsprechenden Ausdrücke in Matrix-Vektor-Notation und finden Sie äquivalente Ausdrücke!

a) t_{ii} b) $p_{ij}u_j$, $u_j p_{ij}$, $p_{ij}u_i$, $u_i p_{ij}$ c) $a_i q_{ij} b_j$, $b_j q_{ij} a_i$

02 Sind $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ die orthogonalen Basisvektoren eines rechtshändigen Koordinatensystems, so lässt der vollständige antisymmetrische Tensor 3. Stufe (Levi-Civita-Tensor oder Epsilontensor), ε_{ijk}, durch $\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)$ einführen.

a) Bestimmen Sie die Komponenten von ε_{ijk}!

b) Beschreiben Sie die Komponenten des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors!

c) Zeigen Sie durch direktes Einsetzen die Richtigkeit der Relation $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ (Entwicklungssatz)!

d) Verwenden Sie den Entwicklungssatz um die Relation $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ nachzuweisen!

03 Berechnen Sie unter der Summenkonvention die folgenden Ausdrücke im $\mathbb{R}^3$!

a) δ_{ii} b) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$ c) $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}$ d) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jki}$ e) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lik}$ f) $\varepsilon_{ijk}a_j a_k$

04 Gegeben sei das Produkt $\varepsilon\vec{\omega} = \boldsymbol{W}$.

a) Zeigen Sie das der Tensor $\boldsymbol{W}$ antisymmetrisch ist!

b) Wie kann man mit Hilfe dieser Beziehung ein Vektorprodukt darstellen?

c) Stellen Sie die Gleichung nach $\vec{\omega}$ um!

05 Wie kann man die Determinante einer (3×3)-Matrix durch deren Matrixelemente und den Levi-Civita-Tensor ausdrücken?

06 Eine Matrix $\boldsymbol{C}$ beschreibt eine orthogonale Koordinatentransformation.

a) Geben Sie sowohl in Matrix-Vektor-Notation als auch in Indexschreibweise eine Relation zwischen der Darstellung eines Tensors 2. Stufe $\boldsymbol{T}$ im Referenzkoordinatensystem Σ und der Darstellung des gleichen Tensors im transformierten Koordinatensystem Σ' an!

b) Beweisen Sie, dass die Transformationsmatrix $\boldsymbol{C}$ kein Tensor 2. Stufe ist!

c) Welche Form hat $\boldsymbol{C}$ bei einer 90° Drehung des Referenzkoordinatensystems um die z-Achse?

07 Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt, die Determinante und die Spur einer Matrix invariant gegenüber orthogonalen Koordinatentransformationen sind!