27. Leiter im elektrischen Feld

27.1. Grundsätzliches

– Die POISSON-Gleichung

$$-\Delta U \equiv -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (25-20)$$

beschreibt den Zusammenhang zwischen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ im Raum einerseits und Potentialverteilung $U(\vec{r})$ andererseits.

Mit $U(\vec{r})$ ist wegen

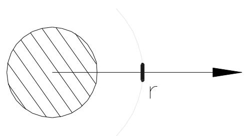
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\, U(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) U(\vec{r}) \qquad (25-18)$$

gleichzeitig die Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ gegeben.

Die POISSON-Gleichung hat unter gegebenen Randbedingungen stets eine eindeutige Lösung. Mitunter kann diese Lösung schon erraten werden.

– **Beispiel:** Feld einer **beliebigen** kugelsymmetrischen Ladungsverteilung[1] ■

· Feldstärke E auf „Außenkugel“ r ist überall gleich



Für den Fluss folgt damit

$$\Phi(r) = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{(Kugeloberfläche)}} \cdot E(r) \qquad (1)$$

· Andererseits ist

$$\Phi_{\text{geschl. Fläche}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (25-10)$$

Gleichsetzen von Gl. (1) und (25-10) liefert

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 \cdot E(r)$$

[1] Das kann auch etwas sehr verrücktes sein - einzige Bedingung ist Kugelsymmetrie!

Bei weiterer Umformung erhält man eine schon bekannte Gleichung

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{25-5}$$

Das Feld um eine beliebige kugelsymmetrische Ladungsverteilung ist also gleich dem einer Punktladung mit $Q = Q_{\text{ges. Ladungsverteilung}}$ im Mittelpunkt.

– Wir untersuchen nun elektrische Felder in einem Leiter.

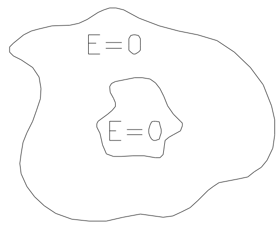
  Solange im Leiter ein elektrisches Feld herrscht, werden die Ladungsträger dem folgen, bis $E = 0$ ist.

  ⇒ Das Leiterinnere ist feldfrei ($E = 0$) und liegt damit auf ein und demselben Potential ($U = \text{const.}$)

– Der Leiter besitze jetzt einen leeren Hohlraum:

  Das Leiterinnere ist feldfrei (s.o.) und im Hohlraum existieren keine Ladungen („leer“), also keine Quellen und Senken für E.

  ⇒ Leere, leiterumschlossene Hohlräume sind feldfrei. ($E = 0$)

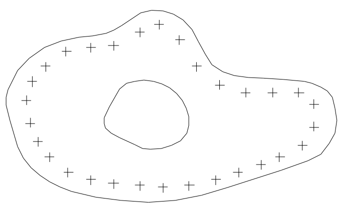


– Wir wissen jetzt, dass das Innere eines Leiters und auch leere Hohlräume in ihm **immer** feldfrei sind, **auch** bei Existenz äußerer elektrischer Felder.

  Ein Metallkasten oder Netzkäfig schirmt $\vec{E}$-Felder ab und wird als ***FARADAY*-*scher Käfig*** bezeichnet.

– Jetzt sei der Leiter geladenen:

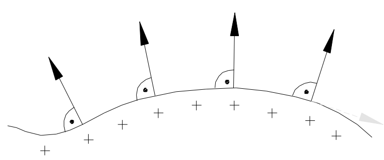
  · Die (Überschuss-)Ladung setzt sich an die (äußere) Oberfläche, egal, ob ein Hohlraum existiert oder nicht, und bildet dort eine ***Flächenladungsdichte***.



  · Dies ist energetisch günstiger als die Ansammlung an der inneren Oberfläche („Ladungen auf maximalem Abstand“)

  · Nach außen hat der geladene Leiter ein Feld, das jedoch immer genau senkrecht auf der Oberfläche steht:

    Feldkomponenten **in** der Oberfläche würden zu Strömen führen, solange, bis diese Komponente verschwunden ist.



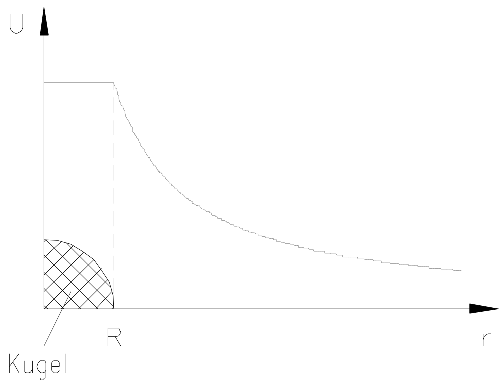
    (korrekter: Es werden solange Ladungen verschoben, bis das durch sie aufgebaute Gegenfeld das ursprüngliche $\vec{E}$-Feld vollständig kompensiert.)

· Mit einem Ladungslöffel kann man leicht Ladungen auf der inneren Oberfläche eines FARADAY-Bechers abladen, da die Ladungen sofort nach außen fließen; gegebenenfalls bis zur Entstehung großer Potentialunterschiede zwischen Außen-Oberfläche und Umgebung (Prinzip des Bandgenerators, Erzeugung von Megavolt!)

– Betrachten wir nun eine geladene Kugel:

Wir haben am Anfang des Kapitels gesehen, dass das Feld um eine geladene Kugel (die ja auch eine beliebige kugelsymmetrische Ladungsverteilung ist) gleich dem einer Punktladung ist. Innerhalb ist es, wie wir jetzt wissen, Null.

Analog das Potential: es ist außen und bis einschließlich der Oberfläche selbst gleich dem einer Punktladung, und zwar



$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (25-16)$$

Innen ist das Potential dann konstant. Dort, wo die Ladung sitzt (am Kugelradius R) gilt

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (2)$$

⇒ Zwei Kugeln (R_1, Q_1), (R_2, Q_2) haben also dann gleiches U, wenn

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \qquad (*)$$

ist (vgl. auch Gl. (2)!).

– Da die Ladungen auf den Oberflächen verteilt sind, betrachten wir jetzt die Flächenladungsdichten.

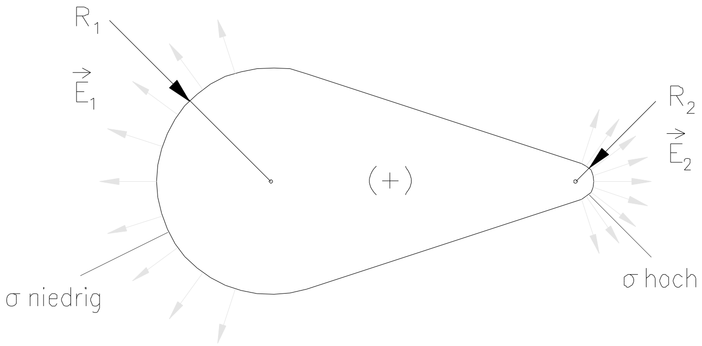
$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad (3)$$

⇒ Wenn $\frac{Q}{R}$ konstant ist (in Gl. (∗)), muss $\sigma \sim \frac{1}{R}$ sein!

Kleine Kugeln erfordern also große Flächenladungsdichten und umgekehrt, wenn ein bestimmtes konstantes U eingehalten werden soll.

– Dies gilt auch für unterschiedlich gekrümmte Stellen der Oberfläche eines unregelmäßig geformten Leiters:

Damit die Oberfläche wirklich eine Äquipotentialfläche ist und die Feldlinien senkrecht austreten, muss σ je nach Krümmungsradius unterschiedlich sein, so dass $\sigma \sim R^{-1}$ ist. **!**



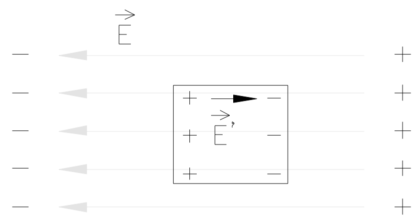
wegen $R_1 >> R_2$ gilt $\vec{E}_1 << \vec{E}_2$ (d.h. hohe Feldliniendichte bei R_2)

⇒ An Spitzen kommt es bevorzugt zu spontanen elektrischen Entladungen. **!**

27.2. Influenz

– Wir bringen eine Metallkörper in ein einigermaßen homogenes $\vec{E}$-Feld.

Es kommt zur Ladungstrennung im Körper, so lange, bis das Körperinnere feldfrei ist.



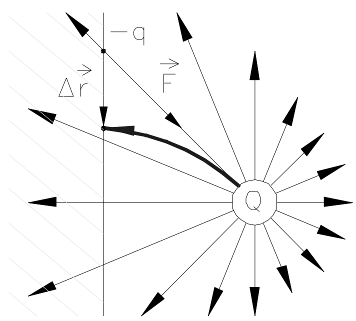
Betrachtung: Die getrennten Ladungen bauen ein Feld $\vec{E}'$ auf, das sich mit dem äußeren Feld $\vec{E}$ zu Null ergänzt.

Diese Ladungstrennung heißt ***Influenz***. **!**

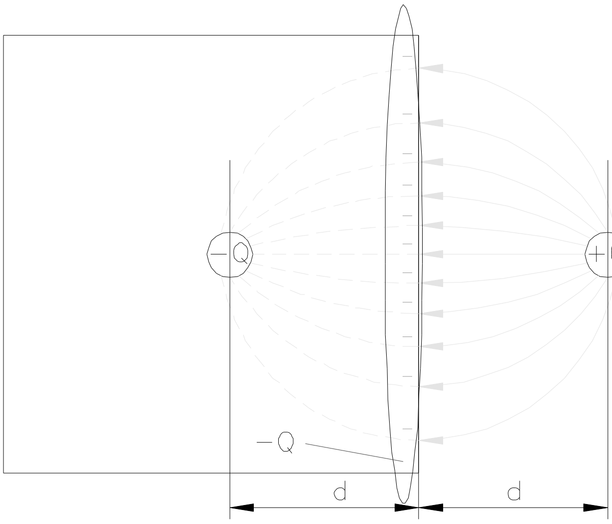
– Wir untersuchen nun ein inhomogenes Feld:

· Einer gegebenen Punktladung Q wird plötzlich eine leitende Platte gegenübergestellt:

· Es wirkt eine Kraft $\vec{F}$ auf (z.B.) eine kleine Ladung -q in der Oberfläche, die dadurch verschoben wird ($\Delta\vec{r}$), so lange, bis die entsprechende Feldlinie senkrecht auf der Oberfläche steht.



· Letztlich ist in der Oberfläche eine negative Ladungsmenge angesammelt, die der Ladung Q betragsmäßig entspricht.



· Diese Ladung -Q ist durch Ladungstrennung entstanden, insgesamt ist der Plattenkörper neutral. **!**

Wo sitzt nun aber +Q? Theoretisch unendlich weit weg, sonst würde Gl. (25-2‘) (s.u.) nicht gelten!

– Übrigens: Das Feldlinienbild sieht so aus, als ob im Innern des Metallkörpers eine ***Spiegelladung***/Bildladung -Q säße. Die Ladung Q wird von der selbst induzierten negativen Ladungsverteilung in der Platten-Oberfläche genauso angezogen, wie sie von der Spiegelladung angezogen werden würde:

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \qquad (25-2)$$

Unter den hier gegebenen Bedingungen $|Q_1| = |Q_2| = Q, \quad r = 2d$ folgt für die Kraft F zwischen der Ladung Q und der Wand

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 4d^2} \qquad (25-2‘)$$

27.3. Kapazität

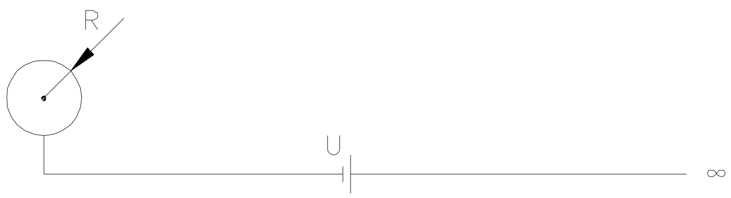
– Bisher haben wir eine bestimmte Ladungsverteilung betrachtet (z.B. Ladung Q auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R) und daraus abgeleitet, wie groß innerhalb und außerhalb der Kugel das Potential U und damit die Feldstärke $\vec{E}$ sind.

Dabei hatte z.B. die Oberfläche der geladenen leitfähigen Kugel ein Potential

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,, \qquad (25\text{-}16)$$

wobei wir generell das Potential so normiert hatten, dass $U(\infty) = 0$ ist (vgl. *<25.3.>*).

– Man kann die Sache auch anders herum betrachten: Wir haben eine zunächst ungeladene Kugel vom Radius R, geben ihr eine Spannung U gegenüber der unendlich entfernten Umgebung



und werden finden, dass genau die Ladung

$$Q = U \cdot 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (4)$$

auf sie fließt. Eine metallische Kugel vom Radius R ist also in der Lage, pro Spannungseinheit eine Ladung

$$\frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (5)$$

aufzunehmen. Die Kugel hat also die ***Kapazität***

$$C \equiv \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (6)$$

Maß-einheit: $[C] = \frac{C}{V} \equiv F$ ... Farad SI

Diskussion: ◆

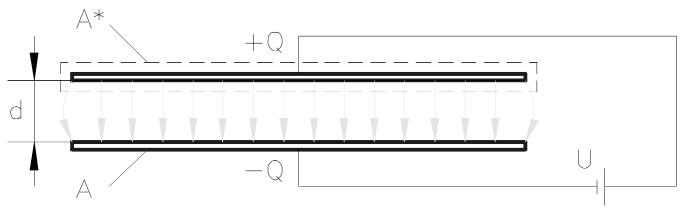
Bei einer Vergrößerung von R passt mehr Ladung Q bei gleicher Spannung auf die Kugel, da sich die Ladungen „besser aus dem Weg gehen können“.

Die Kapazität ist eine allgemeine Eigenschaft. Jede leitfähige Anordnung, auf die Ladungen fließen können, hat eine Kapazität der Größe **!**

$$C = \frac{Q}{U} \qquad (7)$$

Eine Anordnung, bei der es in erster Linie auf die Eigenschaft Kapazität ankommt, heißt ***Kondensator***.

– **Paradebeispiel:** ***Plattenkondensator*** (Fläche A, Abstand d) ■



Anschluss der Platten an eine Spannungsquelle U ⇒ auf eine Platte fließt die Ladung +Q, auf die andere -Q.

Wie groß ist die Kapazität C? Zur Beantwortung nutzen wir Gl. (25-10)

$$\oint_{\text{geschl. Fläche}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q_{\text{ges, innerhalb d. Fläche}} \tag{25-10}$$

Offensichtlich sitzen die Ladungen auf den „inneren Oberflächen“ der Platten und das Feld befindet sich im Wesentlichen im Zwischenraum.

Integration über die Fläche A* liefert

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = E \cdot A = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q \tag{8}$$

Da das $\vec{E}$-Feld homogen ist, gilt E = U / d, (d.h. ein linearer Anstieg des Potentials von einer Platte zur anderen) und liefert, eingesetzt in Gl. (8)

$$\Rightarrow \qquad \frac{U}{d} \cdot A = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q$$

Umgeformt ergibt sich die Kapazität eines Plattenkondensators zu

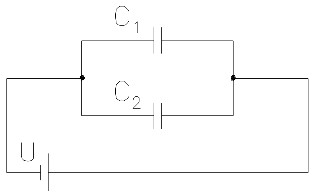
$$C \equiv \frac{Q}{U} = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d} \tag{9}$$

Kommentar: ◆

Für eine besonders große Kapazität benötigt man große Flächen A bzw. einen kleinen Plattenabstand d.

27.4. Kondensator im Stromkreis

– ***Parallelschaltung***
Die Ladungen addieren sich, auf jeden Kondensator fließt eine bestimmte Ladung $\pm Q_i$



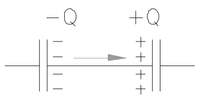
$$Q_{ges} = \sum_i Q_i$$

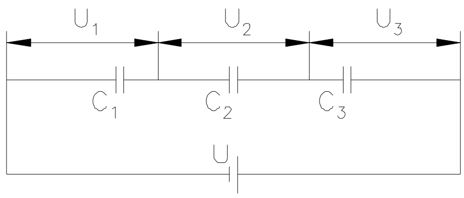
mit $C \equiv Q / U$ lt. Gl. (7) folgt

$$Q_{ges} = \sum_i U \cdot C_i = U \cdot \sum_i C_i = U \cdot C_{ges}$$

$$\Rightarrow \quad C_{ges} = \sum_i C_i \qquad (10)$$

– ***Reihenschaltung***
Die Spannungen addieren sich, auf jeden Kondensator fließt die gleiche Ladung, da diese nur über Influenz „hin- und hergeschoben werden können".





$$U \quad \equiv U_{ges} = \sum_i U_i$$

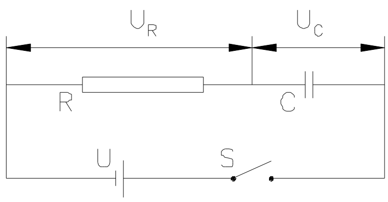
mit $U \equiv Q / C$ lt. Gl. (7') folgt

$$U_{ges} = \sum_i \frac{Q_i}{C_i} = Q \cdot \sum_i \frac{1}{C_i} = U \cdot \frac{1}{C_{ges}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{C_{ges}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \qquad (11)$$

– Ladevorgang eines Kondensators:

Nach der KIRCHHOFFschen Maschenregel ist



$$U_0 = U_R + U_C \qquad (12)$$

Wir ersetzen jetzt

$$U_R = I \cdot R \qquad (26-6b)$$

und $$U_C = \frac{Q}{C} \qquad (7)$$

In Gl. (12) eingesetzt ergibt sich bei Beachtung der Zeitabhängigkeit von I und Q

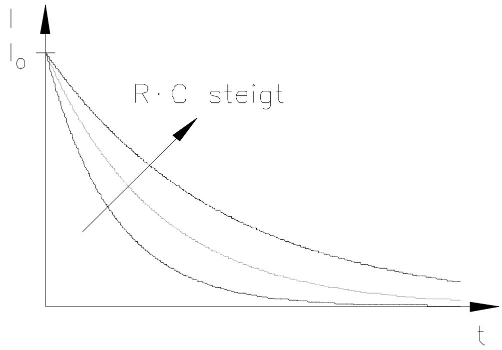
$$U_0 = I(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} \tag{13}$$

Wenn man bedenkt, dass I und Q verkoppelt sind, und zwar über

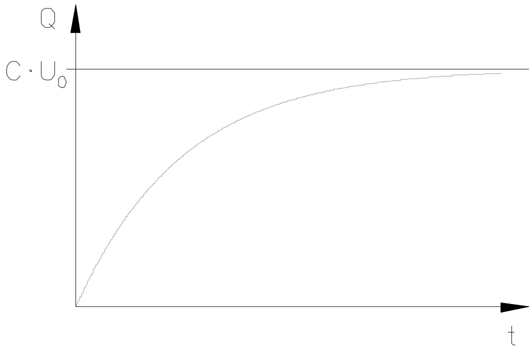
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

kann man Gl. (13) leicht lösen und erhält für den Ladestrom des Kondensators

$$I(t) = \underbrace{\frac{U_0}{R}}_{= I_0 = I(t=0)} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \tag{14}$$



Daraus folgt durch Integration die zeitabhängige Kondensatorladung



$$Q(t) = C \cdot U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right) \tag{15}$$

Kommentar: ◆

- Die Kondensatorladung geht asymptotisch gegen $Q = C \cdot U_0$, der Strom entsprechend gegen Null.
- Die Geschwindigkeit, mit der sich der Endzustand einstellt, hängt von $R \cdot C$ ab. **!**

  Eine Betrachtung der Dimension von $R \cdot C$ zeigt

  $$[R \cdot C] = \Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V} = s = [t]$$ SI

⇒ $R \cdot C = \tau$ ... ***charakteristische Zeitkonstante***

Kommentar: ◆

„Das Laden dauert lange, wenn die Kapazität C groß ist (⇒ Ladungsmenge Q groß) und/oder ein großer Widerstand R das Laden stark behindert. **!**

27.5. Energie von Ladungsverteilungen

– Auf einem Leiter befinde sich bereits eine Ladung q, so dass er dadurch das folgende Potential (d.h. eine Spannungsdifferenz gegenüber der unendlich entfernten Umgebung) besitzt

$$U = \frac{q}{C} \tag{7'}$$

Wenn wir eine weitere Teilladung dq gegen diese Spannung U heranführen wollen, müssen wir Arbeit verrichten, die sich aus den Gl. (25-15') und (7') ergibt:

$$dW = U \cdot dq = \frac{q}{C} \cdot dq \tag{16}$$

Die Gesamtarbeit folgt durch Integration von Gl. (16)

$$W = \int_0^Q \frac{q \cdot dq}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \tag{17}$$

Die Arbeit ist als potentielle Energie im geladenen Leiter gespeichert.

Man kann Gl. (17) auch mittels Q = C · U umformen und erhält

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \tag{17'}$$

– **Diskussion:** Wo steckt die elektrostatische Energie? ◆
  - Man kann sagen: In den vergewaltigten Ladungen, die (wenn ungleichnamig) zwangsweise getrennt sind und eigentlich zueinander wollen oder (wenn gleichnamig) eigentlich voneinander flüchten wollen, aber z.B. auf dem selben Leiter sitzen müssen.
  - Man kann aber auch sagen: Die Energie ist im Feld vergegenständlicht.

Natürlich sind beide Deutungen zwei Seiten derselben Medaille: Mit der „Vergewaltigung" der Ladungen entsteht das Feld und umgekehrt.

– Wir sehen uns die Feldenergie am Beispiel des Plattenkondensators an.

Die potentielle Energie ist

$$E_{pot} = W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \qquad C = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d} \quad \text{(lt. Gl. (9))} \tag{17'}$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2} \cdot \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d} \cdot U^2 \qquad \text{homogenes Feld: } E = \frac{U}{d} \quad \Rightarrow \quad U = E \cdot d$$

$$\Rightarrow \qquad W = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot d \qquad V = A \cdot d$$

$$\Rightarrow \qquad W = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E^2 \cdot V$$

V ... Volumen des felderfüllten Raumes

$$\Rightarrow \qquad w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E^2 \tag{18}$$

w ... ***Energiedichte***

Kommentar ◆

Gl. (18) zur Berechnung der Energiedichte des elektrischen Feldes gilt allgemein, auch wenn sie hier nur für den Plattenkondensator hergeleitet wurde.

– Als weiteres Beispiel betrachten wir eine leitfähige Kugel mit einer Ladung Q und dem Radius R.

Die potentielle Energie der sich abstoßenden Ladungen beträgt

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{17}$$

$$\Rightarrow \qquad W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{19}$$

Wenn man das Feld der geladenen Kugel

$$E = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

in Gl. (18) einsetzt und über den gesamten Außenraum (von R bis ∞) integriert, erhält man als Feldenergie das schon aus Gl. (19) bekannte Ergebnis!

$$W_{Feld} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$