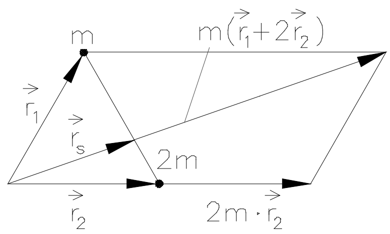
7. Systeme von Massenpunkten; Stöße

7.1. Der Schwerpunkt

– Wir definieren den ***Schwerpunkt*** $\vec{r}_s$ eines Systems:

$$\left.\begin{array}{ll} & \vec{r}_s = \dfrac{\sum\limits_i m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i} = \dfrac{1}{M}\sum\limits_i m_i \vec{r}_i \\ \text{mit:} & M = \sum\limits_i m_i \ \text{ ... Gesamtmasse} \end{array}\right\} \tag{1}$$

Veranschaulichung:



$$\vec{r}_s = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2)$$

– aus (1) folgt:

$$\Rightarrow \qquad M\cdot\vec{r}_s = \sum_i m_i \vec{r} \qquad \Big| \ \frac{d}{dt}$$

$$M\cdot\dot{\vec{r}}_s = \vec{p}_s = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{p}_i \tag{2}$$

Der Gesamtimpuls des Systems ist das Produkt aus Gesamtmasse und Schwerpunktgeschwindigkeit. **!**

– nochmalige Differentiation von (2) ergibt:

$$\Rightarrow \qquad M\cdot\ddot{\vec{r}}_s = \dot{\vec{p}}_s = \vec{F}_s = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i \tag{3}$$

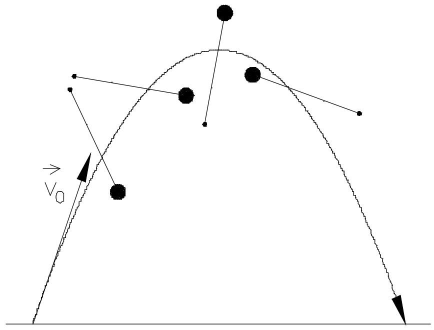
Der Schwerpunkt bewegt sich so, als wenn dort die Summe aller Einzelkräfte an der Gesamtmasse angreifen würde. **!**

Also: Keine äußere Kraft, d.h. $\vec{F}_s = \sum_i \vec{F}_i = 0 \ \Rightarrow$ Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig, oder (Sonderfall) ruht. **!**

Mit anderen Worten: Gesamtimpuls im abgeschlossenen System = const.

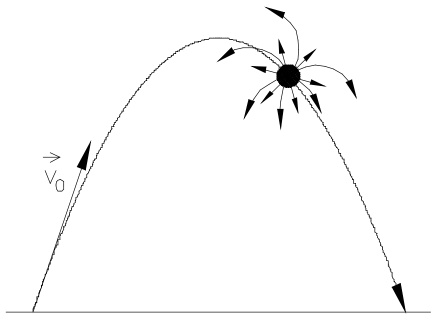
oder: ∃ äußere Kräfte $\vec{F}_i$, dann ergänzen sich diese in ihrer Wirkung so, als ob $\vec{F}_s = \sum_i \vec{F}_i$ am Schwerpunkt angreifen würde.

Beispiel:
Geworfene Hantel:



Letzteres gilt auch dann, wenn innere Kräfte auftreten:

Beispiel:
Explodierende Granate:

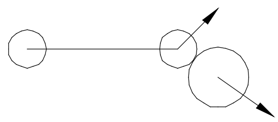


Die inneren Kräfte zwischen den Bruchstücken ergänzen sich jeweils zu Null (Actio = Reactio!), der Schwerpunkt folgt seiner eigenen Trägheit sowie der Erdbeschleunigung und bewegt sich weiter auf der Wurfparabel.

7.2. Stöße: Grundlagen

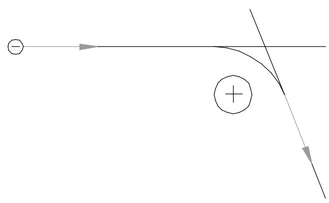
– Stöße = gegenseitige Ablenkung von sich bewegenden Teilchen

– hier: Experimente meist mit harten Kugeln



– Bedeutung der Stöße jedoch besonders wichtig für die Atomphysik, wo die Ablenkung entsprechend dem Kraftfeld bzw. dem Wechselwirkungs-Potential allmählich erfolgt.

Beispiel:
Coulombablenkung eines e^- an einem Atomkern



dann: Betrachtung der asymptotischen Größen $\vec{p}$, E_{kin} weit vor bzw. weit nach der Wechselwirkung

– Im abgeschlossenen System[1] gilt beim Stoß von 2 Partnern:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \qquad \text{Impulssatz} \qquad (4)$$

$$\underset{\text{(vor)}}{\frac{m_1}{2}\vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2^2} = \underset{\text{(nach)}}{\frac{m_1}{2}\vec{v}_1'^2 + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2'^2} + Q \qquad \text{Energiesatz} \qquad (5)$$

Q ist die gegebenenfalls anderweitig verbrauchte E_{kin} (z.B. Verformungsenergie)

$Q = 0$ ⇒ ***elastischer Stoß***, E_{kin} bleibt erhalten,
$Q > 0$ ⇒ ***inelastischer Stoß***, $E_{kin,\,ges}$ wird durch Stoß reduziert.

7.3. Elastische Stöße im Laborsystem

– ***Laborsystem*** = das Bezugssystem, in dem wir uns befinden (also eigentlich das naheliegende) **!**

– Wir betrachten zunächst ***zentrale Stöße*** (⇒ 1D-Problem)

– Zur Beschreibung dient die Impulserhaltung (Gl. (4))
und die Energieerhaltung (Gl. (5) mit Q = 0)

– Wir betrachten den Sonderfall, dass der gestoßene Körper vor dem Stoß ruht:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad (4')$$

$$\frac{m_1}{2} v_1^2 = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2 \qquad (5')$$

Umordnung von (4′) und (5′):

$$\Rightarrow \quad m_2 v_2' = m_1 (v_1 - v_1') \qquad (4'')$$

$$\Rightarrow \quad m_2 v_2'^2 = m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') \qquad (5'')$$

(5'')/(4''):

$$\Rightarrow \quad v_1 + v_1' = v_2' \qquad (6)$$

bzw.

$$v_1' = v_2' - v_1 \qquad (6')$$

[1] d.h., wenn man alles einbezieht, was dazu gehört.

(6) in (4′):

$$\Rightarrow \quad m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 (v_1 + v_1')$$

$$\Rightarrow \quad v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \tag{7}$$

(6′) in (4′):

$$\Rightarrow \quad m_1 v_1 = m_1 (v_2' - v_1) + m_2 v_2'$$

$$\Rightarrow \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \tag{8}$$

Sonderfälle:

(1) $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow v_1' = 0; \qquad v_2' = v_1$$

(2) $m_1 = 2m_2$, also stoßender Körper doppelt so schwer

$$\Rightarrow v_1' = \frac{1}{3} v_1; \quad v_2' = \frac{4}{3} v_1$$

stoßender Körper läuft gestoßenem (langsamer) hinterher

(3) $m_1 = m_2/2$, also stoßender Körper halb so schwer

$$\Rightarrow v_1' = -\frac{1}{3} v_1; \; v_2' = \frac{2}{3} v_1$$

stoßender Körper läuft rückwärts!

(3′) $m_1 << m_2$, also „Stoß gegen die Wand“

$$\Rightarrow v_1' = -v_1; \quad v_2' \approx 0$$

Trotzdem bleibt der Gesamtimpuls unverändert = $m_1 v_1$, d.h., m_2 bewegt sich schon in v_1-Richtung, aber eben sehr langsam. Dennoch ergibt sich wegen des großen m_2 der richtige Impuls.

– Energieübertrag auf m_2: Ist für $m_1 = m_2$ maximal, d.h. vollständig, für alle anderen Fälle geringer. Genauer mit (8):

(Terminologie: $E'_{kin,2}$ ... kinetische Energie von m_2 nach dem Stoß)

$$E'_{kin,2} = \frac{m_2}{2} v_2'^2 = \frac{m_2}{2} \frac{(2m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot v_1^2$$

$$= \underbrace{\frac{m_1}{2} v_1^2} \cdot \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$E'_{kin,2} = E_{kin,1} \cdot \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} \tag{9}$$

$\Rightarrow$
- Verhältnis der Massen entscheidend ($m_1 = n \cdot m_2$ und $\frac{1}{n} \cdot m_2$ liefern gleiches Ergebnis)
- Übertragung beliebig klein: $\frac{1}{2}$ bzw. $2 \Rightarrow 89\ \%$
  $\frac{1}{100}$ bzw. $100 \Rightarrow 4\ \%$

– Wichtig für Teilchenphysik (Abbremsung), z.B. Neutronenmoderierung

7.4. Stöße im Schwerpunktsystem

– ***Schwerpunktsystem*** = System, in dem der Schwerpunkt ruht. Günstig, wenn die gestoßene Masse vor dem Stoß nicht ruht..

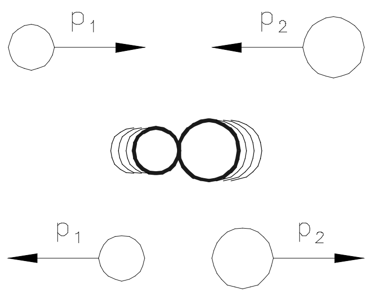
– Gl. (2) war:

$$M \cdot \vec{v}_s = \vec{p}_s = \sum_i \vec{p}_i \tag{2}$$

Wenn der Schwerpunkt also ruht ($\vec{v}_s = 0$) muss $\sum_i \vec{p}_i = 0$ sein.

Beispiel:
elastischer Stoß zweier Teilchen

vorher: $p_1 + p_2 = 0$



nachher: $p_1' + p_2' = 0$
$p_1' = -p_1$
$p_2' = -p_2$

– Also: Problem im Schwerpunktsystem einfach zu behandeln!

– Man muss natürlich alle Bewegungen wieder ins Laborsystem zurücktransformieren. Da sich aber in abgeschlossenen Systemen der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig bewegt, ist das einfach.

7.5. Inelastische Stöße

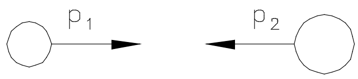
– Ein Teil der E_{kin} wird aufgezehrt (Wärme, Verformung, ...) $\rightarrow$ keine E_{kin}-Erhaltung mehr

– Dennoch wird die Abbremsung begrenzt, da der Impuls erhalten bleiben muss.

⇒ Was ist das Maximum der Umwandlung von E_{kin} in Q?

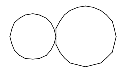
Schwerpunktsystem: Im Schwerpunktsystem ist die Summe aller Impulse = 0 (s.o.). Dies kann auch erfüllt werden, indem alle Teilchen im Schwerpunktsystem zur Ruhe kommen.

vorher:



$$p_1 + p_2 = 0$$

nachher:



$$p_1' + p_2' = 0$$

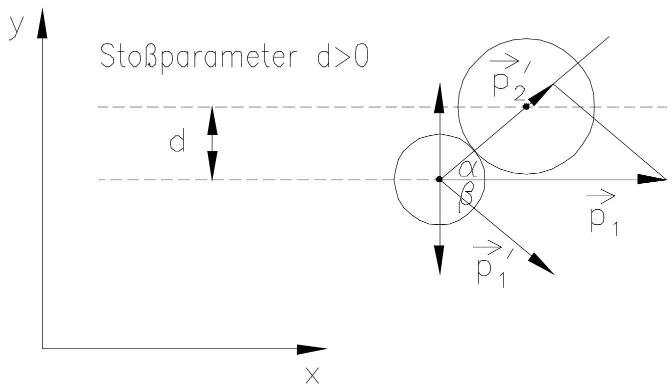
Der Gesamtimpuls ist nach wie vor der des Schwerpunktes, also $M \cdot \vec{v}_s = \vec{p}_s$ lt. Gl. (2)!

⇒ Die maximal mögliche Abbremsung, ohne den Impulssatz zu verletzen, ist das völlige Zur-Ruhe-Kommen im Schwerpunktsystem. **!**

Mit anderen Worten:
Alle beteiligten Teilchen bleiben aneinander kleben und bewegen sich mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit, der des Schwerpunktes.

7.6. Nichtzentrale Stöße

– ... bringen physikalisch nichts grundsätzlich Neues, man muss das Problem lediglich mehrdimensional (es ist 2D) lösen. Beispiel Stoß in x-Richtung:



– α ist geometrisch determiniert:

$$\sin\alpha = \frac{d}{r_1 + r_2}$$ (r_1, r_2 ... Kugelradien)

– β stellt sich so ein, dass $p_{ges,y}$ weiterhin gleich Null ist, d.h.

$$p_{2,y}' - p_{1,y}' = 0$$

– Ansonsten muß der Gesamtimpulses erhalten bleiben ($\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$) sowie gegebenenfalls (elastisch - inelastisch) die kinetische Energie.