

V12 – Beschleunigte Bewegungen

Aufgabenstellung:

1. Ermitteln Sie die Fallbeschleunigung g aus Rollexperimenten auf der Rollbahn.
2. Zeigen Sie, dass für die Bewegung eines Wagens auf der geneigten Ebene der Energieerhaltungssatz gilt.

Stichworte zur Vorbereitung:

Geradlinig gleichförmige Bewegung, gleichmäßig beschleunigte Bewegung, NEWTONsche Axiome, Hubarbeit, Beschleunigungsarbeit, potentielle Energie, kinetische Energie, Energieerhaltungssatz.

Literatur:

- H. J. Paus, *Physik in Experimenten und Beispielen*, 3. Auflage, Kap. 2, 3, 5, Hanser-Verlag München **2007**
- W. Demtröder, *Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme*, 2. Auflage, Kap. 2.1 – 2.7, Springer Verlag Berlin **1998**
- H.J. Eichler, H.-D. Kronfeldt, J. Sahm, *Das Neue Physikalische Grundpraktikum*, 2. Auflage, Kap. 3, Springer Verlag Berlin **2006**

1. Theoretische Grundlagen

Kinematik linearer Bewegungen

Die kinematische Beschreibung der Bewegung einer Punktmasse zielt auf die Kenntnis des Zeitverlaufes der Größen Ort $x(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ ab. Diese Größen haben im allgemeinen Fall Vektorcharakter. Für die vorliegenden Versuche kann das Koordinatensystem jedoch so gewählt werden, dass alle Bewegungen entlang einer Koordinatenachse – diese ist dann entlang der (ggf. geneigten) Ebene orientiert – erfolgen, so dass im Folgenden skalare Angaben ausreichend sind.

Die Geschwindigkeit (genauer, die Momentangeschwindigkeit) beschreibt die zeitliche Veränderung der Position der Punktmasse

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \quad (1)$$

und die Beschleunigung ihrerseits die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t). \quad (2)$$

Für den Fall einer konstanten Beschleunigung $a(t) = a = \text{const.}$ – man spricht dann von einer *gleichmäßig beschleunigten Bewegung* – können die Gleichungen (2) und (1) leicht integriert werden, um das *Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz* und das *Orts-Zeit-Gesetz* zu erhalten. Bei der Integration ist zu beachten, dass die Integrationskonstanten anhand der Anfangsbedingungen – also Ort x_0 und Geschwindigkeit v_0 zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ festgelegt werden müssen. Man erhält schließlich

$$v(t) = a \cdot t + v_0 \quad (3)$$

und

$$x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0. \quad (4)$$

Im Sonderfall $a = 0$ ergibt sich eine geradlinig gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit und linearem Anwachsen des zurückgelegten Weges mit der Zeit.

NEWTONsche Axiome

Die mathematische Beschreibung der Auswirkung von Kräften auf die Bewegung eines Körpers bzw. einer Punktmasse kann auf wenige Grundgleichungen zurückgeführt werden. Diese beruhen auf Axiomen, die durch Experimente nahegelegt werden, und wurden erstmals durch SIR ISAAC NEWTON formuliert.

Das erste NEWTONsche Axiom, auch *Trägheitsprinzip* genannt, lautet:

Wirkt auf einen Körper keine Kraft, so verbleibt dieser in Ruhe bzw. geradlinig gleichförmiger Bewegung.

Es ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass der Impuls

$$p = m \cdot v \quad (5)$$

einer sich frei bewegenden Punktmasse mit der Masse m zeitlich konstant ist. Werden Abweichungen von einer geradlinig gleichförmigen Bewegung beobachtet, so kann daraus auf das Wirken von Kräften geschlossen werden.

Das zweite NEWTONsche Axiom, oftmals auch als die *Grundgleichung der Mechanik* bzw. *Aktionsprinzip* bezeichnet, verknüpft die wirkende Kraft mit der zu beobachtenden Beschleunigung:

Wirkt auf einen Körper die Gesamtkraft F , so resultiert eine zu ihr proportionale Beschleunigung a .

$$F = m \cdot a. \quad (6)$$

Schließlich liefert das dritte NEWTONsche Axiom eine Aussage über das Wirken von Kräften zwischen zwei Körpern. Das so genannte *Reaktionsprinzip* lautet:

Übt ein Körper auf einen zweiten die Kraft F_{12} aus, so übt der zweite eine gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete Kraft F_{21} auf den ersten aus. *Actio = Reactio*:

$$F_{21} = -F_{12}. \quad (7)$$

Energie und Energieerhaltung

Bewegt sich ein Körper unter dem Einfluss einer Kraft F um das infinitesimale Wegstück dx , so verrichtet die Kraft an ihm die *Arbeit*

$$dW = F \cdot dx. \quad (8)$$

Dieser Ausdruck kann – eine konstante Kraft, wie beispielsweise die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ mit der Fallbeschleunigung g , und eine lineare Bewegung in Kraftrichtung vorausgesetzt – über den gesamten Weg integriert werden, so dass für die gesamte Arbeit

$$W = F \cdot x \quad (9)$$

gilt.

Beim Anheben eines Körpers um die Höhe h gegen die Gravitationskraft wird die Hubarbeit verrichtet und dem Körper als Lageenergie, auch bezeichnet als potentielle Energie, zugeführt:

$$E_{\text{pot}} = mgh \quad (10)$$

Beschleunigt eine Kraft einen Körper aus dem Stand, so besitzt der Körper anschließend die durch die Beschleunigungsarbeit eingebrachte kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = m \cdot a \cdot x = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} = \frac{1}{2} m v^2. \quad (11)$$

Zur Umformung in Gleichung (11) wurde der zurückgelegte Weg anhand des Weg-Zeit-Gesetzes (4) und des Geschwindigkeits-Zeit-Gesetzes (3) mit $v_0 = 0$ und $x_0 = 0$ eliminiert.

Die beiden genannten Energieformen können zur mechanischen Energie zusammengefasst werden.

Für diese gilt dann der *Energieerhaltungssatz der Mechanik*:

Wirken während einer Bewegung keine Reibungskräfte, so ist die gesamte mechanische Energie eine Erhaltungsgröße:

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const.} \quad (12)$$

2. Versuchsdurchführung

Für die Experimente steht eine Rollbahn zur Verfügung, auf der sich ein Wagen (Masse M) reibungsarm bewegen kann. Die Rotation der Räder kann bei der Beschreibung vernachlässigt werden, denn ihre Masse ist gegen die Gesamtmasse des Wagens gering. Die Rollbahn ist einseitig höhenverstellbar gelagert. Zur Bestimmung der Endgeschwindigkeit des Wagens wird eine Gabellichtschranke genutzt, die mittels PC-Messsystem CASSY angesteuert wird. Rollwege können mit einem Bandmaß vermessen werden.

Bestimmung der Fallbeschleunigung

Die Rollbahn ist unter Verwendung einer Dosenlibelle möglichst gut horizontal auszurichten. Mit einem dünnen Faden, der über eine Umlenkrolle geführt wird, wird ein Massestück (Masse m) am Wagen befestigt. Die auf das frei nach unten hängende Gewichtsstück wirkende Gewichtskraft $F_G = mg$ beschleunigt so den Wagen und das Gewichtsstück selbst. Mit Gleichung (6) gilt daher $F = (m + M)a$. Gleichsetzen liefert

$$mg = (M + m)a \Leftrightarrow a = \frac{m}{M+m} g. \quad (13)$$

Die Bewegung des Wagens ist aus der Ruhe zu starten und der Nullpunkt des Weges wird auf die Startposition festgelegt. Nutzt man das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz (3) um im Orts-Zeit-Gesetz (4) die Zeit zu eliminieren und setzt schließlich Gleichung (13) für die Beschleunigung ein, so kann bei Kenntnis der Abrollstrecke und der Endgeschwindigkeit die Fallbeschleunigung berechnet werden:

$$g = \frac{1}{2} \frac{M+m}{m} \frac{v^2}{x}. \quad (14)$$

Messen Sie für drei von Ihnen gewählte Rollwege die Endgeschwindigkeit je fünf Mal.

Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes

Zusatzmasse und Faden sind zu entfernen. Die aus unterschiedlichen Abrollhöhen – realisiert durch verschiedene Neigungen der Rollbahn – resultierenden Endgeschwindigkeiten werden gemessen. Es ist darauf zu achten, dass die Lichtschranke über dem Drehpunkt der Rollbahn positioniert ist. Die zurückgelegte Höhendifferenz h ist mittels Rollbandmaß zu bestimmen.

Bei Bewegungsstart aus der Ruhe hat der Wagen ausschließlich potentielle Energie entsprechend Gleichung (10). Bei Durchfahren der Lichtschranke ist diese – Gültigkeit des Energiesatzes vorausgesetzt – komplett in kinetische Energie nach Gleichung (11) umgewandelt. Es gilt also

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}. \quad (15)$$

Messen Sie zu mindestens fünf Abrollhöhen je dreimal die Endgeschwindigkeit.

3. Hinweise zur Auswertung

Bestimmung der Fallbeschleunigung

Berechnen Sie zunächst jeweils den Mittelwert der Endgeschwindigkeiten zu einem Abrollweg. Berechnen Sie damit jeweils die Fallbeschleunigung und mitteln Sie diese dann über alle Rollwege.

Führen Sie eine Größtfehlerberechnung exemplarisch für einen der Rollwege durch. Nutzen Sie die größte Differenz in den ermittelten Endgeschwindigkeiten als Messunsicherheit Δv . Der für g berechnete relative Fehler ist dann für den Gesamtmittelwert zu übernehmen. Vergleichen Sie Ihr Endergebnis im Rahmen der so bestimmten Messunsicherheit mit einem Tabellenwert.

Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes

Zum Nachweis der Gültigkeit von Gleichung (15), d.h. der Proportionalität $v^2 \sim h$, tragen Sie zweckmäßig das Quadrat der Endgeschwindigkeit über der Abrollhöhe auf. Es ist ein linearer Zusammenhang mit dem Anstieg $2g$ zu erwarten. Zeichnen Sie eine bestmöglich zu Ihren Messwerten passende Ausgleichsgerade (Koordinatenursprung als Fixpunkt verwenden!) ein, lesen Sie deren Anstieg ab und ermitteln Sie daraus die Fallbeschleunigung. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem des vorangegangenen Telexperimentes und einem Tabellenwert.