Polar-, Kugel-, Zylinderkoordinaten/ Mehrfachintegrale

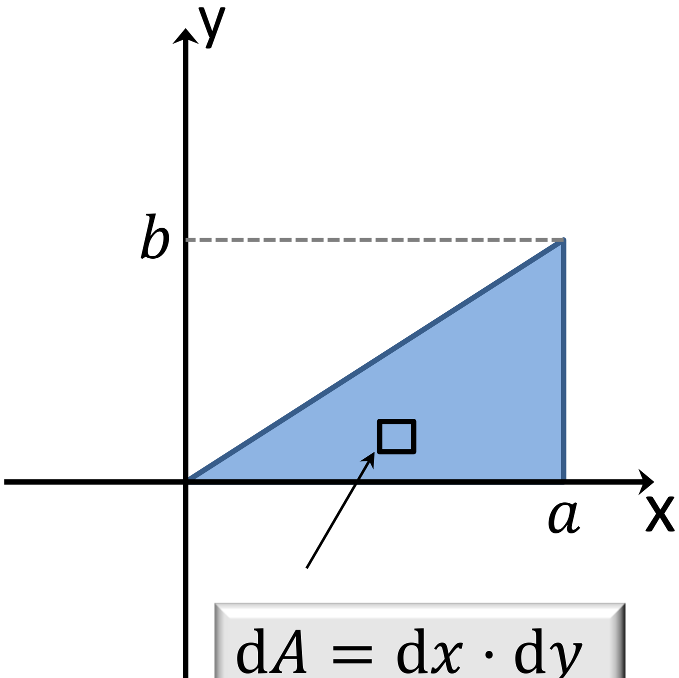
Wozu verschiedene Koordinatensysteme?

Ausnutzen der Geometrie zur Vereinfachung der Rechnung

Flächen-/Volumenberechnung durch Integration

$$A = \int 1\, \mathrm{d}A = \iint 1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$V = \int 1\, \mathrm{d}V = \iiint 1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks:

$$\mathrm{A} = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} 1\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^a y\Big|_0^{\frac{b}{a}x} \mathrm{d}x = \int_0^a \frac{b}{a}x\, \mathrm{d}x$$

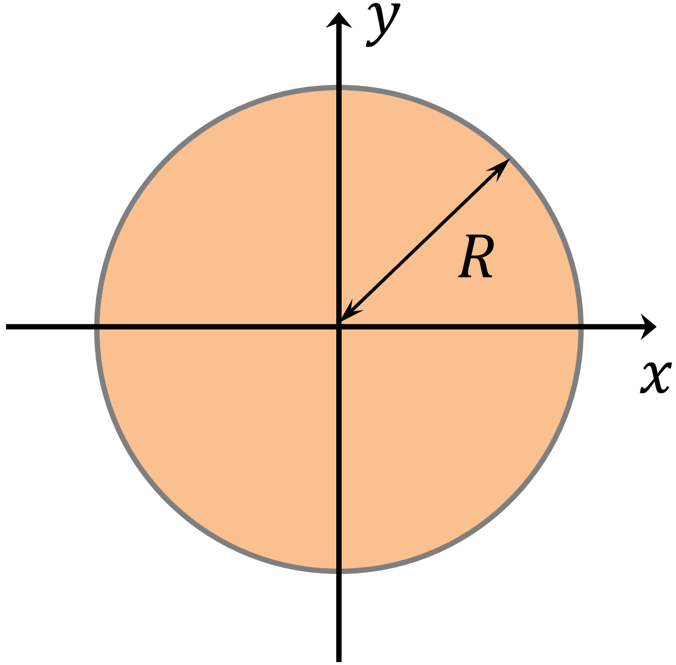
$$= \frac{b}{2a}x^2\Big|_0^a = \frac{1}{2}a \cdot b$$

dA-Flächenelement (wie Pixel einer Rastergrafik)

Aufgabe 1

Berechnen Sie durch Integration die Fläche eines Kreises mit Radius *R*, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt! Nutzen Sie dafür

- a) kartesische Koordinaten



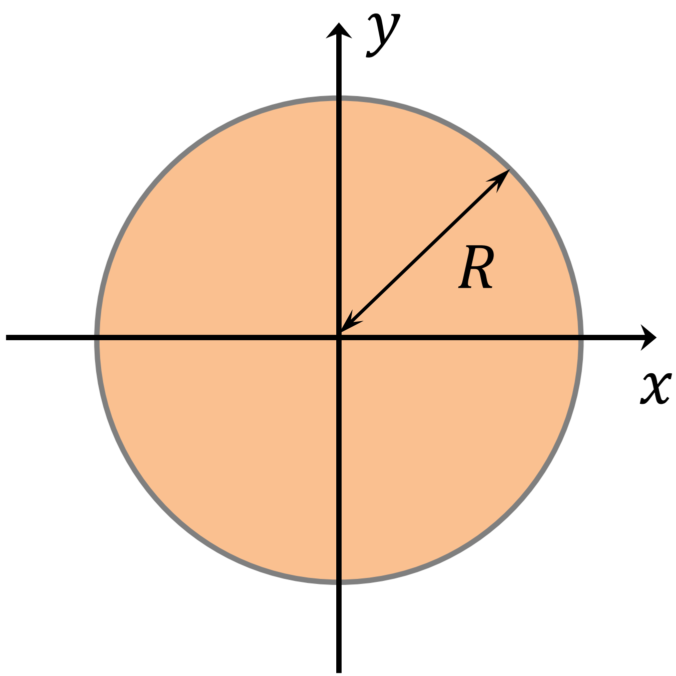
$$A = \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} 1 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Hilfestellung: $\int \sqrt{R^2 - x^2} \;\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R} + c, \quad \mathrm{R} = const.$

Aufgabe 1

Berechnen Sie durch Integration die Fläche eines Kreises mit Radius *R*, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt! Nutzen Sie dafür

- a) kartesische Koordinaten



Lösung:

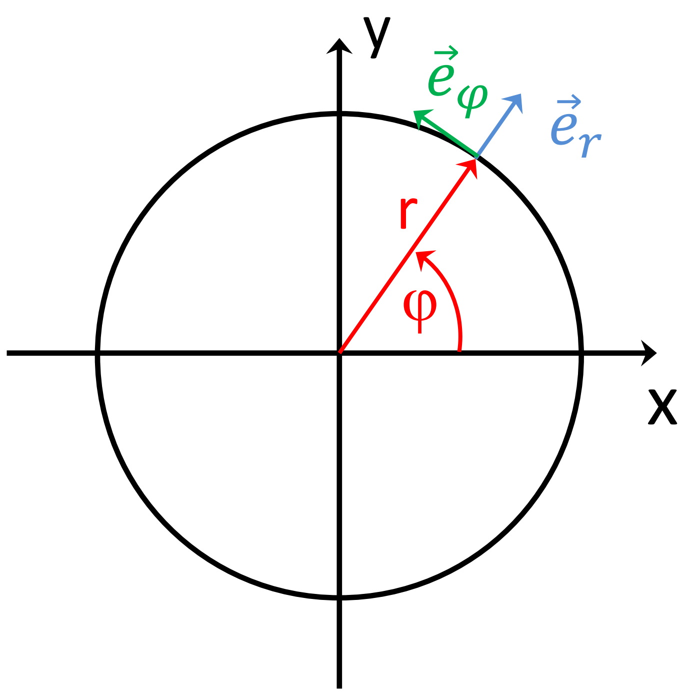
$$A = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

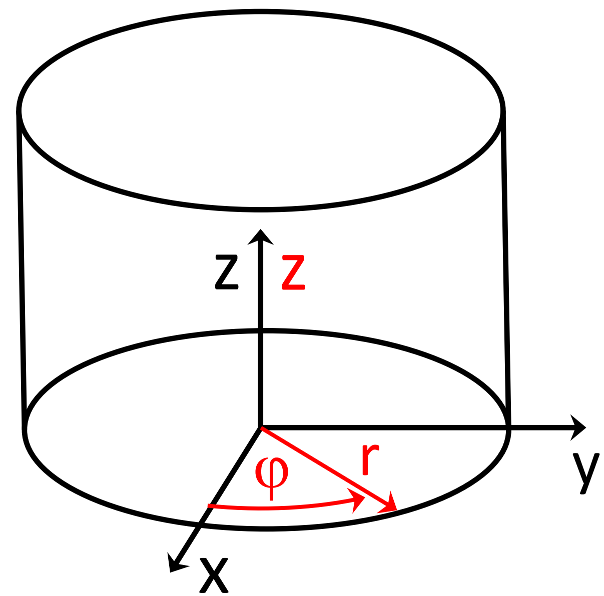
$$= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2} \, dx = \pi R^2$$

Hilfestellung: $\int \sqrt{R^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin\frac{x}{R} + c, \quad \mathrm{R} = const.$

Polar-/Zylinderkoordinaten

Darstellung des Raumes durch die Koordinaten r, φ (und z)



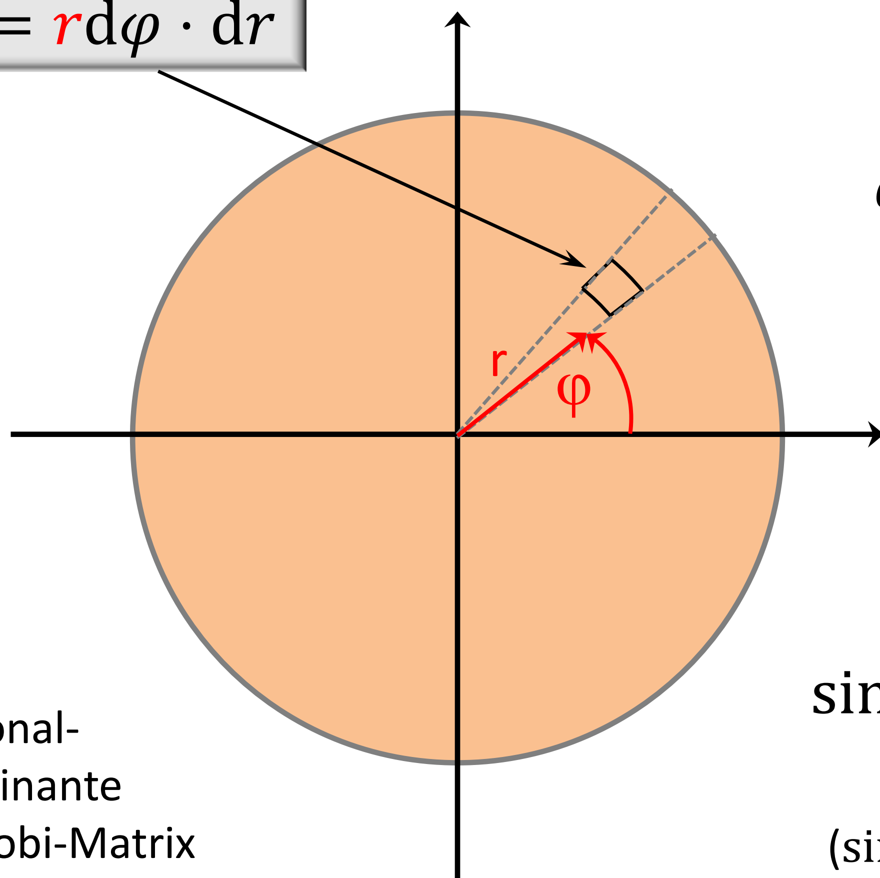


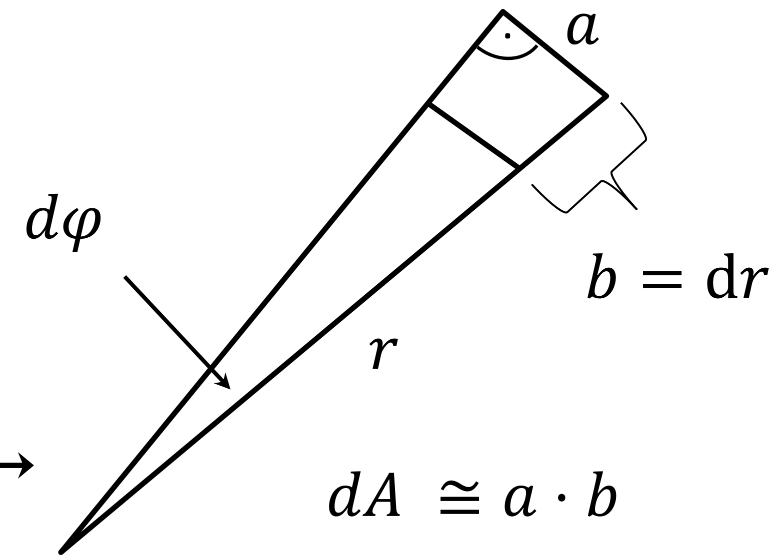
Beziehung zum kartesischen Koordinatensystem:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad (z = z)$$

Flächenelement in Polarkoordinaten

$$\boxed{\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r}$$





$$dA \cong a \cdot b$$

$$\sin \mathrm{d}\varphi = \frac{a}{r} \quad \rightarrow \quad a = r\mathrm{d}\varphi$$

($\sin\varphi = \varphi$, wenn φ sehr klein)

r – Funktional-
determinante
der Jakobi-Matrix

- ➢ Mathe-Vorlesung

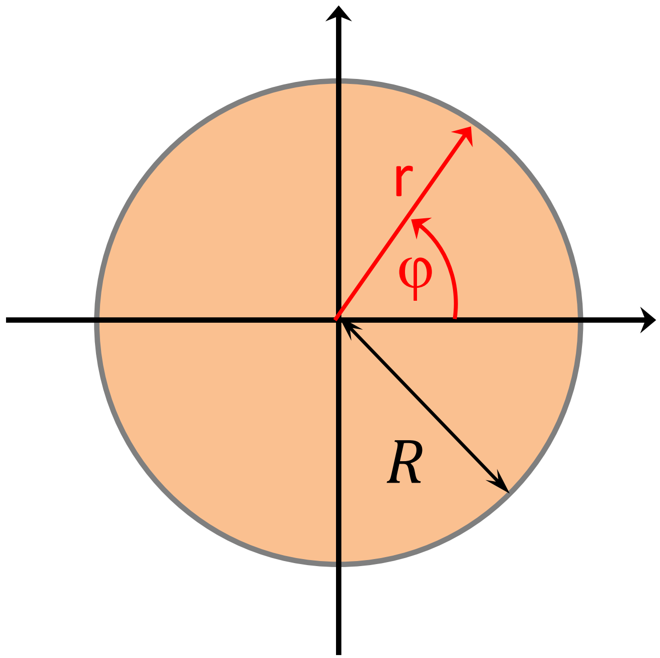
Für das Volumenelement in Zylinderkoordinaten gilt demnach:

$$\boxed{\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}z}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie durch Integration die Fläche eines Kreises mit Radius *R*, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt! Nutzen Sie dafür

- a) Polarkoordinaten



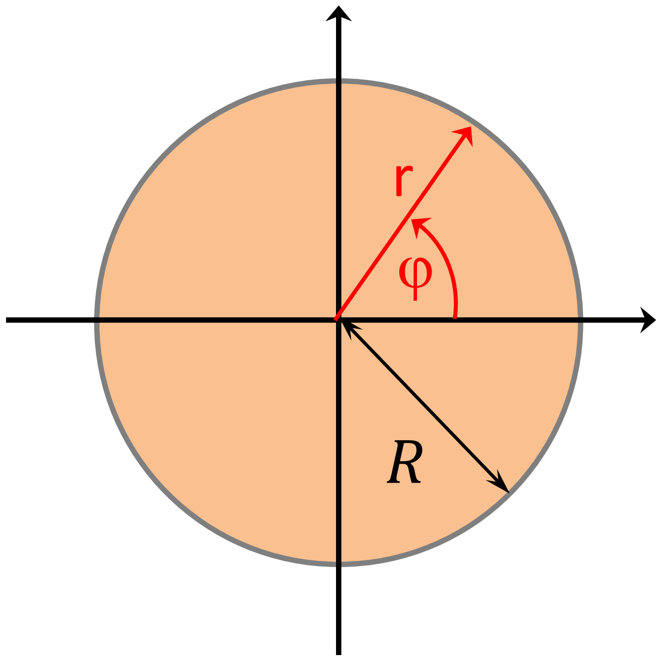
$$A = \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} 1 \cdot r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

Zusatz: Berechnen Sie das Volumen eines Zylinders mit der Grundfläche des Kreises und der Höhe h durch Integration

Aufgabe 2

Berechnen Sie durch Integration die Fläche eines Kreises mit Radius *R*, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt! Nutzen Sie dafür

- a) Polarkoordinaten



Lösung:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} 1 \cdot r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 \, \mathrm{d}\varphi = \pi R^2$$

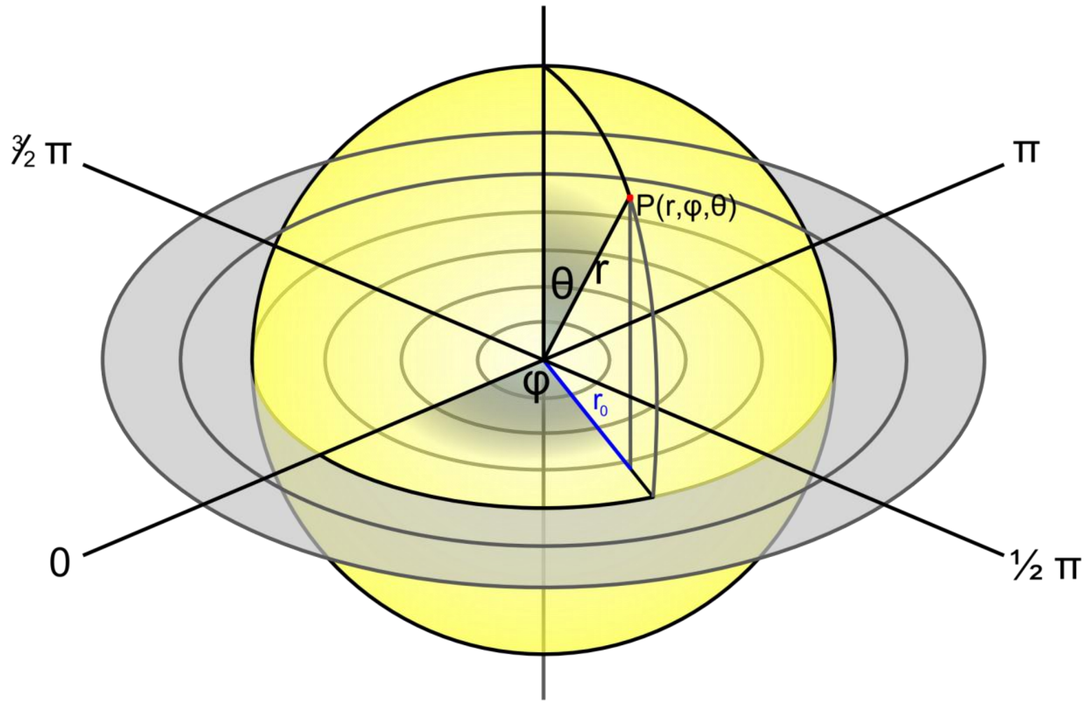
Zusatz:

$$V = \int_0^{h} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} 1 \cdot r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{h} \pi R^2 \, \mathrm{d}z = \pi R^2 h$$

Kugelkoordinaten

Darstellung des Raumes durch die Koordinaten r, φ und θ



Beziehung zu den kartesischen Koordinaten:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta$$

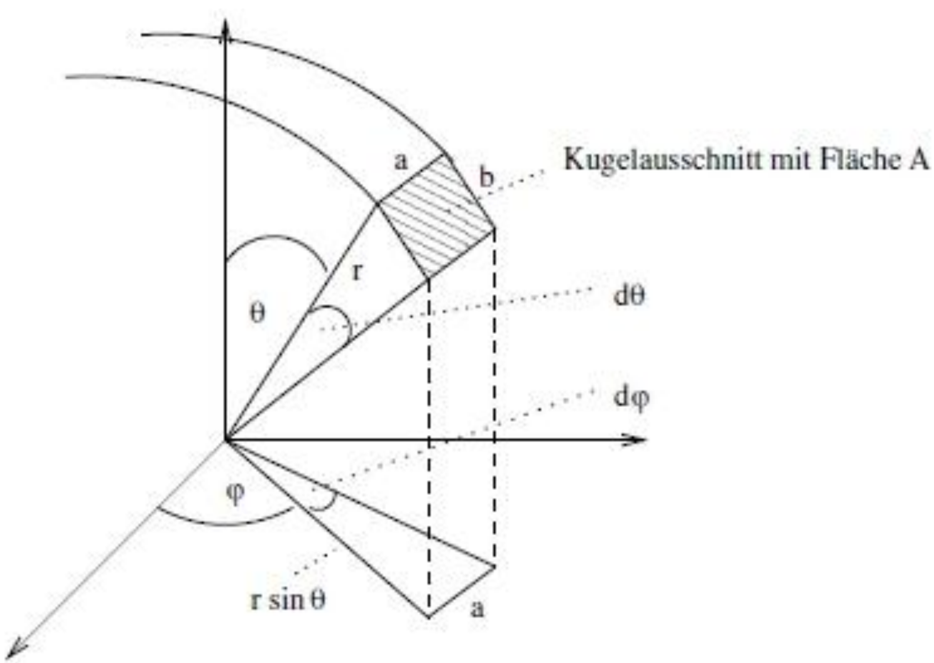
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$

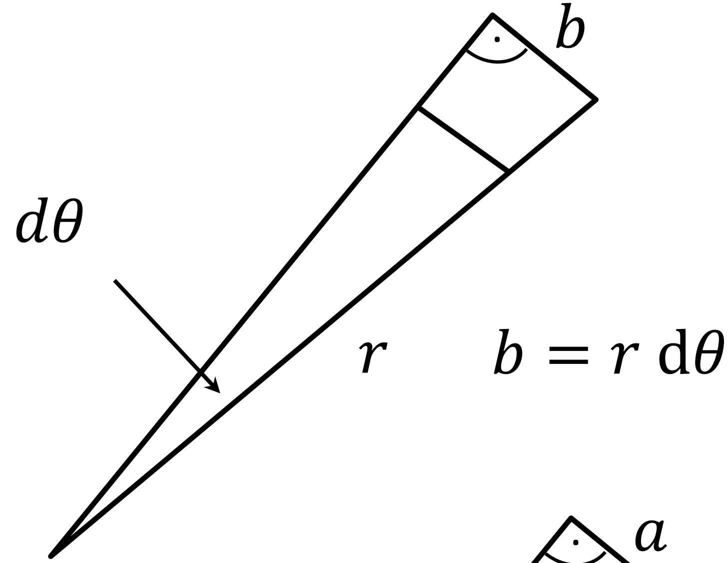
$$z = r\cos\theta$$

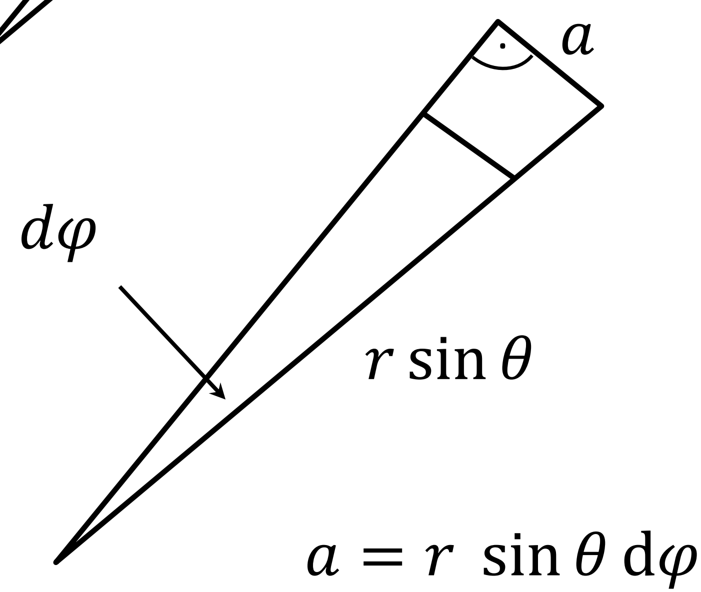
Volumenelement in Kugelkoordinaten

$$A = a \cdot b = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

$$\boxed{dV = A \cdot \mathrm{d}r = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r}$$



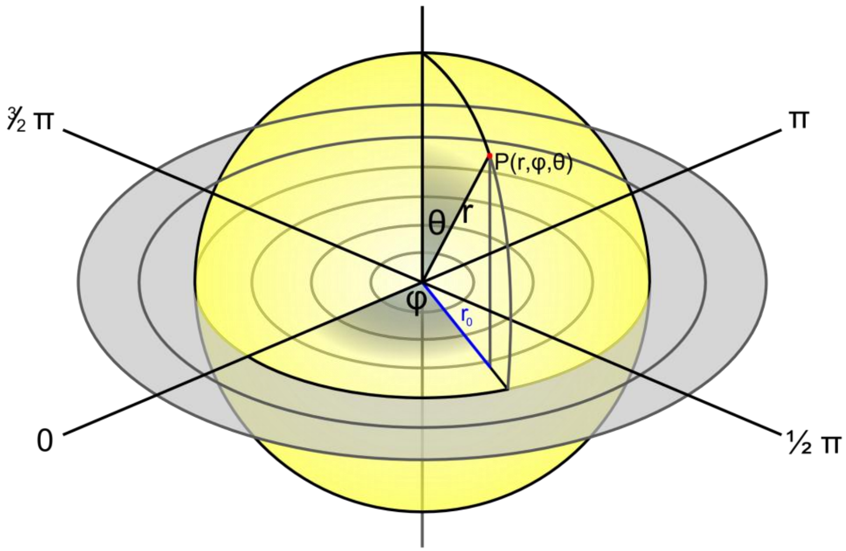




Aufgabe 3

a. Berechnen Sie durch Integration die Masse M einer Kugel mit dem Radius R und einer Dichte, die wie folgt vom Radius abhängt:

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot r$$



Ansatz:

$$m = \int \rho \, \mathrm{d}V$$

Volumenelement:

$$dV = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$$

Lösung zu Aufgabe 3

Ansatz: $$m = \int \rho \, \mathrm{d}V$$

$$J = \rho_0 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r \cdot r^2 \sin\theta \; \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \rho_0 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} \sin\theta \;\; \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi\rho_0 \int_0^{\pi} \frac{R^4}{4} \sin\theta \;\; \mathrm{d}\theta = 2\pi\rho_0 \int_0^{\pi} \frac{R^4}{4} \sin\theta \;\; \mathrm{d}\,\theta = -\frac{\pi\rho R^4}{2} \cos\theta \Big|_0^{\pi}$$

$$= 2\pi\rho_0 \frac{R^4}{2} = \pi\rho_0 R^4$$

Weitere Aufgaben:

Berechnen Sie das Trägheitsmoment:

a. einer Punktmasse mit Masse m im Abstand r von der Drehachse,
b. eines dünnen, homogenen Kreisrings mit Radius r und Masse m, der senkrecht zur Drehachse und dessen Mittelpunkt auf der Drehachse liegt und
c. eines Vollzylinders mit Radius R und homogener Massenverteilung, der um seine Symmetrieachse rotiert mit Hilfe von Zylinderkoordinaten!

Übersicht Koordinatensysteme

Koordinaten-system	Koordi-naten	Umrechnung in kartesische Koordinaten	Determi-nante der Jakobi-Matrix	Volumenlement/ Flächenelement
kartesisch	x, y, z	-	-	$\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$ $\mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ $\mathrm{d}A_3 = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z$ $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$
polar	r, φ	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$	r	$dA = r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$
zylindrisch	r, φ, z	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $z = z$	r	$\mathrm{d}A_{\text{Fläche}} = r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ $\mathrm{d}A_{\text{Mantel}} = r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}z$
sphärisch	r, φ, θ	$x = r\cos\varphi\sin\theta$ $y = r\sin\varphi\sin\theta$ $z = r\cos\theta$	$r^2\sin\theta$	$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$ $\mathrm{d}A_{\mathrm{O}} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$