

Wissenschaftliche Hausarbeit

Zur Ersten Staatsprüfung für das Höhere Lehramt an Gymnasien

Thema: Untersuchung der Dynamik eines nichtlinearen Systems
- am Beispiel der Schwingungen einer Piezoplatte -

Verfasser: Harzer, Anke
geboren am 18.04.1976 in Karl-Marx-Stadt

Gutachter: Prof. Dr. Dieter Gerlich

Einrichtung: Technische Universität Chemnitz

Ausgabedatum: 07.01.1999

Abgabetermin: 23.03.1999



Ich bedanke mich bei Herrn Professor Dr. Dieter Gerlich und seinem Assistenten Dr. Stephan Schlemmer, die zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen. Sie hatten jederzeit ein offenes Ohr für meine Anliegen und unterstützten mich beim Lösen der auftretenden Probleme.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| I. Einleitung | 4 |
| II. Vorbetrachtungen zu den Plattenschwingungen | 6 |
| 1. Anregung der Platte mittels inversem piezoelektrischen Effekt | 6 |
| 1.1. Der piezoelektrische Effekt | 6 |
| 1.2. Theoretische Beschreibung | 10 |
| 2. Mathematische Beschreibung der Plattenschwingung | 12 |
| 2.1. Näherung der Platte als EULER-BERNOULLI-Balken | 12 |
| 2.2. Die Eigenschwingung der Platte | 20 |
| III. Das Experiment | 27 |
| 1. Permanent angeregte Plattenschwingung | 27 |
| 1.1. Erstes Verfahren | 27 |
| 1.2. Zweites Verfahren | 31 |
| 2. Freie Plattenschwingung (Drittes Verfahren) | 39 |
| 3. Diskussion der Ergebnisse | 42 |
| IV. Chaotische Plattenschwingungen | 43 |
| 1. Periodenverdopplung in nichtlinearen Systemen | 44 |
| 1.1. Die logistische Abbildung | 44 |
| 1.2. HÉNON-Abbildung als Modell des getriebenen Rotators | 49 |
| 2. Mathematische Beschreibung nichtlinearer Systeme | 51 |
| 2.1. System mit anharmonischem Potential | 52 |
| 2.2. System mit anharmonischem Potential und nichtlinearer Reibungsterm | 54 |
| V. Experimentelle Untersuchung zum chaotischen Verhalten | 55 |
| 1. Beschreibung des Versuchsaufbaus | 55 |
| 2. Messung nichtlinearer Plattenschwingungen | 56 |
| 3. Diskussion der Ergebnisse | 59 |
| VI. Zusammenfassung | 60 |
| VII. Literaturverzeichnis | 62 |
| Eidesstattliche Erklärung | 63 |

I. Einleitung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht das dynamische Verhalten der schwingenden Platte.

Zuerst gilt es, nach der Motivation für diese Arbeit zu fragen. Denn Schwingungen sind an und für sich kein neues Gebiet: eindimensional sind sie Gegenstand der Grundkursvorlesungen in Physik, zwei- und dreidimensional werden sie in der entsprechenden Fachliteratur abgehandelt. In dieser Hinsicht gelten Plattenschwingungen als bereits hinreichend verstanden.

Zum Thema dieser Arbeit kam es aufgrund des Zusammentreffens zweier Interessen: zum einen sind kleine schwingende Plättchen aus Piezoxid die wesentlichen Bestandteile in Ventilen, die zur Erzeugung kurzer Gaspulse eingesetzt werden. Diese Ventile sind vor etwa zwanzig Jahren entwickelt worden und werden sehr erfolgreich in der heutigen Praxis eingesetzt. Ihr dynamisches Verhalten ist jedoch noch nicht ausreichend verstanden. Zu diesem Verständnis sollen die hier angestellten Überlegungen und Untersuchungen einen ersten Beitrag leisten.

Der zweite Faktor, der maßgeblich die Intention dieser Arbeit beeinflusste, war mein Interesse am dynamischen Verhalten nichtlinearer Systeme. Von Beginn an stand die Vermutung, daß die Piezoplättchen in den Ventilen nichtlineares Verhalten zeigen. Mein Anliegen bestand im Nachweis und der Untersuchung dieser Nichtlinearitäten. Dies ist ein wichtiger Aspekt, um ein umfassendes Verständnis des Schwingungsverhaltens der Piezoplättchen in den Ventilen zu erlangen.

Der Inhalt dieser Untersuchungen ist stark zukunftsorientiert, da die Grenzen des Einsatzgebietes dieser Piezoplättchen bisher noch nicht abgesteckt sind. Beispiele für die heutige Nutzung sind die Schallaufnahme und Abgabe in Piezomikrofonen und Lautsprechern. Eine Vielzahl weiterer Einsatzgebiete sind denkbar.

Aus diesen Vorüberlegungen leiten sich drei Ziele für diese Arbeit ab:

1. die Resonanzfrequenzen der harmonischen Plattenschwingung theoretisch vorauszusagen und experimentell zu bestätigen
2. den Schwingungsmodus der Platte in den oben beschriebenen Ventilen zu bestimmen
3. chaotische Plattenschwingungen zu erzeugen und zu untersuchen

Damit ist die Marschrichtung vorgegeben.

Zu Beginn werde ich auf die Grundlagen der Plattenschwingungen eingehen. Als Erstes geht

es um die Erzeugung der Schwingungen. Die Platten bestehen aus zwei Schichten piezoaktiven Materials. Werden diese geeignet angesteuert, so zieht sich die eine Schicht der Länge nach zusammen während die andere sich ausdehnt. In der Folge krümmt sich die Platte nach dem Bimetallprinzip. Beim Anlegen einer Wechselspannung schwingt die Platte mit der entsprechenden Frequenz.

Im zweiten Teil der Vorbetrachtungen gehe ich auf die mathematische Theorie ein. Die Plattenschwingung wird mittels einer linearen Differentialgleichung modelliert. Daraus können die Eigenfrequenzen bestimmt werden. Unter Einbeziehung der Stoffkonstanten lassen sich die Resonanzfrequenzen für die Piezoplättchen vorhersagen.

Anschließend werden die experimentellen Untersuchungen vorgestellt. Das Schwingungsverhalten wurde aus drei verschiedenen Herangehensweisen analysiert. Mit diesen drei Verfahren wurden jeweils die Resonanzfrequenzen bestimmt. Sie stimmen weitgehend mit den theoretisch prognostizierten Eigenfrequenzen überein.

Daran schließt sich der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit an. Wurde bis zu diesem Zeitpunkt das Schwingungsverhalten von Plattenschwingungen mit kleinen Amplituden betrachtet, so wechselt die Blickrichtung nun auf Schwingungen mit großen Amplituden. Die mathematische Modellierung muß dahingehend erweitert werden, daß nun neben den bisher ausschließlich linearen Abhängigkeiten ab jetzt auch nichtlineare zu berücksichtigen sind. Wiederum werden verschiedene mathematische Modelle vorgestellt. Dabei gestaltet sich die nichtlineare Modellierung wesentlich komplizierter als die der linearen Plattenschwingung. In der Hauptsache lassen sich drei wesentliche Verhaltensmuster aufzeigen, die charakteristisch für nichtlineares dynamisches Verhalten sind.

Daran schließen sich die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen an. Durch den Nachweis der drei signifikanten Verhaltenstypen wird die Nichtlinearität des Systems aufgedeckt.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die untersuchten Plattenschwingungen ein sehr vielschichtiges Schwingungsverhalten zeigen. Das Spektrum der Schwingungsvarianten reicht von harmonischen Schwingungen bei kleinen Amplituden bis hin zu chaotischen Schwingungen bei starker Anregung.

II. Vorbetrachtungen zu den Plattenschwingungen

In diesem Kapitel werden Vorbetrachtungen zu zwei grundlegenden Aspekten der untersuchten Plattenschwingungen angestellt. Im ersten Teil geht es um die Anregung der Schwingungen. Hierfür konnte aufgrund der stofflichen Eigenschaften des Materials der inverse Piezoeffekt ausgenutzt werden. Der Piezoeffekt im allgemeinen und der inverse Piezoeffekt im speziellen werden nachfolgend beschrieben.

Anschließend wird im zweiten Teil des Kapitels die Platte als schwingungsfähiges System betrachtet. Aus diesen Betrachtungen lassen sich die Eigenfrequenzen der Platte berechnen. Unter Einbeziehung der Stoffkonstanten des verwendeten Piezomaterials können dann die Resonanzfrequenzen prognostiziert werden.

1. Anregung der Platte mittels inversem piezoelektrischen Effekt

Die Schwingung wird an Platten, sogenannten Bimorphelementen, aus Piezoxid untersucht. Dies hat den Vorteil, daß der inverse Piezoeffekt zur Anregung der Plattenschwingung ausgenutzt werden kann. Ein weiterer Grund für den Einsatz dieser Bimorphelemente ist ihre Verwendung in den Ventilen zur Erzeugung kurzer Gaspulse. Diese Ventile sind seit etwa zwanzig Jahren im Einsatz. Eine Beschreibung findet sich in [Cro 82]. Ein Ziel dieser Arbeit war, das Schwingungsverhalten der darin verwandten Bimorph-Platten zu untersuchen.

Zu Beginn werde ich kurz auf den piezoelektrischen Effekt sowie den damit eng verbundenen inversen Piezoeffekt und seine atomaren Ursachen eingehen. Es folgt eine Beschreibung des piezoelektrischen Materials sowie der Aufbau und die Ansteuerung der Platten, die im Experiment eingesetzt wurden. Am Ende dieses Kapitels wird ein Ausblick auf die theoretische Beschreibung des inversen Piezoeffektes gegeben.

1.1. Der piezoelektrische Effekt

Der piezoelektrische Effekt wurde 1879 von den Gebrütern PIERRE und JACQUES CURIE an natürlichen Turmalin-Kristallen entdeckt.

Piezoelektrische Kristalle haben die Eigenschaft, daß sie sich bei Druck- oder Zugbeanspruchung in Richtung einer ihrer polaren Achsen elektrisch aufladen. (siehe dazu [Wei 95])

Der Effekt hängt wesentlich von der Richtung der Kraftwirkung, der dielektrischen Verschiebung und des elektrischen Feldes (beim inversen Effekt) ab. Er ist Eigenschaft aller

ferroelektrischer Kristalle. Jedoch sind nicht alle piezoelektrischen Kristalle ferroelektrisch. Ein Beispiel dafür ist Quarz.

Atomare Ursache der Piezoelektrizität

Die Ursache der Piezoelektrizität ist die gegenseitige Verschiebung der Kristallionen, die mit der Deformation des Kristalls einhergeht. Dies läßt sich beispielhaft an Quarz zeigen. Schematisch ist dieser Vorgang in Bild (II.1) veranschaulicht. Die Elementarzelle von Quarz besteht aus 3 Si^{4+} und 6 O^{2-} Ionen. Der in z-Richtung ausgeübte Druck bewirkt den longitudinalen Piezoeffekt. Hierbei nähern sich die Silizium-Ionen der unteren Elektrode mehr als die Sauerstoff-Ionen. Dies führt zur Ausbildung eines Dipols, der an der unteren Platte netto zu einer positiven Ladung führt. Die Sauerstoff-Ionen kommen im Schnitt der oberen Platte näher. Dabei werden negative Ladungen beeinflusst.

Bei Druck in x-Richtung entsteht der transversale Piezoeffekt. Hier ist die Polarisation umgekehrt.

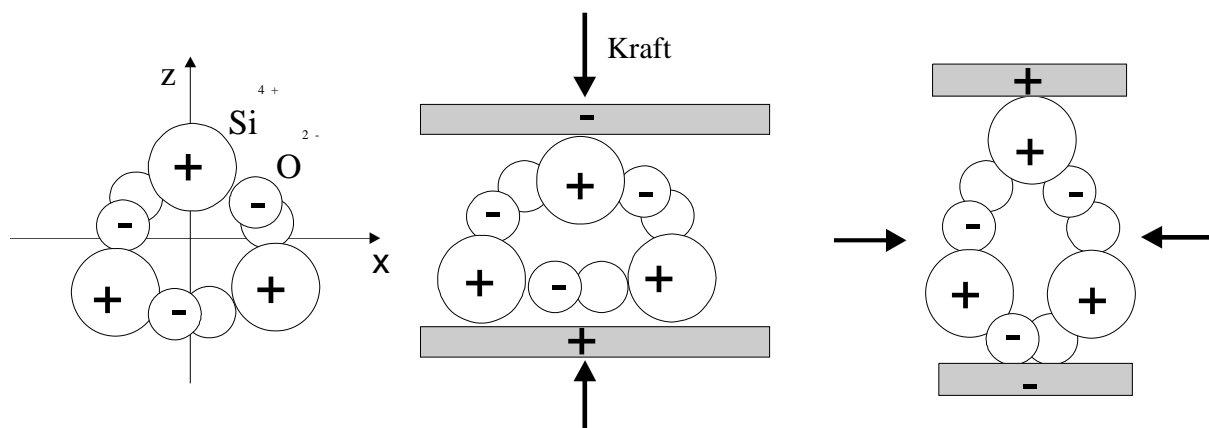


Abb. II.1: Schematische Darstellung des Piezoeffektes am Beispiel einer Elementarzelle von Quarz

- a) unverzerrte Elementarzelle des Quarzes
- b) longitudinaler piezoelektrischer Effekt
- c) transversaler piezoelektrischer Effekt

Die Ladungen der Platten werden beeinflusst, wenn die Kräfte die Elementarzelle verformen.

Inverser piezoelektrischer Effekt

Der inverse oder reziproke Piezoeffekt wurde von LIPPMANN durch thermodynamische Betrachtungen vorausgesagt und ebenfalls von den Gebrütern CURIE experimentell bestätigt. Hierbei führt das Anlegen eines elektrischen Feldes zu einer Deformation des Kristalls. Es gelten die gleichen Zusammenhänge wie oben beschrieben und in Abbildung (II.1) veranschaulicht. Für die im Experiment untersuchten Plattenschwingungen ist der transversale

inverse Piezoeffekt verantwortlich. Hierbei ist die Längenänderung orthogonal zur Richtung des angelegten elektrischen Feldes. Siehe dazu Bild (II.2).

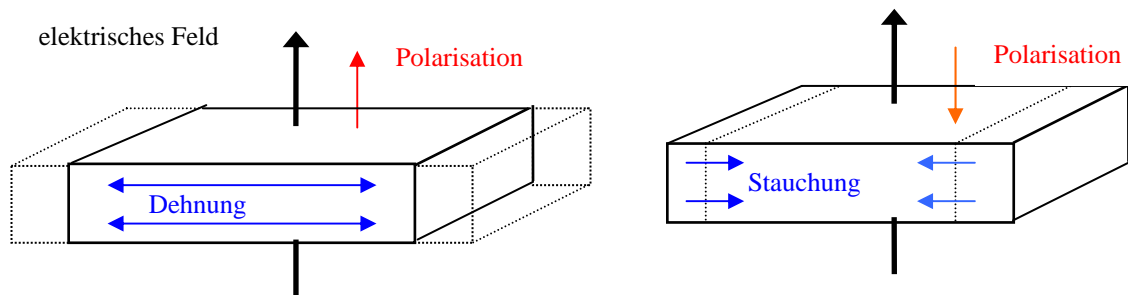


Abb. II.2: Schematische Darstellung des transversalen inversen Piezoeffekt

- a) Richtung des elektrischen Feldes parallel zur Polarisationsrichtung führt zu Dehnung
 - b) Richtung des elektrischen Feldes antiparallel zur Polarisationsrichtung führt zu Stauchung
- Die Polarisationsrichtung wird der Platte während der Herstellung eingepreßt.
Die Längenänderung ist orthogonal zu dem außen angelegten elektrischen Feld.

Die Längenänderungen im atomaren Bereich summieren sich zu makroskopisch meßbaren Effekten, die in der Praxis vielseitig genutzt werden. So verwendet man Piezomaterial um Verschiebungen im Nanometerbereich zu realisieren. Ein Beispiel dafür ist die Steuermechanik des Raster-Tunnel-Mikroskops (STM). Kohlrauch schreibt dazu: „Im Raster-Tunnel-Mikroskop (BINNING und ROHRER erhielten dafür 1986 den Nobelpreis) wird mittels rückkopplungsgesteuerter piezoelektrischer Stellglieder eine feine Metallspitze im Ultrahochvakuum so über eine Festkörperoberfläche bewegt, daß der Tunnelstrom konstant bleibt. Da dann die elektrische Spannung an den Piezo-Stäbchen ein Maß für die Position der Spitze ist, läßt sich ein dreidimensionales Bild der mikroskopischen Oberflächenstruktur gewinnen.“ [Koh 96]

Piezoelektrische Materialien

Es gibt natürliche Stoffe, die diese Eigenschaften besitzen. Beispielfhaft seien dafür Quarz (SiO_2) und Seignettsalz ($\text{KNa C}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) genannt. Für technische Anwendungen werden Piezokeramiken hergestellt. Diese sind in ihren Eigenschaften den Einsatzgebieten angepaßt. In meinen experimentellen Untersuchungen verwende ich Platten aus Blei-Titanat-Oxid, einem polykristallinen keramischen Material. Der atomare Aufbau ist in Abbildung (II.3) skizziert. Die Bezeichnung für das Material ist PXE5. Hersteller ist die Firma Valvo, Hamburg.

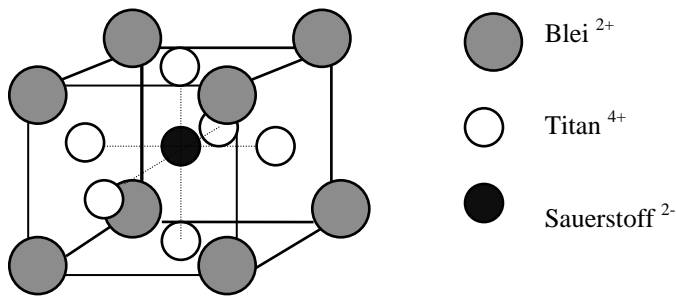


Abb. II.3: Aufbau von Blei-Titanat-Oxid (PbTiO_3)
 Blei-Titanat-Oxid ist der Hauptbestandteil von PXE 5.
 Aus diesem Material sind die untersuchten Platten.

Im Gegensatz zu natürlichen Piezoelektrika zeigen Keramiken nicht von Beginn an piezoelektrisches Verhalten. Sie werden erst durch Anlegen hoher Spannungen am Ende des Fertigungsprozesses polarisiert. Dadurch werden die vorher vorliegenden, regellos angeordneten Dipole ausgerichtet.

Bei den Piezoplatten, die im Experiment eingesetzt wurden, handelt es sich um zwei zusammengeklebte Plättchen piezoaktiven Materials.¹ Prinzipiell gibt es zwei verschiedene Ansteuerungsmöglichkeiten: Serien-Bimorph sowie Parallel-Bimorph. Siehe dazu Abbildung (II.4). In den experimentellen Untersuchungen wurden Serien-Bimorph-Platten verwendet. Bei ihnen ist die Polarisierung der beiden Platten einander entgegengesetzt.

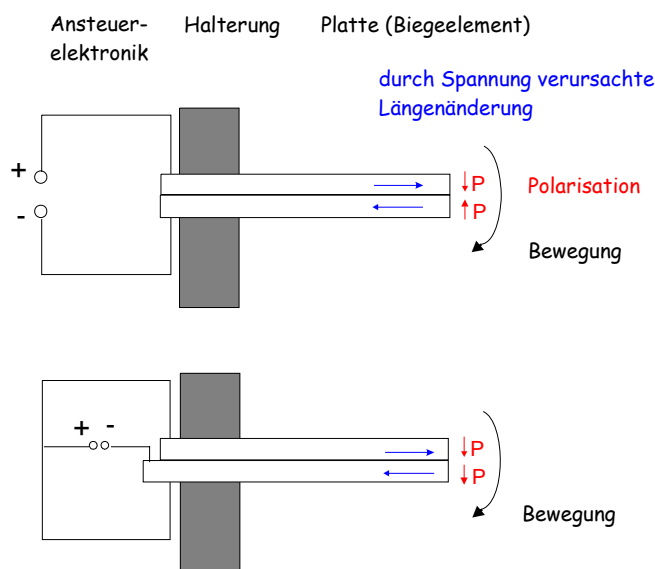


Abb. II.4: Verschiedene Ausführungen von PXE-Biegeelementen und deren Ansteuerungsmöglichkeiten
 a) Serien-Bimorph - im Experiment eingesetzt
 b) Parallel-Bimorph
 P ist die Polarisierung der einzelnen Schichten.
 Die Bewegungsrichtung ist abhängig von der Polung der angelegten Spannung.

¹ Auch als laminar design bezeichnet. [Pie 95]

1.2. Theoretische Beschreibung

Nach den anschaulich-phänomenologischen Darstellungen zum Piezoeffekt schließt sich nun eine kurze theoretische Betrachtung an. Sie lehnt sich an [Wie 95] sowie [Val 86] an.

Für die theoretische Beschreibung wird folgendes Koordinatensystem eingeführt: Abb. (II.5)

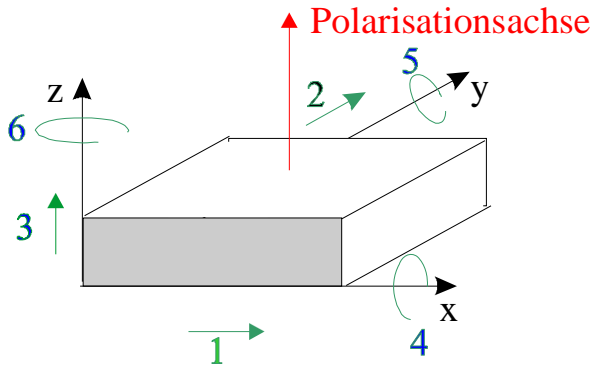


Abb. II.5: Verwendetes (kartesisches) Koordinatensystem mit Piezoplatte
Die Zahlen geben die Indizierung in der theoretischen Beschreibung an.

In der theoretischen Beschreibung von piezoelektrischen Stoffen müssen elektrische und mechanische Größen in Zusammenhang gebracht werden. Für kleine elektrische Feldstärken und mechanische Spannungen gilt folgende experimentell bestätigte Gleichung für den Dehnungstensor: $e = S\sigma + dE$ (II.1)

Dabei ist S der Tensor der elastischen Nachgiebigkeit, σ der Tensor der mechanischen Spannung, d der Tensor des Piezomoduls und E das Elastizitätsmodul.

Der Dehnungstensor e ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe.

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & e_6 & e_5 \\ e_6 & e_2 & e_4 \\ e_5 & e_4 & e_3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} e_1, e_2, e_3 - \text{Normalspannung bzw. -deformation} \\ e_4, e_5, e_6 - \text{Schub- und Scherspannung bzw. -deformation} \end{array}$$

Analog dazu der Tensor der mechanischen Spannung σ . Die Ziffern 1, 2, 3 stehen für die mechanische Normalspannung bzw. -deformation und die Ziffern 4, 5, 6 für die Schub- und Scherspannung.

Die Matrix des Piezomoduls hat folgendes Aussehen:

$$d = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix}$$

$$d_{ij} = \frac{\text{Feldstärke in Richtung } i}{\text{mechanische Spannung in Richtung } j}$$

$$j = \begin{cases} 1..3 & \text{- Zugspannung} \\ 4..6 & \text{- Schubspannung} \end{cases}$$

Die einzelnen Komponenten des Moduls d_{ij} sind gerade die piezoelektrischen Ladungskonstanten für die verschiedenen Raumrichtungen. Diese berechnen sich als Quotient aus angelegter Feldstärke zu erzeugter Dehnung. Es sind aber nicht alle 18 piezoelektrischen Koeffizienten, wie hier im allgemeinsten Fall angegeben, zur Beschreibung notwendig. Die Anzahl reduziert sich aus Gründen der Symmetrie des Kristalls. So sind für z.B. Quarz nur fünf Elemente notwendig. Diese fünf Größen lassen sich weiter auf nur zwei unabhängige Größen reduzieren. Es sind nur die Kenngrößen für den longitudinalen und den transversalen Piezoeffekt zu unterscheiden.

Der inverse transversale Piezoeffekt führt zu Schwingungen von Bimorphelementen. Die Längenänderung und die damit verbundene Verbiegung wird durch die d_{31} Komponente des Piezomoduls beschrieben, da das Feld parallel zur Polarisationsrichtung (3) angelegt und die dazu senkrechte (1) Ausdehnung betrachtet wird. Die gleichzeitige Längenänderung in y-Richtung (2) hat auf die Schwingung keinen Einfluß und interessiert deshalb nicht weiter.

Damit sind die Betrachtungen zum Piezoeffekt abgeschlossen. Wesentlich ist dabei, daß dieser Effekt zur Anregung der Schwingungen ausgenutzt wird.

Anschließend werden nun die Schwingungen aus mathematischer Sicht beschrieben.

2. Mathematische Beschreibung der Plattenschwingung

In diesem Kapitel wird das Schwingungsverhalten einer Platte betrachtet. Dazu wird die Platte zuerst näherungsweise als Balken angesehen und die Bewegungsgleichung aufgestellt. Als Lösung ergeben sich die Eigenfunktionen und die Eigenfrequenzen des Balkens. Unter Einbeziehung der Materialkonstanten des eingesetzten Materials können die Resonanzfrequenzen vorausgesagt werden.

Anschließend erfolgt eine Betrachtung der Platte unter Berücksichtigung der Torsion. Die daraufhin berechneten Resonanzfrequenzen stimmen im einfachsten Fall mit denen des Balkens überein. Zudem können daraus weitere plattenspezifische Eigenfrequenzen gewonnen werden.

2.1. Näherung der Platte als EULER-BERNOULLI-Balken

Ziel der Untersuchung ist es, die Resonanzfrequenzen einer einseitig eingespannten Platte zu prognostizieren. Dazu wird die Platte als einseitig eingespannter Balken² betrachtet. In Abbildung (II.6) ist diese balkenähnliche Platte in dem im weiteren benutzten Koordinatensystem dargestellt. Die Schwingung erfolgt in der x - z -Ebene unabhängig von der y -Koordinate. Die Funktion $w(x,t)$ beschreibt die Schwingung, indem sie die Auslenkung in z -Richtung in Abhängigkeit vom Ort x und der Zeit t angibt. Die Bezugslinie im räumlich ausgedehnten Balken ist dabei die sogenannte neutrale Faser. Das ist diejenige Ebene quer zum Balken, die bei der Verbiegung ihre Länge nicht ändert, währenddessen die Balkenober- und Unterseite gestreckt bzw. gestaucht wird. Siehe dazu ebenfalls Abbildung (II.6).

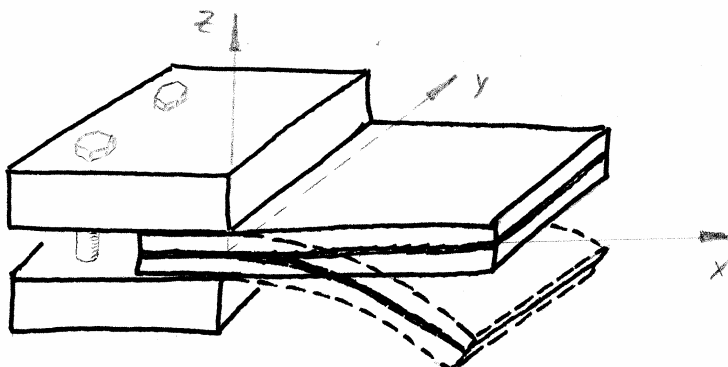


Abb. II.6: Einseitig eingespannter Balken in Nulllage und Auslenkung

Die neutrale Faser, die bei Auslenkung des Balkens ihre Länge nicht ändert, ist schraffiert gekennzeichnet.

Das Koordinatensystem ist so gelegt, daß die Einspannung den Balkens bei $x=0$ entlang der y -Achse fixiert. Die neutrale Faser befindet sich bei der Nulllage in der x - y -Ebene.

²) In der Literatur oft als Kragträger bezeichnet. Siehe z.B. [HAG 89]

Eine unabhängige Bewegung der Platte in y-Richtung wird durch die Einspannung weitgehend verhindert.

Unter der Annahme eines schlanken Balkens und kleiner Durchbiegungen kann das Modell des EULER-BERNOULLI-Balkens zugrunde gelegt werden.³ Diese Voraussetzungen sind im Experiment gegeben. Der Vorteil dieses Modells ist, daß die Berechnungen der Resonanzfrequenzen auf analytischem Weg möglich sind.

Der hier dargelegten Beschreibung liegt die EULER-BERNOULLI-Theorie zugrunde und lehnt sich an Hagedorn [Hag 89] an.

Die potentielle und kinetische Energie eines schwingenden Balkens ist durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) w''^2(x,t) dx$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A(x) \dot{w}^2(x,t) dx$$
(II.2)

Darin ist $EI(x)$ die Biegesteifigkeit, die sich aus dem Elastizitätsmodul E und dem axialen Flächenträgheitsmoment $I(x)$ zusammensetzt. Die zweite Ortsableitung der Auslenkungsfunktion $w(x,t)$ deutet an, daß die potentielle Energie des schwingenden Balkens in der Verbiegung - der Krümmung - gespeichert ist.

In der Gleichung zur kinetischen Energie bedeutet $\rho A(x)$ die Massendichte pro Längeneinheit. Zusammen mit dem Quadrat der ersten Zeitableitung der Auslenkung, dimensionsmäßig einem Quadrat der Geschwindigkeit, ergibt dies die kinetische Energie eines Volumenelementes.

Die Anwendung des Hamiltonschen Formalismus (siehe dazu [Hag 89]) führt auf folgende Bewegungsgleichung:

$$(EI(x)w''(x,t))'' + \rho A(x) \ddot{w}(x,t) = q(x,t)$$
(II.3)

Darin bedeutet $q(x,t)$ eine orts- und zeitabhängige Belastung des Balkens.

Alle weiteren Betrachtungen werden für den unbelasteten Balken gemacht. Das heißt, daß in Gleichung (II.3) $q(x,t) \equiv 0$ gesetzt wird. Es gibt keine Erregung, die Schwingungen sind frei.

³ Anders ausgedrückt heißt das: der Balken muß Schubstarr und die Rotationsträgkeit zu vernachlässigen sein. Eine Einführung in die EULER-BERNOULLI-Theorie wird in [Gro 95] gegeben.

Da der Balken für die vorliegende experimentelle Situation als homogen betrachtet werden kann, folgt: Biegesteifigkeit: $EI(x) = \text{const}$

$$\text{Flächendichte: } \rho A(x) = \text{const} \quad \forall x \quad (\text{II.4})$$

Damit lautet die Schwingungsgleichung:

$$EI w''''(x,t) + \rho A \ddot{w}(x,t) = 0 \quad (\text{II.5})$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung vierter Ordnung nach dem Ort und zweiter Ordnung nach der Zeit. Nur die Auslenkungsfunktion ist noch vom Ort und von der Zeit abhängig. Zur Lösung wird nun folgender Ansatz benutzt:

$$w(x,t) = W(x)p(t) \quad (\text{II.6})$$

Darin ist die Auslenkungsfunktion nach dem Ort und nach der Zeit separiert.

Das Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung führt auf:

$$EI W''''(x)p(t) + \rho A W(x) \ddot{p}(t) = 0 \quad (\text{II.7})$$

Durch Umformung erhält man:

$$\frac{EI W''''(x)}{\rho A W(x)} = - \frac{\ddot{p}(t)}{p(t)} \quad (\text{II.8})$$

Sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung hängen jeweils nur von einer Variablen ab. Damit sind die Quotienten konstant und werden gleich ω^2 gesetzt.

Die rechte Seite der Gleichung (II.8) führt somit auf:

$$- \frac{\ddot{p}(t)}{p(t)} = \omega^2 \quad (\text{II.9})$$

und nach dem Umformen folgt:

$$\ddot{p}(t) + \omega^2 p(t) = 0 \quad (\text{II.10})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine harmonische Zeitfunktion

$$p(t) = p_c \cos \omega t + p_s \sin \omega t \quad (\text{II.11})$$

in der die Kreisfrequenz ω noch bestimmt werden muß.

Die Koeffizienten p_c und p_s sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Im folgenden wird die linke Seite der Gleichung (II.8) betrachtet:

$$EIW''''(x) - \omega^2 \rho A W(x) = 0 \quad (\text{II.12})$$

Nach Umformung und Substitution der Konstanten durch

$$\beta^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \quad (\text{II.13})$$

folgt:

$$W''''(x) - \beta^4 W(x) = 0 \quad (\text{II.14})$$

Diese lineare Differentialgleichung vierter Ordnung wird mit Hilfe des Exponentialansatzes

$$W(x) = e^{\lambda x} \text{ gelöst.} \quad (\text{II.15})$$

Nach dem Einsetzen erhält man die Gleichung $\lambda^4 - \beta^4 = 0$ (II.16)

mit den Lösungen $\lambda_{1/2} = \pm \beta$
 $\lambda_{3/4} = \pm i\beta$ (II.17)

Für die Praxis ist nur der Fall $\beta \neq 0$ relevant. Daraus folgt die allgemeine Lösung

$$W(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x \quad (\text{II.18})$$

Die Koeffizienten A, B, C, D können aus den Randbedingungen bestimmt werden. Die Randbedingungen sind durch die einseitige Einspannung der Platte festgelegt. Für die eingespannte Seite (bei $x = 0$) ist die Auslenkung Null. Die erste Ableitung ist ebenfalls für alle Zeiten gleich Null, da der Balken horizontal fest eingespannt ist.

$$\begin{aligned} W(0) &= 0 \\ W'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Für die freie Seite (bei $x = l$) kann angenommen werden, daß sowohl die zweite Ableitung, die die Krümmung beschreibt, als auch die dritte Ableitung identisch Null sind.

$$\begin{aligned} W''(l) &= 0 \\ W'''(l) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Aus (II.19) folgt nun

$$\begin{aligned} B + D &= 0 \\ A + C &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Aus den zwei restlichen Randbedingungen (II.20) folgt

$$\begin{aligned}(\sin \beta l + \sinh \beta l)C + (\cos \beta l + \cosh \beta l)D &= 0 \\(\cos \beta l + \cosh \beta l)C + (\sin \beta l - \sinh \beta l)D &= 0\end{aligned}\tag{II.22}$$

Die charakteristische Gleichung lautet somit

$$\begin{vmatrix} \sin \beta l + \sinh \beta l & \cos \beta l + \cosh \beta l \\ \cos \beta l + \cosh \beta l & \sin \beta l - \sinh \beta l \end{vmatrix} = 0\tag{II.23}$$

Nach Auflösen und Umstellen folgt

$$\cos \beta l = -\frac{1}{\cosh \beta l} := f(\beta l)\tag{II.24}$$

Die zwei Funktionen $f_1(\beta l) = \cos \beta l$ und $f_2(\beta l) = -\frac{1}{\cosh \beta l}$ sind in der Grafik (II.7) dargestellt. Die Lösungen der Gleichung (II.24) sind die Abszissenwerte der Schnittpunkte beider Funktionen.

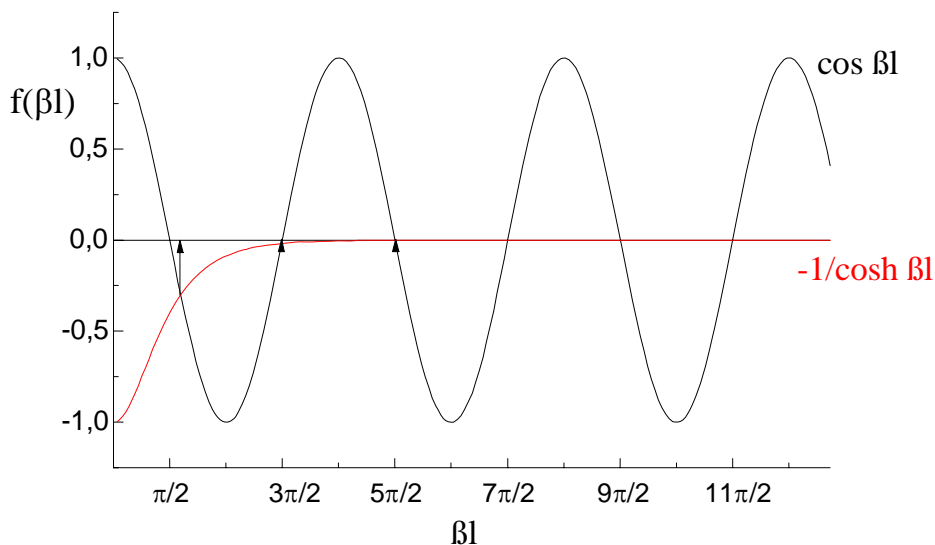


Abb. II.7: Die Funktionen $f_1(\beta l) = \cos \beta l$ und $f_2(\beta l) = -1/\cosh \beta l$ aus der Gleichung (II.24). Die Lösungen sind gerade die x -Werte der Schnittpunkte dieser Funktionen. Sie entsprechen im wesentlichen den Nullstellen der \cos -Funktion.

Daraus ergeben sich nun folgende Lösungen:

$$\beta_k l = \frac{2k-1}{2} \pi + e_k \quad \text{mit } k \in \mathbf{N}\tag{II.25}$$

Sie entsprechen bis auf den kleinen Korrekturterm e_k den Nullstellen der \cos -Funktion. Für $k \rightarrow \infty$ strebt e_k sehr schnell gegen 0. Damit kann der Term e_k in den weiteren Betrachtungen vernachlässigt werden.

Damit sind sowohl die Eigenfunktionen als auch die Eigenfrequenzen des einseitig eingespannten Balkens bestimmt. Sie lauten:

$$W_k(x) = \sinh \beta_k x - \sin \beta_k x - \left(\frac{\sinh \beta_k l + \sin \beta_k l}{\cosh \beta_k l + \cos \beta_k l} \right) (\cosh \beta_k x - \cos \beta_k x)$$

$$\nu_k = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2k-1}{2} \pi + e_k \right)^2 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{mit } k \in \mathbf{N} \quad (\text{II.26})$$

Die ersten drei Eigenfunktionen sind in Bild (II.8) dargestellt.

Nach Umformung und ohne die Berücksichtigung der e_k ergibt sich die einfachere Formel für die Eigenfrequenzen:

$$\nu_k = \frac{\pi}{8} (2k-1)^2 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{II.27})$$

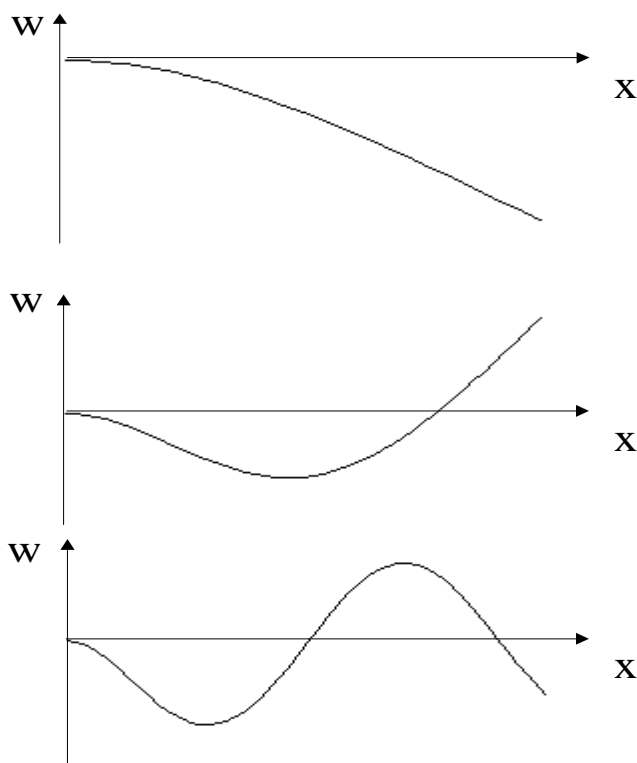


Abb. II.8: Die ersten drei Eigenfunktionen des einseitig eingespannten Balkens

Die Normierung erfolgte zu $\max W_i(x) = 1$

Die Funktionen geben die Lage der neutralen Faser bei maximaler Auslenkung an.

Die Darstellung ist stark überhöht. Es gilt die oben gemachte Voraussetzung $w \ll 1$.

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung in Abhängigkeit von der Zeit und von dem Ort ergibt sich dann entsprechend als Summe aus den Einzellösungen nach folgender Gleichung:

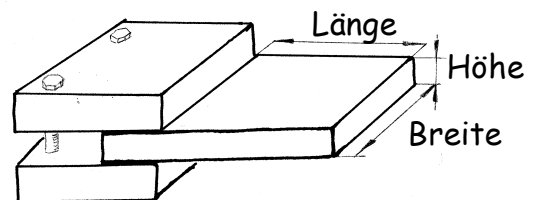
$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k W_k(x) \cos(\omega_k t + \alpha_k) \quad (\text{II.28})$$

Die ω_k berechnen sich aus den v_k . Die Koeffizienten A_k geben an, wie stark der k -te Schwingungsmodus an der gesamten Schwingung beteiligt ist. Die α_k geben die zugehörigen Phasenverschiebungen an.

Mit Hilfe der Formel (II.27) können nun Eigenfrequenzen für die Platte bestimmt werden. Dazu benötigt man die Werte der stoffspezifischen Konstanten des Elastizitätsmoduls E und der Massendichte ρ . Die im folgenden angegebenen Daten sind Herstellerangaben. Sie sind für die verwendeten Serien-Bimorph-Platten aus PXE5 aus dem Valvo-Datenbuch [Val 86] entnommen. Das axiale Flächenträgheitsmoment I und die Fläche A lassen sich aus der Geometrie der Platte berechnen. Für den rechteckigen Balken, zu dem die Platte vereinfacht

wird, gilt: $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$ [Win 91]. Die Fläche A berechnet sich als Produkt aus Höhe h und Breite b . Vgl. Abbildung(II.9).

Somit gehen folgende Werte in die Rechnung ein:



Plattenabmessungen:

$$\begin{aligned} \text{Länge:}^4 \quad l &= 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \text{Breite:} \quad b &= 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \text{Höhe:} \quad h &= 6 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Abb. II.9. Abmessungen der Platte

$$\text{Elastizitätsmodul:} \quad E = 6,7 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \quad)^5$$

$$\text{Dichte:} \quad \rho = 7,7 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Flächenträgheitsmoment:} \quad I = 1,8 \cdot 10^{-13} \text{ m}^4 \quad (\text{II.30})$$

⁴ Die Länge bezieht sich hier auf den frei schwingenden Anteil der Platte. Insgesamt hat die Platte die Maße 12mm x 10mm x 0,6mm. [Val 86]

⁵ Dies ergibt sich aus der Elastizitätskonstante: $s^E = 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ [Val 86]

Diese gibt das Verhältnis der Dehnung zur mechanischen Spannung (bei konstanter elektrischer Feldstärke) an. Das in der Formel benötigte Elastizitätsmodul E ist gerade der reziproke Wert.

Nach Einsetzen in die Gleichung (II.27) ergibt sich die erste Resonanzfrequenz (für $k= 1$) zu $\nu_1 = 2,0$ kHz .

Die weiteren Resonanzfrequenzen für höhere k -Werte berechnen sich entsprechend. Sie sind in der folgenden Tabelle (II.1) zusammengefaßt.

| k | Frequenz in kHz |
|----------|------------------------|
| 1 | 2,00 |
| 2 | 18,01 |
| 3 | 50,03 |
| 4 | 98,07 |
| 5 | 162,11 |

Tab. II.1: Berechnete Resonanzfrequenzen für die als Balken betrachtete Platte.
Der Parameter k kennzeichnet den Schwingungsmodus.

Im Valvo Datenbuch [Val 86] ist folgende Überschlagsformel für die Resonanzfrequenz angegeben:

$$\nu_1 = 400 \frac{h}{l^2} \tag{II.31}$$

Diese ergibt sich für $k= 1$ aus (II.27) durch Umstellen wie folgt

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{\pi}{8} \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \\ &= \frac{\pi}{8} \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{Eh^3b}{12\rho hb}} \\ &= \frac{\pi}{8} \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}} \end{aligned} \tag{II.32}$$

Nach Einsetzen der obigen Daten (II.29) und (II.30) erhält man als Faktor 334 statt 400.

Das ist eine Bestätigung für die Korrektheit der bisherigen Betrachtungen. Insbesondere erhärtet es die Annahme, daß die Platte in erster Näherung als Balken betrachtet werden kann. Es gibt Anlaß zur Hoffnung, daß auch die Voraussage von weiteren Resonanzfrequenzen zutrifft.

2.2. Die Eigenschwingung der Platte

Die näherungsweise Betrachtung der Platte als Balken ist sehr fruchtbar. Aus den daraus hergeleiteten Gleichungen konnten die Eigenfrequenzen der Platte prognostiziert werden. Die Grundfrequenz wird durch die Formel im Valvo-Handbuch und die späteren experimentellen Messungen bestätigt. Bei dieser Näherung wird jedoch die Verdrehung der Platte in sich selbst (Torsion) vernachlässigt.

Die mathematische Beschreibung der Platte unter Berücksichtigung der Torsion ist wesentlich komplizierter. Mit der Lösung dieses Problems sind Namen bedeutender Mathematiker und Physiker verbunden. Da die geschichtliche Entwicklung sehr interessant ist, möchte ich vor der mathematischen Betrachtung einen kurzen historischen Abriss geben:

Darstellung von Plattenschwingungen erfolgt noch heute häufig mittels CHLADNISchen Klangfiguren. Die ästhetisch sehr reizvollen Figuren wurden erstmals von Ernst Florens Friedrich CHLADNI, Doktor der Philosophie und der Rechte zu Wittenberg, 1787 veröffentlicht. Er schrieb dazu: "Zur deutlichen Darstellung der Figuren einer jeden Schwingungsart, deren eine Scheibe fähig ist, wird erfordert, daß man eine oder mehrere Stellen, die in Ruhe bleiben, mit dem Finger oder auf andere Art halte, den Rand der Scheibe an einer Stelle, wo ungefähr die Mitte eines schwingenden Theiles ist, mit dem Violinbogen rechtwinklig streiche, und wenn man verlangt, daß die Knotenlinien sichtbar werden sollen, auf die horizontal gehaltene Oberfläche der Scheibe etwas Sand streue, welcher von den schwingenden Theilen weggeworfen wird, auf den festen Linien aber ruhig bleibt und sich anhäuft." [Bär 96]

CHLADNI reiste durch ganz Europa und verdiente sich seinen Lebensunterhalt durch Vorträge über die Akustik. Ende des Jahres 1808 traf er in Paris ein. Dort wurde er von dem großen Mathematiker und Physiker LAPLACE bei NAPOLEON eingeführt. NAPOLEON setzte im Anschluß ein Preisgeld von 3000 Franc für eine mathematische Erklärung dieser Klangfiguren aus. Die Ausschreibungsfrist mußte zweimal verlängert werden. Das Preisgeld ging 1816 an die französische Mathematikerin Sophie GERMAIN. Später stellte sich heraus, daß die Gleichungen immer noch nicht richtig sein konnten. CHLADNI selbst hat die theoretische Beschreibung seiner akustischen Figuren nicht mehr erlebt. In Folge beschäftigten sich so berühmte Wissenschaftler wie POISSON, WHEATSTONE und RAYLEIGH mit diesem Problem. POISSON stellte die richtigen Differentialgleichungen auf, KIRCHHOFF fand die richtigen Randbedingungen für die Platte mit freiem Rand. Damit berechnete er 1850 die Klangfiguren der runden Scheibe. Die Lösung für die quadratische Scheibe lieferte 1909 RITZ mit Hilfe der Variationsrechnung.

Die von POISSON aufgestellte Differentialgleichung lautet:

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho A \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.33})$$

Darin stehen $w(x, y, t)$ für die Auslenkungsfunktion und ρ für die Massendichte pro Fläche. D ist wieder die Biegesteifigkeit⁶ Sie berechnet sich für die Platte wie folgt:⁷

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (\text{II.34})$$

Darin ist μ die POISSONSche Querkontraktionszahl. Sie gibt das Verhältnis von relativer Dickenänderung zu relativer Längenänderung an.

Weiterhin gilt: $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ mit dem LAPLACE-Operator ∇^2 .

Zum Vergleich ist nocheinmal die Schwingungsgleichung des Balkens angegeben:

$$D \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.5'})$$

Die Plattenschwingung wird wieder als frei angesehen. Daraus folgt, daß keine erregende Kraft wirkt. Die Zeitabhängigkeit der Auslenkungsfunktion ist von der Art:

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cos \omega t. \quad (\text{II.35})$$

Darin ist ω die Kreisfrequenz und $W(x, y)$ die noch zu bestimmende räumliche Auslenkungsfunktion.

Den Ansatz (II.35) in die Gleichung (II.33) eingesetzt ergibt:

$$(\nabla^4 - \beta^4)W(x, y) = 0 \quad (\text{II.36})$$

Worin β wie folgt definiert ist:

$$\beta^4 = \frac{\rho A}{D} \omega^2 \quad (\text{II.37})$$

⁶ In einigen Büchern auch als Plattensteifigkeit bezeichnet.

⁷ Mit $\mu = 0$ entspricht (II.34) der Biegesteifigkeit des Balkens.

Denn für einen Balken der Breite 1 gilt: $D = EI$ mit dem Flächenträgheitsmoment $I = \frac{h^3}{12}$ (II.2') und (II.30')

Diese Differentialgleichung vierter Ordnung in der Zeit kann faktorisiert geschrieben werden als: $(\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)W(x, y) = 0$ (II.38)

Das Superpositionsprinzip linearer Differentialgleichungen führt auf die allgemeine Lösung: $W(x, y) = W_1(x, y) + W_2(x, y)$ (II.39)

Die Funktionen W_1 und W_2 erfüllen die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla^2 W_1(x, y) + \beta^2 W_1(x, y) &= 0 \\ \nabla^2 W_2(x, y) - \beta^2 W_2(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Aus den Biegemomenten, Torsionsmomenten und Querkräften können die Randbedingungen abgeleitet werden. Bereits POISSON hatte sich daran versucht, aber die richtige Formulierung gelang erst KIRCHHOFF. Hier wird dazu auf Hagedorn [Hag 89] und Leissa [Lei 69] verwiesen.

Zur Lösung der Gleichung (II.36) wird folgender Separationsansatz benutzt:

$$W(x, y) = X(x)Y(y) \quad (\text{II.41})$$

Die Funktionen $X(x)$ und $Y(y)$ sind die Eigenfunktionen eines Balkens unter den Randbedingungen der Platte in der jeweiligen Raumrichtung.

Damit ist die Funktion $X(x)$ im vorangehenden Kapitel bereits vollständig bestimmt worden. Im Hinblick auf die Vollständigkeit wird Gleichung (II.26) an dieser Stelle noch einmal genannt. (Dabei sind die Variablen an die hier im Abschnitt gebrauchten Bezeichnungen angepaßt.)

$$\begin{aligned} X_k(x) &= \sinh \beta_k x - \sin \beta_k x - \left(\frac{\sinh \beta_k l + \sin \beta_k l}{\cosh \beta_k l + \cos \beta_k l} \right) (\cosh \beta_k x - \cos \beta_k x) \\ \cos \beta_k l &= - \frac{1}{\cosh \beta_k l} \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

Die Funktion $Y(y)$ entspricht den Eigenschwingungen eines Balkens mit zwei freien Enden. Die entsprechenden Gleichungen (II.43) und (II.44) sind zitiert aus [Lei 69].

$$\begin{aligned}
Y_0(y) &= 1 & l &= 0 \\
Y_1(y) &= 1 - \frac{2y}{b} & l &= 1 \\
Y_l(y) &= \cos \gamma_l \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin \frac{\gamma_l}{2}}{\sinh \frac{\gamma_l}{2}} \cosh \gamma_l \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) & l &= 2, 4, 6, \dots \\
Y_l(y) &= \sin \delta_l \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sin \frac{\delta_l}{2}}{\sinh \frac{\delta_l}{2}} \sinh \delta_l \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) & l &= 3, 5, 7, \dots
\end{aligned} \tag{II.43}$$

Dabei müssen γ_l und δ_l folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
\tan \frac{\gamma_l}{2} + \tanh \frac{\gamma_l}{2} &= 0 \\
\tan \frac{\delta_l}{2} - \tanh \frac{\delta_l}{2} &= 0
\end{aligned} \tag{II.44}$$

Analog zu dem Vorgehen im vorangehenden Kapitel bei der Gleichung (II.24) werden nun aus den Gleichungen (II.44) die Lösungen γ_l und δ_l bestimmt.

Eingesetzt in Gleichung (II.43) sind somit die Eigenschwingungen der Platte bekannt. Für die ersten Parameterwerte sind die Eigenschwingungsformen in Abbildung (II.11) dargestellt. Nunmehr gibt es zwei Parameter: k und l , die die Schwingungsmoden der Platte charakterisieren. Für $l=0$ erhält man erwartungsgemäß die gleichen Eigenschwingungen wie beim Balken. Gleiches gilt bei den Eigenfrequenzen.

Sie werden allgemein nach folgender Gleichung berechnet:

$$\nu_{kl} = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} \frac{\pi^4 D}{\rho} \left\{ \frac{G_x^4}{l^4} + \frac{G_y^4}{b^4} + \frac{2}{l^2 b^2} (\mu H_x H_y + (1-\mu) J_x J_y) \right\}} \tag{II.45}$$

Die Funktionen G , H , J werden in unten stehender Tabelle (II.2) spezifiziert. l und b bezeichnen x- und y-Ausdehnung der Platte, D ist das Biegemoment und μ ist die POISSONSche Querkontraktionszahl.

| k | G_x | H_x | J_x |
|---------|-------------------|---|---|
| 1 | 0,500 | -0,087 | 0,471 |
| 2 | 1,500 | 1,347 | 3,284 |
| 3 | 2,500 | 4,658 | 7,841 |
| $k > 3$ | $k - \frac{1}{2}$ | $\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ | $\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{2}{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ |

| l | G_y | H_y | J_y |
|---------|-------------------|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1,216 |
| 2 | 1,506 | 1,248 | 5,017 |
| $l > 2$ | $l - \frac{1}{2}$ | $\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(l - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ | $\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{6}{\left(l - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ |

Tab. II.2: Koeffizienten zur Berechnung der Eigenfrequenz einer einseitig bei $x=0$ eingespannten Platte
 k und l sind die Parameter, die den Schwingungsmodus charakterisieren.
Für kleine Parameter sind die Koeffizienten explizit angegeben. Für größere k und l Werte
können sie näherungsweise mittels der angegebenen Terme berechnet werden.

Damit lassen sich nun die Resonanzfrequenzen berechnen. Diese sind für die verschiedenen Schwingungsmoden der Platte in Abhängigkeit von den Parametern k und l in nachfolgender Tabelle (II.3) zusammengefaßt. Für die Maße und Stoffkonstanten wurden die gleichen Werte wie in Kapitel II.2.1. verwendet.

| k/l | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 2,00 | 3,19 | 5,42 | 11,18 | 20,46 | 33,06 |
| 2 | 18,01 | 18,26 | 19,83 | 28,94 | 30,67 | 41,59 |
| 3 | 50,03 | 50,37 | 51,62 | 62,30 | 59,00 | 66,84 |
| 4 | 98,07 | 98,39 | 99,53 | 112,13 | 105,46 | 111,36 |
| 5 | 162,11 | 162,42 | 163,52 | 178,41 | 168,75 | 173,62 |
| 6 | 242,17 | 242,47 | 243,53 | 261,09 | 248,39 | 252,67 |

Tab. II.3: Resonanzfrequenzen der Platte für die verschiedenen Schwingungsmodi k, l in kHz
Die erste Spalte mit $l=0$ stimmt mit den Eigenfrequenzen des Balkens überein.
Siehe dazu Tab. II.1

Die Resonanzfrequenzen für $l=0$ stimmen mit den im vorangehenden Kapitel berechneten überein. Denn für $l=0$ sind außer dem ersten alle Terme in der Klammer gleich Null. Nach Umstellen ergibt sich exakt die Gleichung der Eigenfrequenzen für den Balken (II.26). Damit

ist der schwingende Balken als Spezialfall in der Betrachtung der schwingenden Platte enthalten.

In [Lei 69] wird beschrieben, daß es schwierig ist, Moden mit höheren l -Werten anzuregen. Insgesamt ist zu erwarten, daß kaum noch Frequenzen zu größeren Parametern an der Schwingung beteiligt sind, denn mit steigenden k - und l - Werten liegen die Knotenlinien der schwingenden Platte näher beieinander. Um gleiche Amplituden wie bei kleinen Parametern zu erreichen, muß die Krümmung $w''(x,t)$ größer werden. Zur Veranschaulichung sind in Abbildung (II.10) die Krümmungskreise der Eigenfunktionen eingezeichnet. Um gleiche Auslenkung zu erreichen, muß der Radius der Krümmungskreise abnehmen. Die zugehörige Krümmung $w''(x,t)$ berechnet sich gerade als Reziprokes des Radius.

$$w''(x,t) = \frac{1}{r(x,t)} \quad (\text{II.46})$$

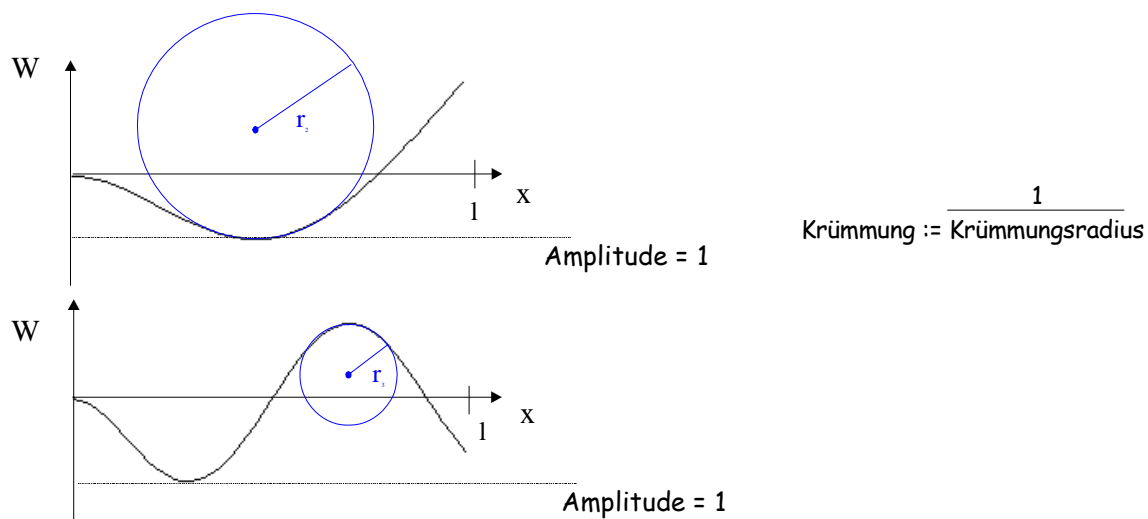


Abb. II.10: Krümmungskreise der zweiten und dritten Eigenfunktion des einseitig eingespannten Balkens (siehe Abb. II.8) Die Radien der Kreise sind ein Maß für die Krümmung und somit für die darin gespeicherte potentielle Energie.

Deshalb wird wesentlich mehr Energie zum Anregen höherer k - und l -Moden benötigt, da der potentielle Anteil der Energie mit dem Quadrat der Krümmung wächst. Siehe dazu Gleichung (II.2).

Damit sind die Vorbetrachtungen zu den Plattenschwingungen mit kleinen Amplituden abgeschlossen. Auf der folgenden Seite sind Simulationen der Plattenschwingungen entsprechend den zuletzt aufgestellten Gleichungen abgebildet. Abb. (II.11)

Daran anschließend folgt die Beschreibung der experimentellen Untersuchungen und deren Ergebnisse.

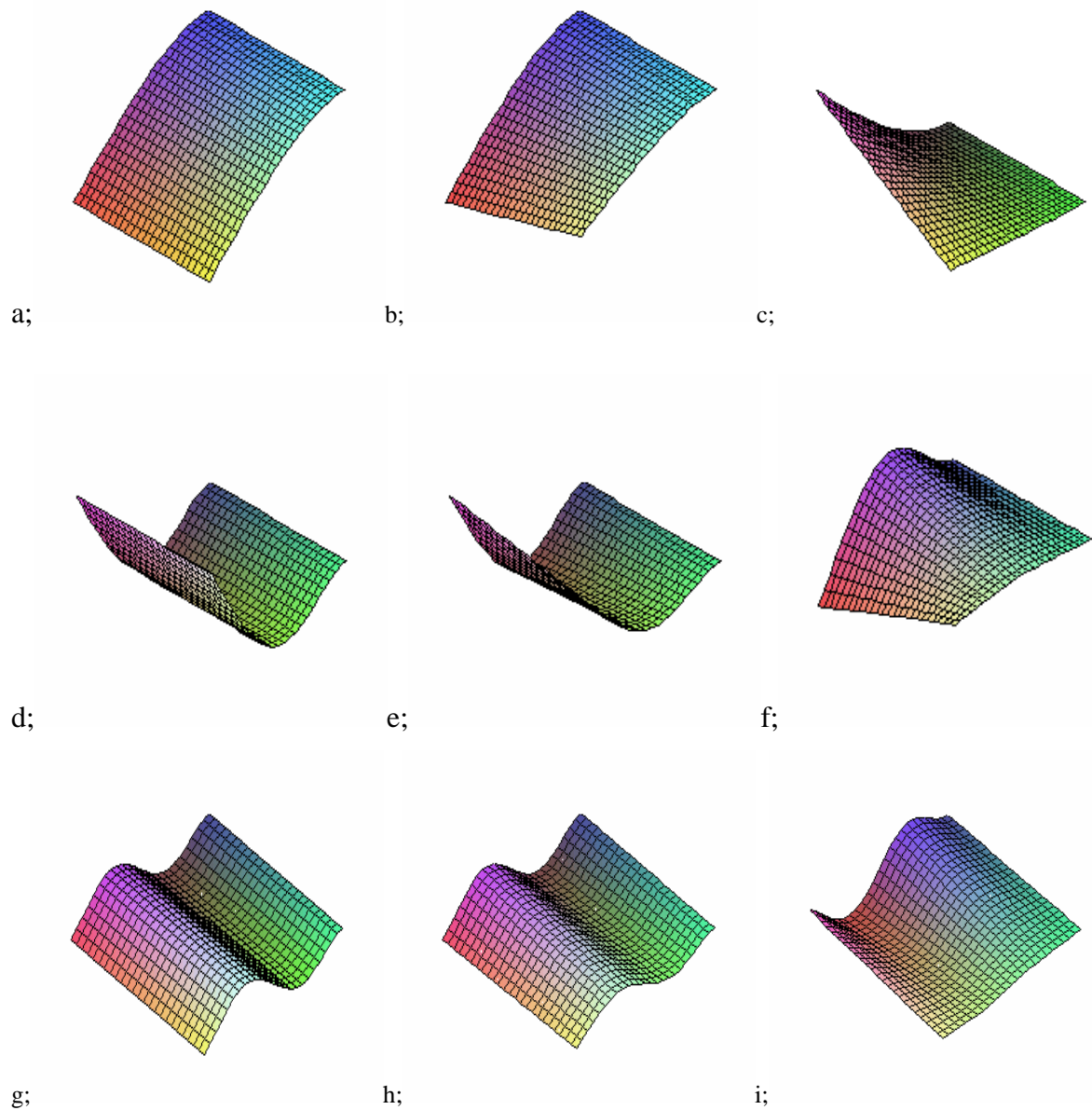


Abb. II.11: Simulation der Eigenfunktionen der Plattenschwingung

Die Graphiken stellen die Lage der neutralen Ebene der einseitig eingespannten Platte bei maximaler Auslenkung dar. Die Einspannung fixiert die Platte entlang dem rechten oberen Rand.

Die zugehörigen Wellenfunktionen sind in Kapitel II.2.2. angegeben Gleichungen (II.38),(II.39) und (II.40)

| | | | |
|------------|----------------|----------------|----------------|
| Eigenwerte | a; $k=1$ $l=0$ | b; $k=1$ $l=1$ | c; $k=1$ $l=2$ |
| | d; $k=2$ $l=0$ | e; $k=2$ $l=1$ | f; $k=2$ $l=2$ |
| | g; $k=3$ $l=0$ | h; $k=3$ $l=1$ | i; $k=3$ $l=2$ |

III. Das Experiment

Erstes Ziel war es, die Resonanzfrequenz der Serien-Bimorph-Platte aus PXE5 zu bestimmen. Dazu habe ich im wesentlichen drei verschiedene Verfahren angewendet. In den ersten zwei Verfahren wurde die Platte periodisch angeregt und das Schwingungsverhalten der Platte mittels Mikrophon bzw. Lock-in-Verstärker aufgezeichnet. Beim dritten Verfahren war die Platte nach einmaliger Anregung freischwingend. Die Aufzeichnung erfolgte mittels Mikrophon. Zum Überblick siehe folgende Grafik:

| Erstes Verfahren | Zweites Verfahren | Drittes Verfahren |
|-----------------------------------|-------------------|---|
| periodische sinusförmige Anregung | | nach einmaliger Anregung freischwingend |
| Mikrophonaufzeichnung | Lock-in-Methode | Mikrophonaufzeichnung |

Im folgenden stelle ich das jeweilige Prinzip, den Versuchsaufbau, das Meßverfahren und die dadurch gewonnenen Meßwerte dar. Dabei werde ich auch auf die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren eingehen.

1. Permanent angeregte Plattenschwingung

1.1. Erstes Verfahren

Wenn bei einem permanent angeregten schwingungsfähigen System mit kleiner Dämpfung die erregende Frequenz mit der Eigenfrequenz des Systems übereinstimmt, dann schwingt es mit maximaler Amplitude. Dies nennt man den Resonanzfall. Diese physikalische Eigenschaft soll im ersten Verfahren zur Bestimmung der Resonanzfrequenzen ausgenutzt werden.

Dazu wurde der in Abbildung (III.1) gezeigte Versuchsaufbau eingesetzt.

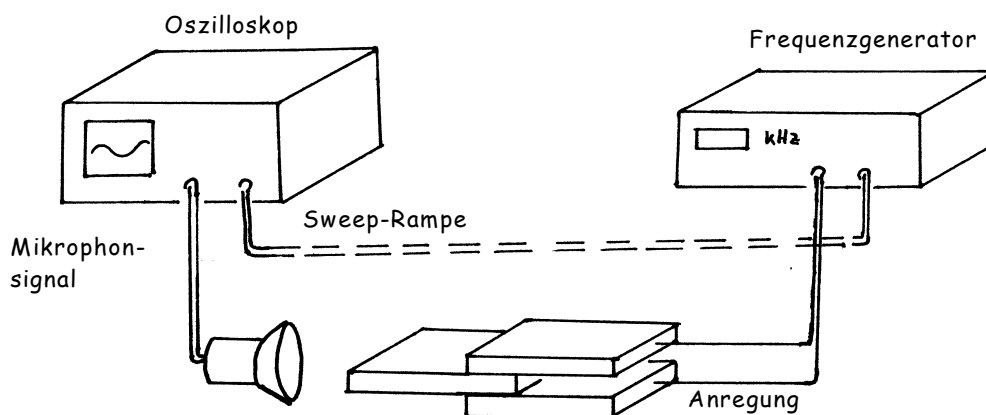


Abb. III.1: Versuchsaufbau für das erste Verfahren

Die Piezoplatte wird mittels eines Frequenzgenerators zum Schwingen angeregt. Die Anregung ist sinusförmig und ist auf den Frequenzbereich von 1 kHz bis 25 kHz begrenzt. Höhere Frequenzen können mit dem Mikrophon nicht mehr so gut bzw. gar nicht mehr erfaßt werden. Mit kleineren Frequenzen zu arbeiten, ist wegen der vorherigen theoretischen Abschätzung der Resonanzfrequenzen nicht sinnvoll. Die Anregungsspannung beträgt 4 V...5 V.

Es besteht die Möglichkeit, eine Frequenz am Frequenzgenerator einzustellen. Die Platte wird in Schwingung versetzt und strahlt Schallwellen ab; diese werden mit dem Mikrophon aufgenommen. Auf dem Oszilloskop werden die Spannungsänderungen des Mikrophonsignals dargestellt.

Bei Änderung der Frequenz ändert sich die Amplitude der Plattenschwingung und verbunden damit auch die Intensität der Schallabstrahlung. Werden alle anderen Größen, wie beispielsweise der Abstand von Platte zu Mikrophon, konstant gelassen, so kann vom Mikrophonsignal auf die Amplitude der Platte geschlossen werden.

Um über den gesamten Frequenzbereich von 1 kHz bis 25 kHz zu messen, bietet es sich an, die Frequenz innerhalb der Meßzeit linear anwachsen zu lassen. Dies ist mit der sweep-Funktion des Frequenzgenerators möglich. In Abbildung (III.2) ist eine solche Frequenzänderung schematisch anhand weniger Schwingungen dargestellt. Ebenfalls eingezeichnet ist die sogenannte sweep-Rampe, die linear von der Frequenz abhängt. Diese Funktion wurde in den Messungen parallel zum Mikrophonsignal auf dem Kanal 2 des Oszilloskops dargestellt und aufgezeichnet. Daraus kann mit Kenntnis der Frequenzanfangs- und Endwerte die jeweilige Momentanfrequenz berechnet werden.

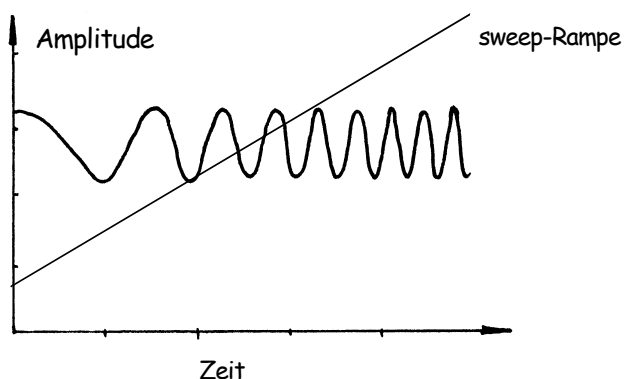


Abb. III.2: Arbeitsweise der sweep-Funktion des Frequenzgenerators anhand weniger Schwingungen
Die Frequenz wächst linear an. Anhand der sweep-Rampe kann die momentane Frequenz berechnet werden.

Die beschriebene Frequenzänderung darf nicht zu schnell erfolgen. Die Platte muß genügend Zeit haben, der Änderung zu folgen.

Es wird von folgenden Werten ausgegangen: auf dem Oszilloskop werden 2048 Punkte in x-Richtung dargestellt; die gesamte Meßzeit beträgt typischerweise 10 s. Somit erfolgt aller 5 ms eine Messung. Wenn in den 10 s eine Frequenzänderung von 20 kHz erfolgt, ändert sich die Anregungsfrequenz in diesen 5 ms um 0,01 kHz. Diese 0,01 kHz = 10 Hz entsprechen etwa einem Zehntel der kleinsten Resonanzbreite.

Bei einer Anregungsfrequenz von 1 kHz erfolgt aller fünf Schwingungen eine Messung, bei 20 kHz alle 100 Schwingungen. Damit ist eine gewisse Wahrscheinlichkeit gegeben, daß bei einer der Messungen gerade der Maximalwert erfaßt wird.

Im Experiment hat sich gezeigt, daß bei geringerer Frequenzänderung keine weiteren Resonanzfrequenzen beobachtet werden.

Mit dem beschriebenen Verfahren wurde folgende Messung aufgezeichnet (Abbildung (III.3)): die Anregungsfrequenz wurde in 10 Sekunden zwischen 0,2 kHz und 23 kHz stetig geändert.

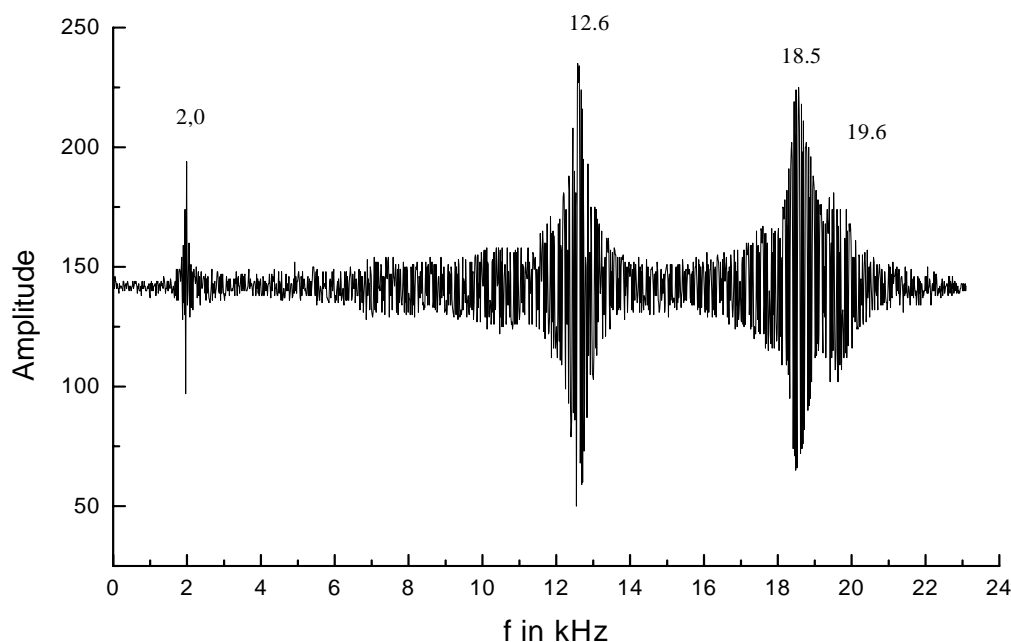


Abb. III.3: Mikrophonesignal der periodisch angeregten Plattenschwingung
Frequenzbereich 0,5 kHz bis 23 kHz

Die Amplitude ist in willkürlichen Einheiten unterteilt und wegen der besseren Sichtbarkeit um 140 Punkte nach oben verschoben. Das maximale Mikrophonesignal liegt im Bereich von 5 V. Dies ist jedoch wesentlich vom eingesetzten Mikrophon und dem Abstand zur Schallquelle (schwingende Platte) abhängig.

Es sind deutlich Resonanzen erkennbar.

Die Resonanzfrequenzen sind in Tabelle (III.1) zusammengefaßt.

| Nr. | Resonanzfrequenz in kHz |
|------------|--------------------------------|
| 1 | $2,0 \pm 0,1$ |
| 2 | $12,6 \pm 0,1$ |
| 3 | $18,5 \pm 0,1$ |
| 4 | $19,6 \pm 0,1$ |

Tabelle III.1: Resonanzfrequenzen, die mit dem ersten Verfahren ermittelt wurden

Die Diskussion der Resonanzfrequenzen folgt nach der Beschreibung des zweiten Meßverfahrens.

Fehlerbetrachtung

Die größte Fehlerquelle in der Bestimmung der Resonanzfrequenz ist die Zuordnung der absoluten Frequenzwerte mittels der sweep-Funktion. Nach der AD- Wandlung ist die lineare sweep-Rampe eine Treppenfunktion. Anfang und Ende der Rampe bildet jeweils ein Plateau endlicher Länge. Der Frequenzanfangs- und Endpunkt liegen jeweils in der Mitte dieser Plateaus. Die gesamte Rampe ist etwa 1800 Punkte lang; die Plateaus jeweils 10 Punkte. Damit berechnet sich der Größtfehler zu 0,1kHz (bzw. 0,3kHz im zweiten Verfahren), wenn die gesamte Rampe einem Frequenzintervall von 20kHz (bzw. 60kHz) entspricht.

1.2. Zweites Verfahren

Die Idee dieses Verfahrens entspricht in den Grundzügen der oben bereits beschriebenen Konzeption. Auch hier wird von einem periodisch angeregtem System ausgegangen. Dieses zeigt im Resonanzfall eine maximale Amplitude und eine Phasenverschiebung zur Erregung von 90° (oder entsprechend $\pi/2$). Das Maximalwerden der Amplitude wurde im ersten Verfahren angewendet. Im hier beschriebenen Vorgehen wird die Phasenverschiebung ausgenutzt. Eine allgemeine Charakteristik des Zusammenhanges von Erregerfrequenz, Eigenfrequenz des Systems, Amplitude und Phasenverschiebung wird in der folgenden Abbildung (III.5) dargestellt.

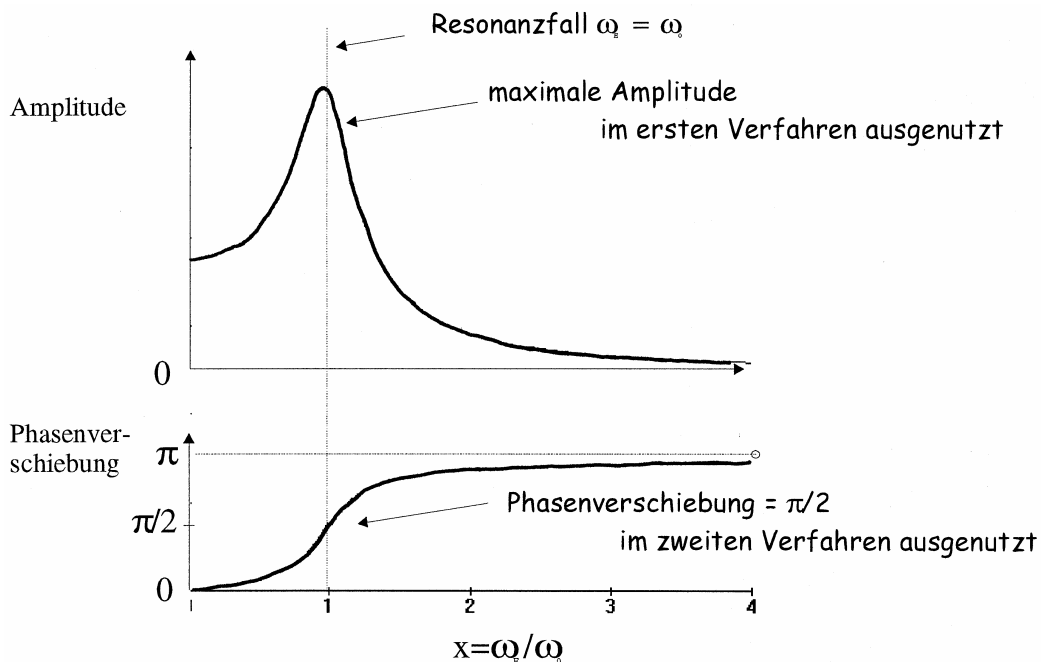


Abb. III.5: Charakteristischer Zusammenhang von Erregerfrequenz ω_E , Amplitude A und Phasenverschiebung α . ω_0 ist die Eigenfrequenz des Systems
Im Resonanzfall ω_{Res} wird das System mit der Eigenfrequenz angeregt $\omega_0 = \omega_E$.
In dem Fall wird die Amplitude maximal, und die Phasenverschiebung beträgt $\pi/2$.

Der Vergleich der Phasen von Anregungssignal und Signal der Plattenschwingung erfolgt mit einem Lock-in-Verstärker⁸.

⁸ Erklärung: Der Lock-in-Verstärker vergleicht ein Meßsignal $f(t)$ mit einem Referenzsignal $g(t + \varphi)$ nach der Gleichung

$$F(\varphi, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) g(t + \varphi) dt \quad \text{mit} \quad g(t + \varphi) = A \begin{cases} \cos(\omega_E t + \varphi_0) \\ \sin(\omega_E t + \varphi_0) \end{cases}$$

τ ist die Integrationszeit

Je nach dem am Lock-in eingestellten φ erhält man das 0° - bzw. das 90° -Signal. Dies ist gerade die Sinus- bzw. Cosinus- Fouriertransformierte des Meßsignals.

Der Lock-in filtert das Rauschen in anderen Frequenzbereichen heraus.

Dazu wird das Signal der Plattenschwingung über einen 1 kΩ-Widerstand abgegriffen. (Vgl. Abbildung (III.7) zum Versuchsaufbau.)

Aus der Messung des 0° und des 90° Signals läßt sich mit Hilfe folgender Gleichung die Amplitude ermitteln:

$$A = \sqrt{S_{\sin}^2 + S_{\cos}^2} \quad (\text{III.1})$$

A ist die Amplitude und S_{\sin} sowie S_{\cos} sind die Amplituden der Sinus- und Cosinus-Transformierten der Schwingung.

Damit sind für jede Resonanzbestimmung drei Meßreihen notwendig: zuerst das 0°-Signal und die sweep-Rampe, dann das 90°-Signal und die sweep-Rampe sowie als drittes das Null-Signal. Dieses wird jeweils bei der Bearbeitung der Meßdaten von dem 0°- und 90°-Signal abgezogen. Die Meßsignale werden über die sweep-Rampen, die parallel zu jeder Messung aufgezeichnet wurden, in Korrelation gebracht.

In der Abbildung (III.6) ist exemplarisch der Zusammenhang dargestellt.

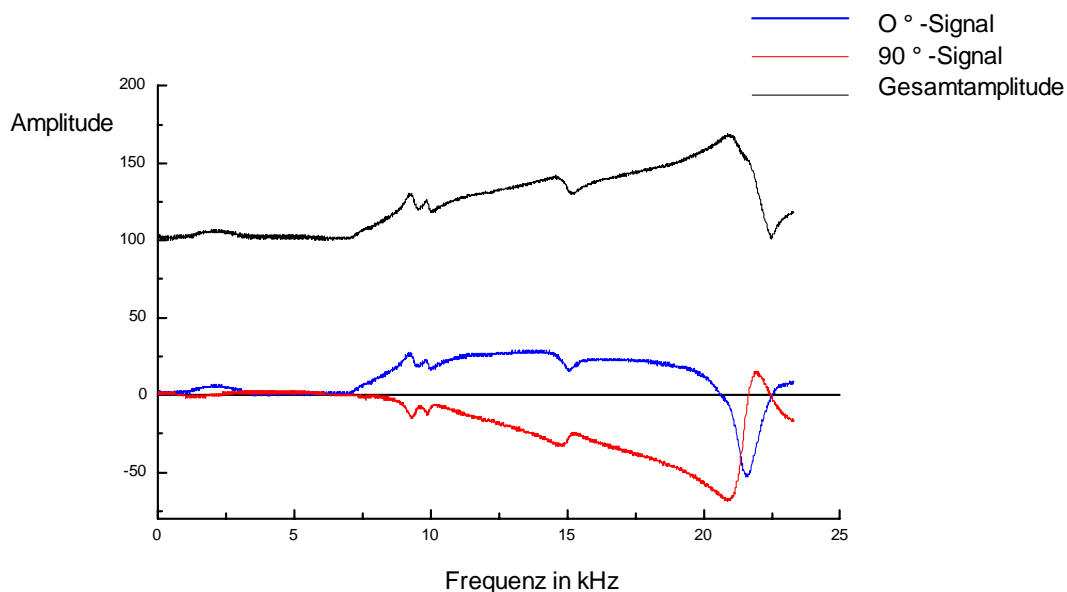


Abb. III.6: Zusammenhang von 0°- und 90°-Signal und Amplitude

Die dargestellten 0°- und 90°-Signale sind um das Null-Signal korrigiert, indem dieses jeweils von den gemessenen Signalen abgezogen wurde. Die zwei zugehörigen sweep-Rampen sind der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet.

Die Gesamtamplitude wurde mittels Gleichung (III.1) aus dem 0°- und 90°-Signal berechnet. Sie wurde in dieser Darstellung zur besseren Sichtbarkeit um 100 Punkte nach oben verschoben.

Die Ordinaten sämtlicher Diagramme sind in willkürlichen Einheiten geteilt. Dies ist angebracht, da die absoluten Amplituden des Mikrophonsignals im wesentlichen von der Bauart des Mikrophons und dem Abstand zur schallabstrahlenden Platte bestimmt werden. Die maximalen Amplituden liegen in diesem Experiment bei etwa 5 V. Wichtig sind allein die relativen Änderungen.

Bei der Messung mittels des Lock-in-Verstärkers sind die absoluten Amplituden abhängig von der Eingangsspannung, die von der Erregerspannung bestimmt wird und im hiesigen Fall etwa 4 V bis 5 V beträgt. Die Ausgangsspannung des lock-in-Verstärkers die als Meßsignal dient liegt im Maximum bei ebenfalls 4 V.

Auch im Versuch, dessen Aufbau in Abbildung (III.7) wiedergegeben ist, erfolgt eine sinusförmige Anregung mit einer Spannung von 4 V bis 5 V. Der auswertbare Frequenzbereich ist jedoch wesentlich größer als im ersten Verfahren, da er nicht durch die obere Frequenzgrenze des Mikrophons begrenzt wird. Es wurden mittels der Lock-in-Methode Messungen im Bereich 1 kHz bis 160 kHz durchgeführt. Das so erhaltene Signal konnte im unteren Frequenzbereich mit dem Mikrophonsignal verglichen werden und zeigte hinsichtlich der Lage der Resonanzen gute Übereinstimmung. Die bewährte Methode, einen Frequenzbereich in einer bestimmten Zeit mittels der sweep-Funktion des Frequenzgenerators zu durchfahren, wurde auch hier angewandt. Unter Berücksichtigung der oben durchgeführten Abschätzungen zu sweep-Funktion mußten mehrere Messungen durchgeführt werden, um den gesamten Bereich von 1 kHz bis 160 kHz abzudecken.

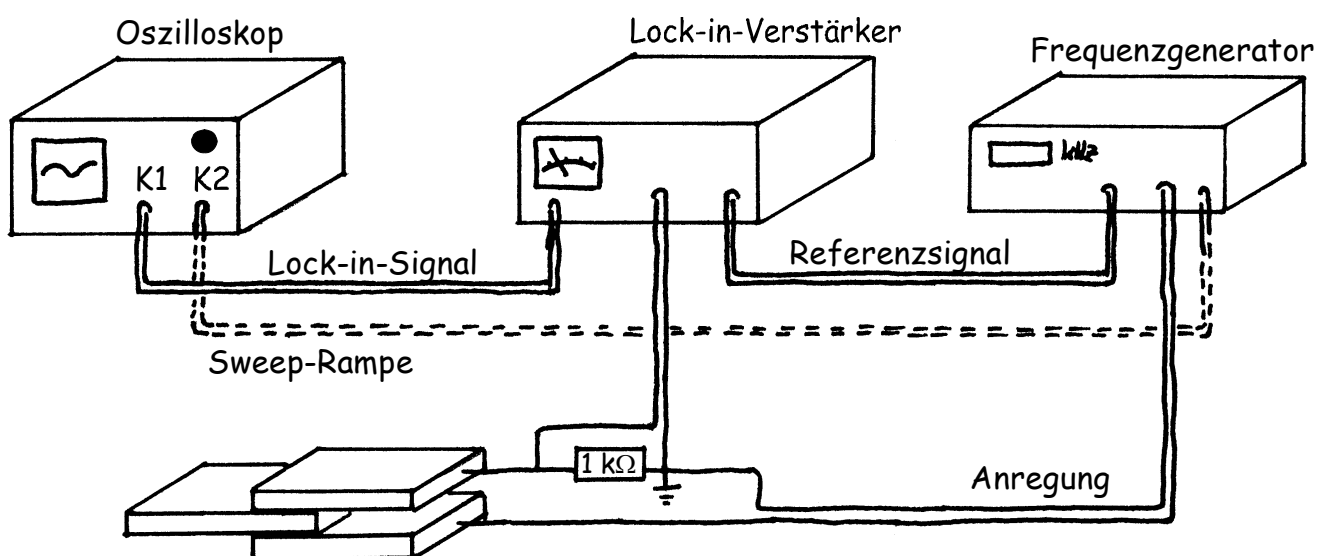


Abb. III.7: Versuchsaufbau für das zweite Verfahren

In Abbildung (II.8) sind zwei Meßkurven wiedergeben, die mit dem zweiten Verfahren aufgezeichnet wurden. Sie umfassen einen Frequenzbereich von 60 kHz bzw. 90 kHz. Diese Frequenzbereiche sind sehr groß in Anbetracht der Abschätzungen zur Intervalllänge der sweep-Funktion und der Resonanzbreite. Zur übersichtlicheren Darstellung habe ich diese zwei Darstellungen mehreren Diagrammen vorgezogen. In den Einzelmessungen mit kürzeren Frequenzintervallen konnte bestätigt werden, daß es keine weiteren Resonanzen gibt.

In den Abbildungen (III.8 a und b) sind nur die Amplituden dargestellt. Sie sind mit der oben angegeben Gleichung (III.1) aus den Meßkurven berechnet.

Die Meßzeit betrug jeweils 10 s, die Integrationszeit des Lock-in-Verstärkers 30 ms und die Empfindlichkeit 10 mV.

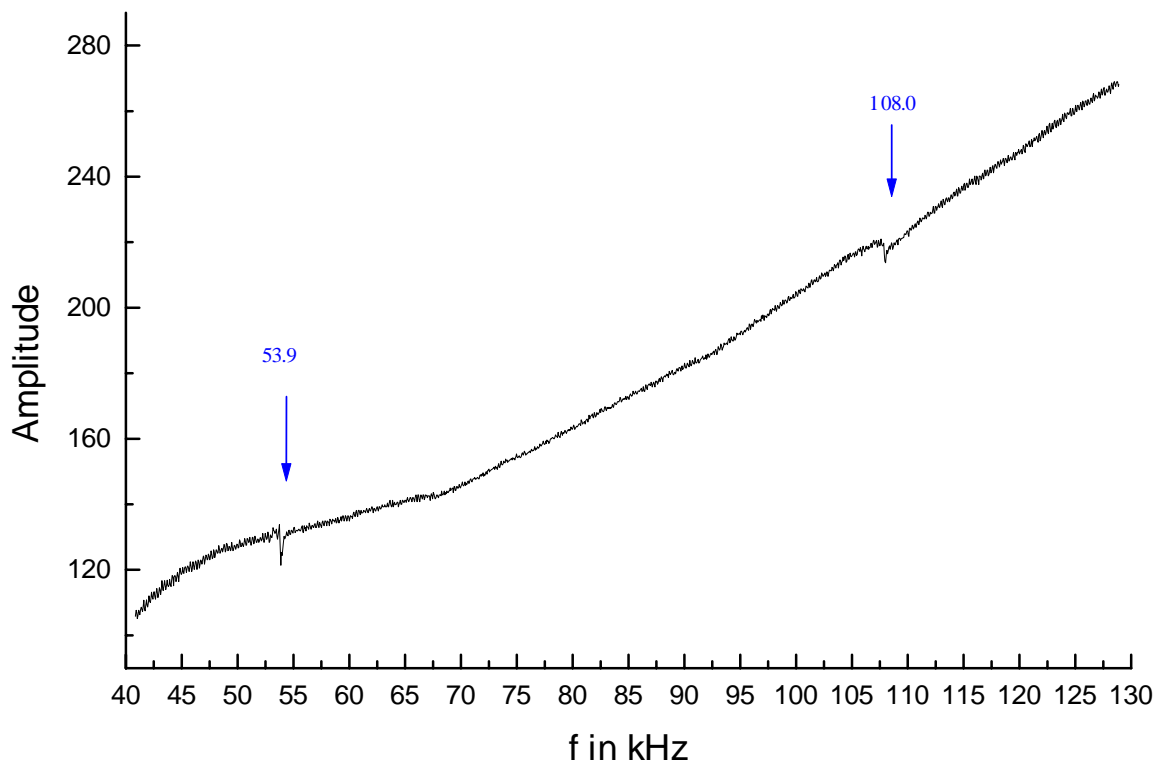
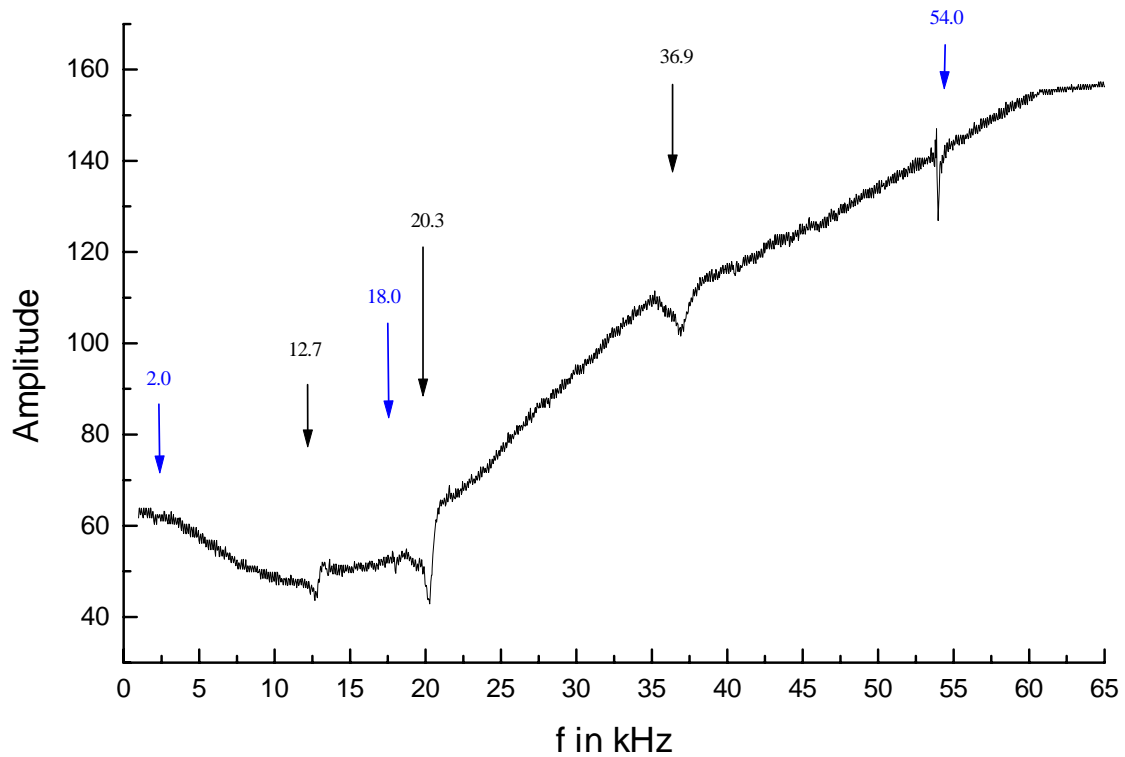


Abb. III.8 Aus der 0° und 90° Amplitude berechnetes Signal einer einseitig eingespannten, periodisch erregten Piezoplatte
 a: Frequenzbereich: 1 kHz ... 66 kHz
 b: Frequenzbereich: 40 kHz ... 130 kHz
 Meßzeit 10 s, Integrationszeit 30 ms Empfindlichkeit: 10 mV

Es sind wiederum deutlich Resonanzen erkennbar. Sie sind in Tabelle (III.2) aufgelistet. Zum Vergleich sind ebenfalls die mit dem ersten Verfahren bestimmten Resonanzfrequenzen angegeben.

| Nr. | Resonanzfrequenz in kHz (1. Verfahren) | Resonanzfrequenz in kHz (2. Verfahren) |
|-----|---|---|
| 1 | $2,0 \pm 0,1$ | $2,0 \pm 0,3$ |
| 2 | $12,6 \pm 0,1$ | $12,7 \pm 0,3$ |
| 3 | $18,5 \pm 0,1$ | $18,0 \pm 0,3$ |
| 4 | $19,6 \pm 0,1$ | $20,3 \pm 0,3$ |
| 5 | | $36,9 \pm 0,3$ |
| 6 | | $53,9 \pm 0,3$ bzw $54,0 \pm 0,3$ |
| 7 | | $108,0 \pm 0,3$ |

Tab. III.2. Vergleich der Resonanzfrequenzen, die mit dem ersten und zweiten Verfahren ermittelt wurden. Die Resonanzfrequenzen aus dem ersten Verfahrens sind Tabelle III.1. entnommen.

Im unteren Frequenzbereich bis 20 kHz erkennt man eine gute Übereinstimmung der Frequenzen, die mit dem ersten und zweiten Verfahren bestimmt wurden. Oberhalb von 130 kHz konnten keine weiteren Resonanzen beobachtet werden.

Einige aus der Rechnung in Abschnitt II.2. vorausgesagten Eigenschwingungen der Platte lassen sich gut im Diagramm (III.8) wiederfinden. Ihnen können entsprechende k - und l -Werte zugeordnet werden. Im wesentlichen handelt es sich dabei um Schwingungen zum Parameterwert $l=0$. In der folgenden Tabelle (III.3) sind diese berechneten und gemessenen Werte gegenübergestellt. Dabei zeigt sich vor allem bei kleinen k -Werten ein hohes Maß an Übereinstimmung.

| k ($l=0$) | Frequenz in kHz (berechnet) | Frequenz in kHz (mit 1. Verfahren gemessen) | Frequenz in kHz (mit 2. Verfahren gemessen) |
|------------------|--------------------------------|--|--|
| 1 | 2,00 | $2,0 \pm 0,1$ | $2,0 \pm 0,3$ |
| 2 | 18,01 | $18,5 \pm 0,1$ | $18,0 \pm 0,3$ |
| 3 | 50,03 | | $54,0 \pm 0,3$ |
| 4 | 98,07 | | $108,0 \pm 0,3$ |

Tabelle III.3: Vergleich von berechneten und gemessenen Eigenfrequenzen.
Die berechneten Eigenfrequenzen sind von Tabelle (II.3) übernommen.
Die gemessenen Eigenfrequenzen stammen aus den abgebildeten Meßreihen (III.3) und (III.8)

Die zunehmenden Differenzen zwischen berechneten und gemessenen Eigenschwingungen bei wachsenden k -Werten sind mit einem stetig wachsenden Einfluß der Platteneinspannung zu erklären. Mit steigenden k -Werten krümmt sich die Platte zunehmend nahe der

Einspannung. (Vgl. dazu Abbildung II.8) Damit gewinnt die Einspannung zunehmend größeren Einfluß auf die Resonanzfrequenzen. In der Rechnung wurde die Einspannung als ideal „fest“ angenommen. Im Experiment läßt sich dies nur unzureichend und näherungsweise realisieren. So findet mit wachsenden k -Werten auch eine Schwingung im Bereich der Einspannung selbst statt. Dies ist die Ursache für die zunehmenden Differenzen zwischen Theorie und Messung.

In den Meßkurven, die mit dem zweiten Verfahren aufgezeichnet wurden (siehe dazu Abb. (III.8)), besitzen diese Resonanzen eine geringere Breite als die restlichen. Ein Erklärungsansatz dafür folgt weiter unten.

Die Resonanz bei $\nu = 12,7\text{kHz}$ ist eine Querschwingung der Platte, d.h. sie gehört zu einem Parameterwert $l \neq 0$. Dies ergibt sich aus einer Untersuchung in der die Einspannungshärte der Platte verändert wurde. Bei strafferer Einspannung der Platte werden Querschwingungen stärker behindert und damit wird die Amplitude der Querresonanz kleiner bzw. die Resonanz verschwindet gänzlich.

Die folgende Abbildung (III.9) zeigt das Mikrophonsignal bei normaler und straffer Einspannung. Im zweiten Fall fehlt die Resonanz bei 12,7kHz.

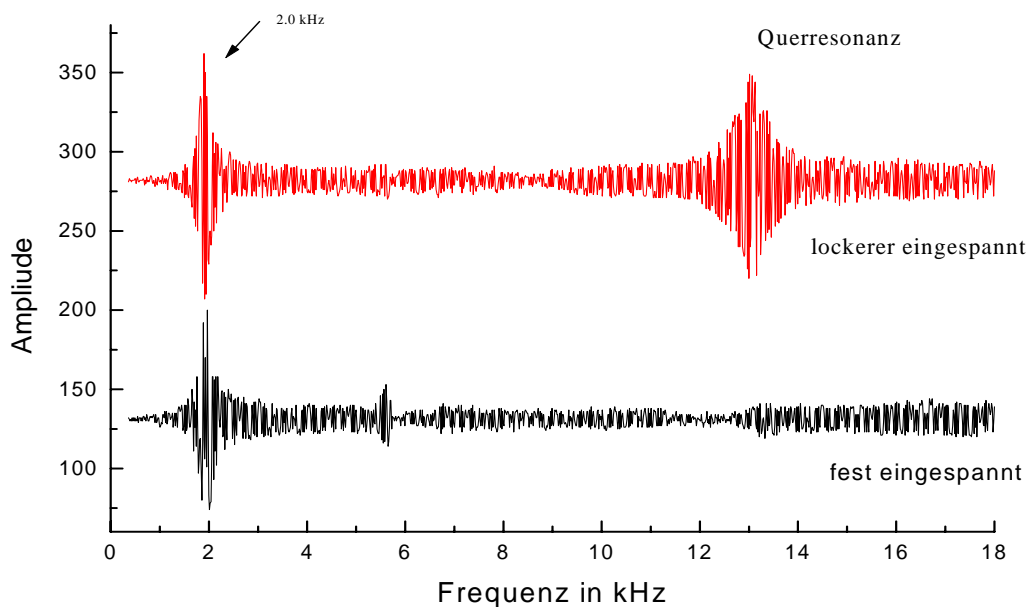


Abb. III.9: Nachweis eine Querschwingung

Die Messung erfolgte mittels des ersten Verfahrens, dabei ist die Platte einmal fest und einmal lockerer eingespannt.

Nur im zweiten Fall wird eine Resonanz bei 12,7 kHz gemessen.

Eine Zuordnung von Parametern k und l zu der Resonanzfrequenz $\nu = 12,7\text{kHz}$ ist nicht eindeutig möglich. Hierbei gilt es wieder zu beachten, daß die Berechnungen für eine ideal feste Einspannung bei $x=0$ durchgeführt wurden. Diese äußere Bedingung kann im Experiment nicht realisiert, nur mehr oder minder gut angenähert, werden.

Möglich wäre ein theoretischer Ansatz, bei dem nicht von fester Einspannung sondern von einer Einbettung ausgegangen wird. Dazu ist jedoch keine geschlossene Theorie bekannt. Zudem müßte die Bettungsziffer, ein Maß für die Einspannungshärte, experimentell bestimmt werden. Dies ist mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln nicht möglich.

Es fällt zudem auf, daß alle Resonanzen, denen keine Eigenschwingung mit $l=0$ zugeordnet werden kann, eine größere Resonanzbreite aufweisen als diejenigen mit Parameter $l=0$. Dies erklärt sich dadurch, daß bei den Querschwingungen ($l \neq 0$) mehr Energie in die Einspannung der Platte abgegeben wird, d.h. daß die Dämpfung der Querschwingung größer ist.

2. Freie Plattenschwingung (Drittes Verfahren)

Hier wird im Gegensatz zu den bisher angewandten Verfahren ein frei schwingendes System betrachtet. Die Anregung erfolgt mittels Rechteckpuls. Danach schwingt die Platte frei. Der Abstand zweier Pulse ist so groß, daß die Schwingung bis zur erneuten Anregung abgeklungen ist. Die Fourieranalyse eines solchen Pulses ist in Abbildung (III.10) wiedergegeben. Gut sichtbar ist das breite Frequenzspektrum des Pulses und damit der Anregung.

Ein schwingungsfähiges System nimmt hauptsächlich auf seinen Eigenfrequenzen Energie auf. Auf diesen Frequenzen schwingt das System nach Ende der Anregung. Die Oszillation kommt wegen des Energieverlustes durch Schallabstrahlung und Reibung im Inneren der Platte schnell zur Ruhe. Die Fourieranalyse dieser (abklingenden) Schwingung führt auf die Resonanzfrequenzen.

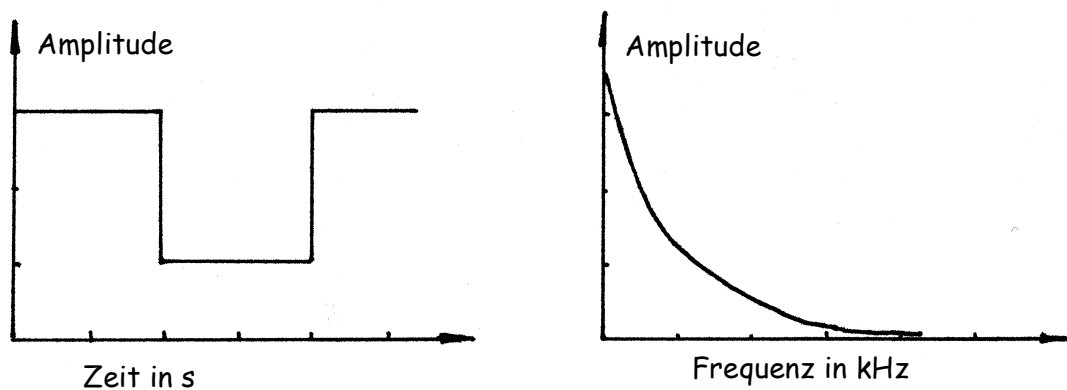


Abb. III.10: Rechteckpuls und dessen Fourierspektrum

Zu beachten ist das breite Frequenzspektrum des Pulses. Dieses wird im Experiment zur Anregung der Plattenschwingungen benutzt.

Der Versuchsaufbau entspricht dem vom ersten Verfahren. Siehe dazu Abbildung (III.1). Im Unterschied dazu erfolgte hier jedoch die Anregung mit Rechteck-Pulsen. Die Messung wurde jede Sekunde wiederholt. Die Anregungsspannung betrug 6 V.

Die drei folgenden Abbildungen (III.11) zeigen das Mikrophonesignal der Plattenschwingung bei gleichen äußeren Bedingungen. Die Meßzeiten betragen 10 ms, 5 ms, 2 ms. Rechts daneben ist jeweilige die Fourieranalyse der Schwingung dargestellt.

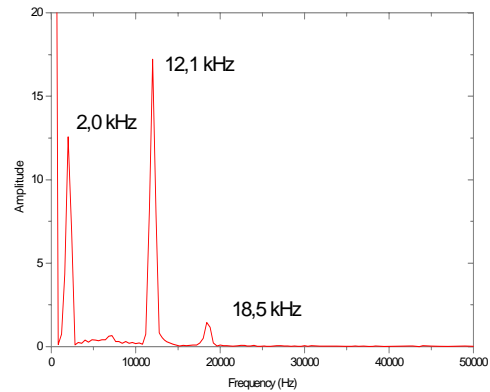
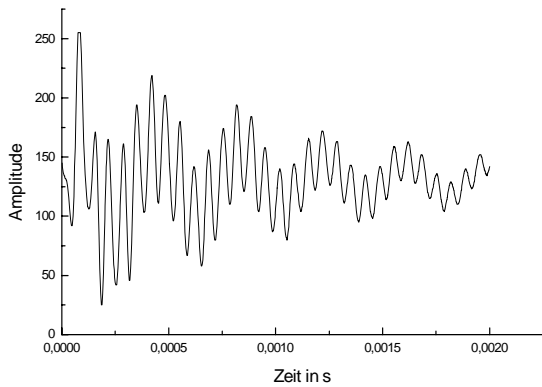
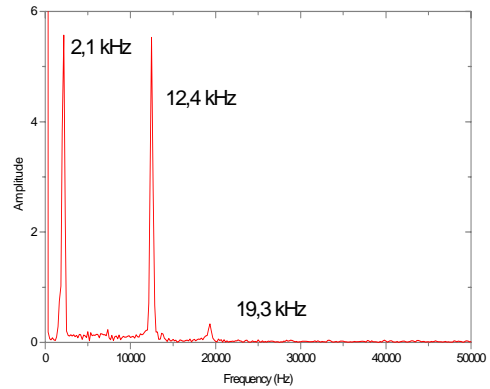
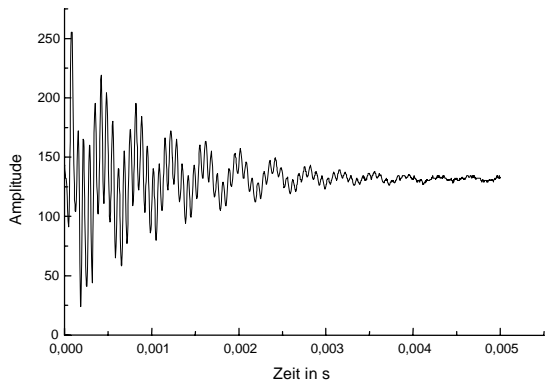
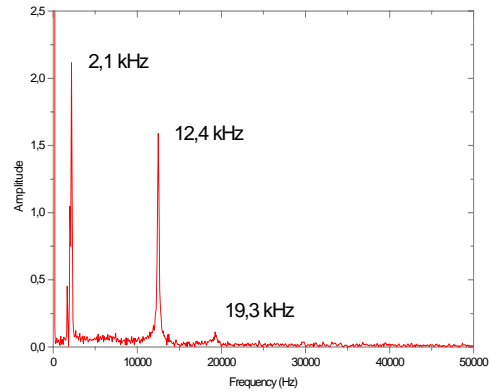
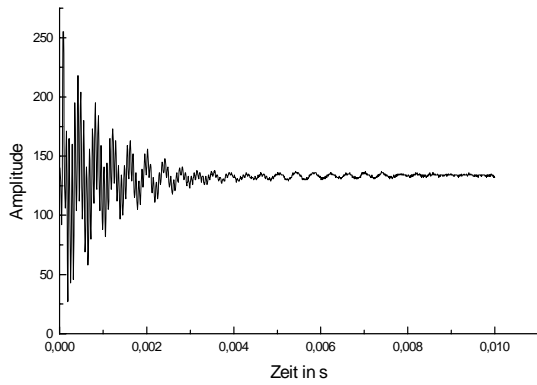


Abb. III.11: Mikrophonsignal und Fourieranalyse von freien Plattenschwingungen
 a) Nachschwingzeit $t = 10$ ms
 b) Nachschwingzeit $t = 5$ ms
 c) Nachschwingzeit $t = 2$ ms

Im Fourierspektrum sind deutlich Peaks erkennbar. Das sind diejenigen Frequenzen des Spektrums, auf denen die Platte hauptsächlich schwingt. Nach der Schwingungstheorie sind dies gerade die Eigenfrequenzen des Systems.

An dieser Stelle soll an die mit den anderen zwei Verfahren bestimmten Eigenfrequenzen erinnert werden. Dazu werden Tabelle (III.2) und Tabelle (III.3) angeführt, die um die hier im dritten Verfahren beobachteten Frequenzen erweitert ist. (Tabelle (III.4))

| Nr | k l | Resonanzfrequenz in kHz | | Resonanzfrequenz in kHz (3. Verfahren) | | |
|----|------------|-------------------------|----------------|---|--------------|---------------|
| | | (1. Verfahren) | (2. Verfahren) | (t=10ms) | (t=5ms) | (t=2ms) |
| 1 | 1 0 | 2,0 ± 0,1 | 2,0 ± 0,3 | 2,1 ± 0,05 | 2,1 ± 0,1 | 2,0 ± 0,25 |
| 2 | | 12,6 ± 0,1 | 12,7 ± 0,3 | 12,4 ± 0,05 | 12,4 ± 0,1 | 12,1 ± 0,25 |
| 3 | 2 0 | 18,5 ± 0,1 | 18,0 ± 0,3 | 19,3 ± 0,05 * | 19,3 ± 0,1 * | 18,5 ± 0,25 * |
| 4 | | 19,6 ± 0,1 | 20,3 ± 0,3 | | | |
| 5 | | | 36,9 ± 0,3 | | | |
| 6 | 3 0 | | 54,0 ± 0,3 | | | |
| 7 | 4 0 | | 108,0 ± 0,3 | | | |

Tab. III.4: Zusammenfassung der mit verschiedenen Verfahren experimentell bestimmten Resonanzfrequenzen
Die Frequenzen aus dem dritten Verfahren sind aus Abbildung (III.11) entnommen.
Die Werte für das erste und zweite Verfahren sind aus Tabelle (III.2) kopiert. Die Parameterwerte stammen aus Tabelle (III.3).

*) Die Zuordnung zu den (2 0) Modus ist nicht gesichert.

Die freie Plattenschwingung enthält neben der Grundfrequenz ($k=1, l=0$) mit $\nu=2,1$ kHz im wesentlichen zwei weiteren Frequenzen: $\nu=12,4$ kHz und $\nu=19,3$ kHz.

Die Frequenzen $\nu=2,1$ kHz und $\nu=12,4$ kHz lassen sich leicht zuordnen. Sie stimmen gut mit den bereits bestimmten Resonanzfrequenzen überein. Diese Übereinstimmung war auch von der Theorie her zu erwarten. Die Zuordnung im Fall $\nu=19,3$ kHz ist deshalb schwierig, da zwei Resonanzfrequenzen dicht beieinander liegen.

3. Diskussion der Ergebnisse

Erstes Ziel der Experimente war, die Resonanzfrequenzen der Bimorph-Piezoplaten zu bestimmen. Dies wurde nach theoretischen Vorbetrachtungen in drei verschiedenen Verfahren realisiert. Aus den Vorbetrachtungen ließen sich Eigenfrequenzen der Platte voraussagen. Hier sind nocheinmal die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen zusammen gefaßt:

1. Es zeigte sich für alle drei Verfahren eine gute Übereinstimmung der Resonanzfrequenzen mit den prognostizierten Eigenfrequenzen zum Parameterwert $l=0$. Dies sind gerade die Längsschwingungen der Platte ohne Torsion.

Für wachsende l -Werte wächst auch die Abweichung zwischen theoretisch vorhergesagten und experimentell gemessenen Frequenzen, da bei diesen Schwingungen die Einspannung der Platte zunehmend an Einfluß gewinnt.

Die Einspannung wurde in der Theorie als einseitig ideal „fest“ angenommen. Im Experiment läßt sich eine „feste“ Einspannung jedoch nur näherungsweise realisieren. Eine bessere Modellierung der praktischen Gegebenheiten ist, die Einspannung als Einbettung zu betrachten. Dazu liegt jedoch keine geschlossene Theorie vor. Zudem müßte der Bettungsparameter, ein Maß für die Härte der Einspannung, bestimmt werden.

2. Es konnten ebenfalls Querschwingungen der Platte gemessen und als solche nachgewiesen werden. Hier konnte jedoch keine Zuordnung zu Parameterwerten k und l erfolgen. Auch hier gilt es, den Einfluß der Einspannung auf das Schwingungsverhalten zu beachten. Gerade bei Querschwingungen spielt dies eine große Rolle, da mehr Energie in die Einspannung abgegeben wird.

3. Die freie Schwingung der Platte erfolgt vornehmlich auf der Grundfrequenz und auf zwei weiteren Eigenfrequenzen.

Zweites Ziel der Arbeit war es, den Schwingungsmodus der Bimorph-Platten in den Ventilen mit schnellen Öffnungs- und Schließzeiten zu bestimmen. Nach den durchgeführten Messungen ist anzunehmen, daß das Ventil im 2-0-Modus arbeitet. Diesem entspricht eine Eigenfrequenz von $\nu_{20}=18,0$ kHz. Diese Eigenfrequenz ist jedoch abhängig davon, wie weit und wie fest die Platte im Ventil eingespannt ist. Zudem gilt es zu bedenken, daß auf den Platten, die in den Ventilen eingebaut sind, noch eine Gummidichtung befestigt ist. Diese beeinflußt ebenfalls das Schwingungsverhalten und die Resonanzfrequenzen.

Damit ist das Schwingungsverhalten für kleine Amplituden in den Grundzügen verstanden. So daß im weiteren Plattenschwingungen mit großen Amplituden und entsprechend neuen Verhaltensmustern im Blickpunkt sehen.

IV. Chaotische Plattenschwingungen

Bis zu diesem Zeitpunkt stand das *lineare* Schwingungsverhalten der Platte, insbesondere die Bestimmung der Resonanzfrequenzen, im Mittelpunkt der Betrachtungen. Bei der theoretischen Beschreibung der Plattenschwingung wurde von folgender Schwingungsgleichung ausgegangen: (II.33)

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho A \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0$$

Darin treten nur *lineare* Abhängigkeiten von der Auslenkungsfunktion $w(x, t)$ auf. Die Lösungen von II.33 besitzen eine harmonische Zeitabhängigkeit. Diese Modellierung hat sich für *kleine* Amplituden als hinreichend gut erwiesen. Das belegen die Übereinstimmungen der theoretisch vorhergesagten und experimentell bestimmten Resonanzfrequenzen. Gerade darin bestand der Erfolg des ersten Teils dieser Arbeit.

Bei starken Anregungen und daraus resultierenden *großen* Auslenkungen zeigen sich im Gegensatz zum harmonischen Zeitverhalten nunmehr andere Verhaltensmuster. Dafür sind Rückkopplungen während der Schwingung verantwortlich. Zu deren Beschreibung müssen im Modell der Schwingungsgleichung *nichtlineare* Terme berücksichtigt werden.

Im Mittelpunkt des vierten und fünften Kapitels sollen derartige Plattenschwingungen stehen. Diese Plattenschwingungen werden im folgenden oft als chaotisch bezeichnet. Dabei muß von vorn herein gesagt werden, daß es noch keine einheitliche Definition für chaotisches Verhalten gibt. Grundlegend gilt, daß das hier betrachtete Chaos durch rein zufällige Schwankungen gekennzeichnet ist, obwohl die Gesetzmäßigkeiten, die die Dynamik beschreiben, deterministisch sind. Dementsprechend wird dieses chaotische Verhalten als deterministisches Chaos bezeichnet.

Bei dem Übergang von „kleinen“ zu „großen“ Amplituden wechselt das Verhalten des Systems von Ordnung, gekennzeichnet durch eine harmonische Zeitabhängigkeit, ins Chaos. Einen Weg diesen Übergang zu verstehen wird anschließend dargestellt. Im Anschluß daran werden mehrere nichtlineare Modellierungen diskutiert. Im fünften Kapitel folgen dann die experimentelle Ergebnisse der schwingenden Piezoplatte.

1. Periodenverdopplung in nichtlinearen Systemen

Es gibt verschiedene Ansätze den Übergang eines geordneten Systems ins Chaos zu beschreiben. Hier soll einer dieser Wege vorgestellt werden. Dabei sind die an dieser Stelle auftretenden Verhaltensmuster quasi die Meilensteine auf dem Weg von der Ordnung ins Chaos. Viele chaotische Systeme, darunter auch die untersuchten Plattenschwingungen, zeigen diese Charakteristika. Es handelt sich dabei um stabiles, periodisches und chaotisches Verhalten.

Einen Überblick über das Auftreten dieser Verhaltensmuster bietet das Bifukationsdiagramm (auch Endzustandsdiagramm). Es zeigt die Endzustände der zeitlichen Entwicklungen in Abhängigkeit von einem Kontrollparameter. Ein solches Diagramm ist in Abbildung IV.1. dargestellt. Anschließend werden die einzelnen Bereiche anhand der logistischen Abbildung erklärt.

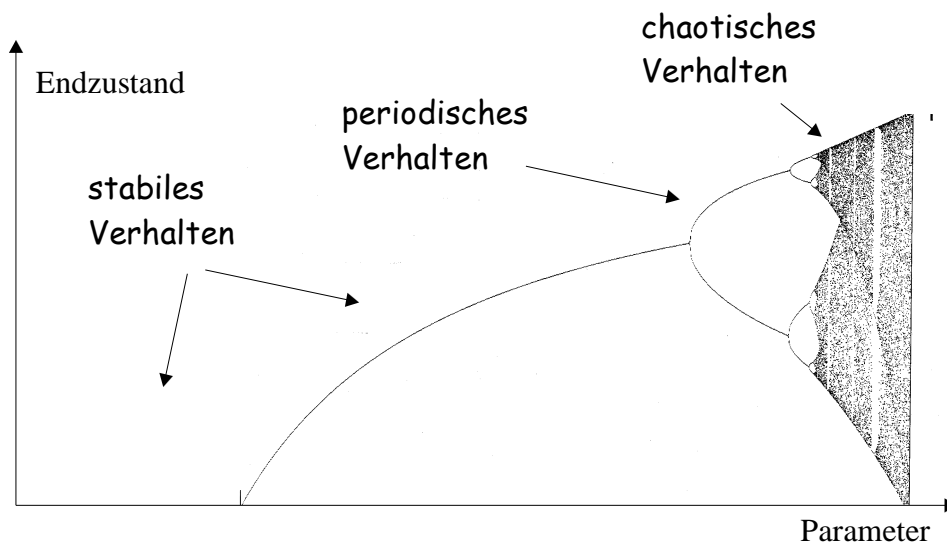


Abb. IV.1. Bifukationsdiagramm eines allgemeinen nichtlinearen Systems

1.1. Die logistische Abbildung

Die logistische Gleichung ist eine spezielle nichtlineare und diskrete Abbildung. Trotz ihrer Einfachheit und der großen Abstraktion von realen physikalischen Vorgängen zeigt sie die oben genannten Verhaltenstypen. Gerade wegen ihrer Einfachheit läßt sich der Weg ins Chaos daran besonders gut nachvollziehen.

Die logistische Gleichung wurde 1844 von VERHULST eingeführt und in den siebziger Jahren unseres Jahrhunderts von dem Biologen Robert M. MAY wiederentdeckt. Er beschrieb damit die Dynamik einer Population von Beutetieren. Aus physikalischer Sicht ist sie ein Modell für

einen stark gedämpften getriebenen Rotator. Dies ist ausführlicher beschrieben in [Sch 94].

Die Gleichung lautet:

$$x_{i+1} = ax_i(1 - x_i) \quad \text{mit } a \in [0,4] \quad (\text{IV.1})$$

Gut sichtbar ist die Rückkopplung $x_{i+1} = f(x_i)$, die für das nichtlineare Verhalten verantwortlich ist. Der nachfolgende Zustand ist abhängig vom vorausgehenden. Darin wird ein zunehmendes i mit einem diskreten Fortschreiten der Zeit identifiziert.

Im weiteren wird unabhängig vom Anwendungshintergrund nur das Langzeitverhalten ($i \rightarrow \infty$) in Abhängigkeit vom Kontrollparameter a untersucht. Denn im Bifukationsdiagramm sind gerade die Endzustände des zeitlichen Ablaufs zusammengefaßt. Prinzipiell kann der Kontrollparameter a aus dem Intervall $[0,4]$ gewählt werden.

Der erste Verhaltenstyp zeigt sich für kleine Parameter a mit $a \in [0,1]$. Beispielhaft sind die Entwicklungen für Parameterwerte $a= 0,5$ bzw. $a= 0,8$ in Abbildung (IV.2) wiedergegeben. In den Diagrammen sind die Funktionswerte x_i über den Iterationsschritten i für die ersten 15 Durchläufe aufgetragen.

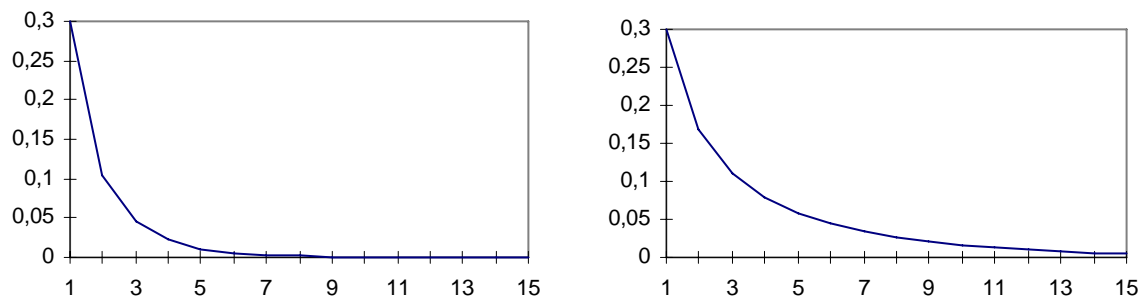


Abb. IV.2: Die logistische Gleichung strebt gegen den Endwert 0 für die Parameter

a) $a= 0,5$ b) $a= 0,8$

Startwert $x_0= 0,3$ Iterationen $n= 15$

(Rechnungen und Grafiken wurden mit einem Tabellenkalkulationsprogramm ausgeführt bzw. erstellt. Die Parameter a sowie die Startwerte x_0 für die Gleichung IV.1 sind jeweils in den Bildunterschriften angeben.)

Die x_i -Werte streben sehr schnell gegen den Endzustand Null. Dieses Verhalten ist für alle Kontrollparameter $0 \leq a \leq 1$ unabhängig vom Startwert x_0 zu beobachten.

Die mathematische Erklärung ist in den zwei Fixpunkten $x_{F1} = 0$ und $x_{F2} = 1 - 1/a$ der Parabel $x_i \rightarrow ax_i(1 - x_i)$ zu suchen. Im Intervall $a \in [0,1]$ ist der Fixpunkt x_{F1} attraktiv.

Ab $a = 1$ wird der Fixpunkt x_{F2} attraktiv. In (IV.3) sind die zeitlichen Verläufe für zwei Parameter aus dem Bereich $a \in [1,3]$ abgebildet.

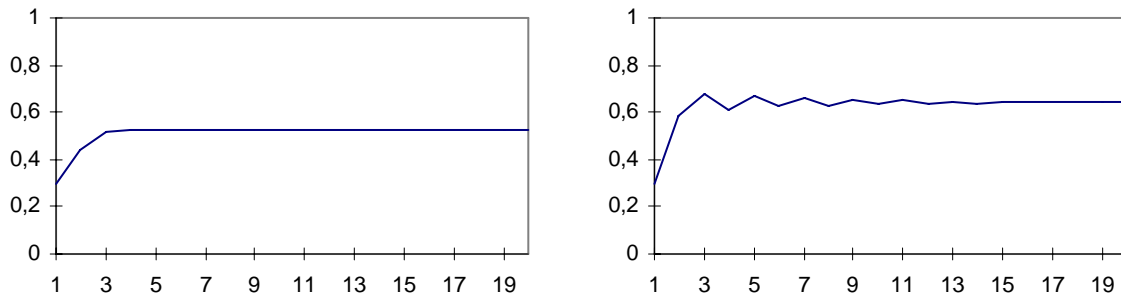


Abb. IV.3: Die logistische Gleichung zeigt stabiles Verhalten für die Parameter

a) $a = 2,1$ b) $a = 2,8$
 Startwert $x_0 = 0,3$ Iterationen $n = 20$

Die iterierten Werte x_i streben zu dem Fixpunkt x_{F2} . Der Fixpunkt ist nur vom Parameter a jedoch nicht vom Startwert x_0 abhängig. Im Bifukationsdiagramm am Anfang des Kapitels ist dieser Fixpunkt, der dementsprechend den Endwert darstellt, über dem zugehörigen Parameter aufgetragen. Es ergibt sich eine ansteigende Kurve.

Damit ist der erste Verhaltenstyp beschrieben. Er tritt für Parameterwerte aus dem Intervall $a \in [0,1] \cup [1,3]$ auf und mündet in einem **stabilen Endzustand**. Dies entspricht einem einzigen Ast im Bifukationsdiagramm.

Ab $a = 3$ wird auch x_{F2} instabil. Es setzt eine abrupte qualitative Veränderung in Form einer Verzweigung ein. Ein neuer Verhaltenstyp erscheint: **Periodizität**. Die Punktfolge oszilliert zwischen zwei Werten, die jeder für sich als Attraktor wirken. Ein Zwei-Zyklus ist entstanden. Dieses Verhalten ist in Bild (IV.4) veranschaulicht.

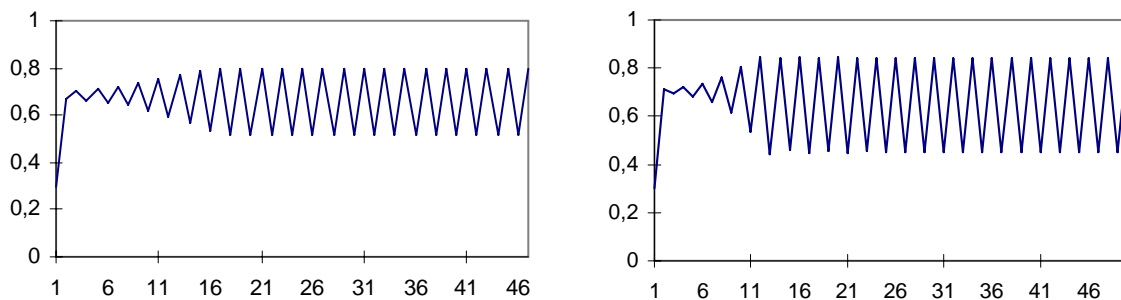


Abb. IV.4: Die logistische Gleichung zeigt periodisches Langzeitverhalten für die Parameter

a) $a = 3,2$ b) $a = 3,4$
 Startwert $x_0 = 0,3$ Iterationen $n = 50$

Im Bifukationsdiagramm werden die zwei Endwerte über dem Parameter a aufgetragen. Der vormals einzige Ast hat sich aufgespalten.

Bei dem Kontrollparameter $a = 1 + \sqrt{6} \approx 3,449$ findet eine erneute Verzweigung der zwei Attraktoren statt. Wieder tritt eine Periodenverdopplung ein, d.h. ein Zyklus mit Periode Vier entsteht. Als Beispiel dafür ist im Bild (IV.4 a) des Verhalten für $a = 3,511687$ gezeigt.

Mit wachsendem a setzen immer neue Periodenverdopplungen in immer kürzeren Abständen ein. Auf den Vierer-Zyklus folgt der Achter- (Abb. IV.4 b) und 16er-Zyklus. In immer kürzerer Abfolge treten neue 2^n -Zyklen auf.

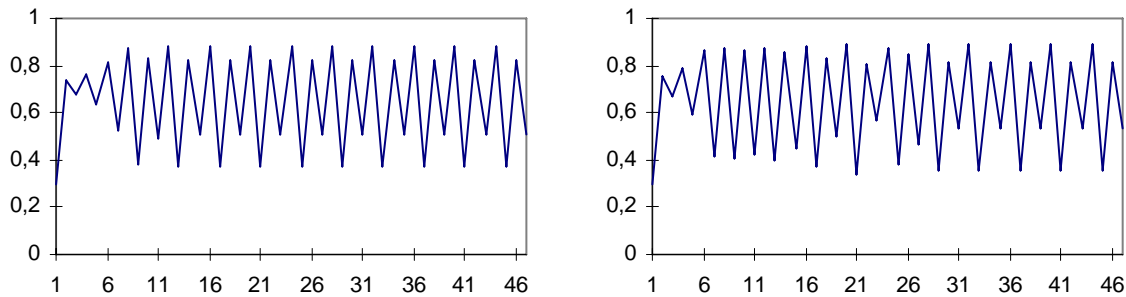


Abb. IV.4: Oszillation mit Periode a) vier und b) acht
a) $a = 3,511687$ b) $a = 3,574940$
Startwert $x_0 = 0,3$ Iterationen $n = 15$

Die Folge der $\{a_n\}$ -Werte, für die eine derartige Verzweigung und damit verbunden eine Periodenverdopplung einsetzt, strebt gegen einen Wert a_∞ . Dieser Wert wurde 1977 von GROBMAN und THOMAE berechnet. Es ist die irrationale Zahl $a_\infty = 3,5699456$.

Für $a > a_\infty$ zeigt sich irreguläres d.h. **chaotisches Verhalten**. Die Folgezustände x_{i+1} sind nicht mehr mit ihren Ausgangszuständen x_i korreliert. Die Zustände x_i sind über den gesamten Bereich $[0,1]$ verteilt.

Das chaotische Verhalten wird jedoch immer wieder von Bereichen regulären Verhaltens, sogenannten periodischen Fenstern, unterbrochen. Hier findet man beispielsweise Perioden der Länge drei. Siehe dazu Abbildung (IV.6b).

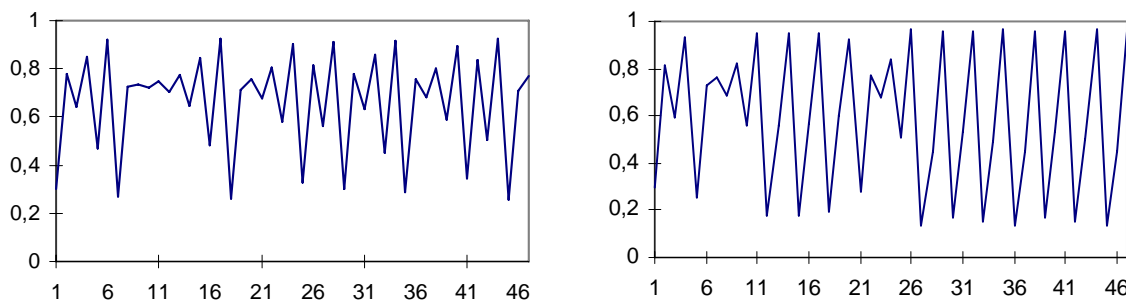


Abb. IV.6: a) chaotisches Verhalten bei dem Parameter $a = 3,7$
b) Periodisches Fenster mit Periode 3 für den Parameter $a = 3,855783$
Startwert $x_0 = 0,3$ Iterationen $n = 50$

Das Bifukationsdiagramm ist eine Möglichkeit, die oben im Einzelnen aufgezeigten Verhaltensmuster übersichtlich darzustellen. Auf der Abszisse sind die wachsenden a Werte und auf der Ordinate das Langzeitverhalten der logistischen Abbildung aufgetragen. Die Möglichkeit dieser geordneten Darstellung hat zuerst Mitchell FEIGENBAUM erkannt. Nach ihm wird das Bifukationsdiagramm auch als FEIGENBAUM-Diagramm benannt. Es ist in Bild (IV.6) speziell für die logistische Abbildung dargestellt.

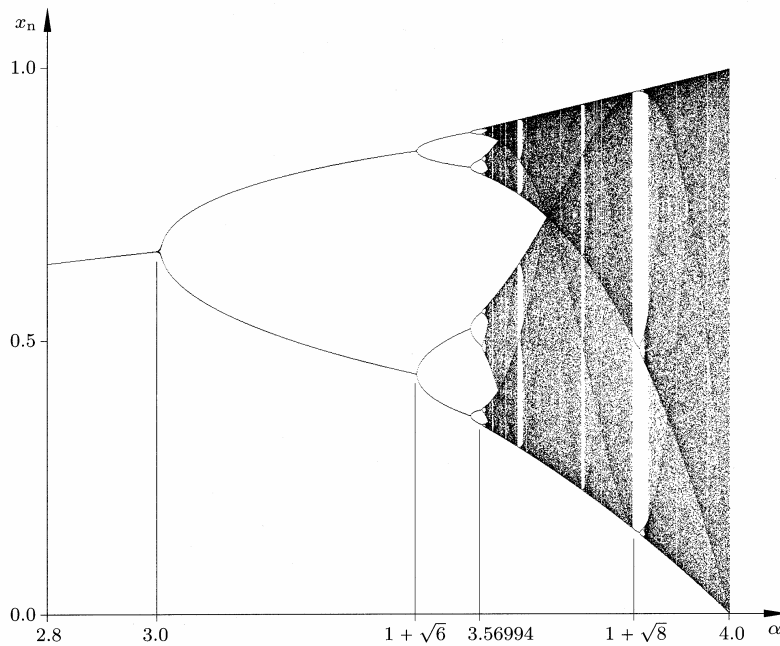


Abb. IV.6: Bifukationsdiagramm – auch Feigenbaum- oder Endzustandsdiagramm genannt

Im Diagramm sind die charakteristischen Eigenschaften nichtlinearer Systeme auf dem Weg von der Ordnung ins Chaos übersichtlich zusammengefaßt: stabiles, periodisches und chaotisches Verhalten. Währenddessen finden unendlich viele Periodenverdopplungen statt. Im chaotischen Bereich gibt es periodische Fenster, die sich durch die hellen Stellen in sonst gefüllten chaotischen Bereich auszeichnen. Die Abbildung stammt aus [Lev 94].

1.2. HÉNON-Abbildung als Modell des getriebenen Rotators

Die HÉNON-Abbildung ist die zweidimensionale Erweiterung der logistischen Abbildung. Sie wurde 1976 von dem französischen Astronom Michel HÉNON eingeführt, während er sich mit dem dreidimensionalen und damit komplexeren LORENZ-System beschäftigte.

Auch hierbei handelt es sich um eine spezielle diskrete Abbildung.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= y_i + 1 - ax_i^2 \\ y_{i+1} &= bx_i \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Die zwei Dimensionen x und y sind gekoppelt. Eindimensional geschrieben

$$x_{i+1} = bx_{i-1} + 1 - ax_i^2 \tag{IV.3}$$

hängt die neue Iterierte, im Gegensatz zur logistischen Gleichung, nun von ihren *zwei* Vorgängern ab. Der Parameter a gibt, wie bei der logistischen Abbildung, die Stärke der Nichtlinearität wieder, der Parameter b wird als Dissipationsparameter⁹ bezeichnet. Für $b=0$ erhält man nach Transformation der Variablen die logistische Gleichung. HÉNON wählte in seinen Untersuchungen die Parameter $a=1,4$ und $b=0,3$.

Auch hier soll im weiteren $b=0,3$ gesetzt sein. Die HÉNON-Abbildung zeigt ebenfalls die typischen Verhaltensmuster nichtlinearer Systeme. Stabilität, Periodizität mit Periodenverdopplung sowie letztendlich Chaos. Der Umschlag zwischen verschiedenen Typen des Langzeitverhaltens findet jedoch bei anderen Parametern a statt. Stellvertretend dafür ist in Abbildung (IV.7) das Bifukationsdiagramm für die HÉNON-Abbildung mit festem Parameter $b=0,3$ gezeigt.

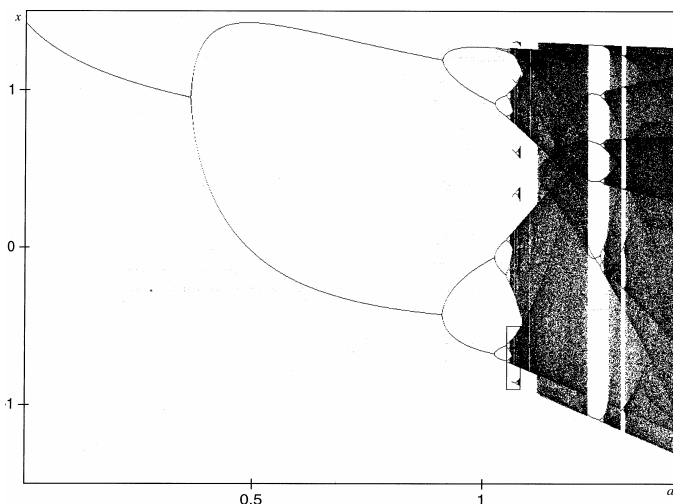


Abb. IV.7: Bifukationsdiagramm der HÉNON-Abbildung
Die Abbildung stammt aus [Pei 94]

⁹ Aus der Determinante der Funktionalmatrix $\det \begin{pmatrix} -2ax_i & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = -b$ folgt, daß die Abbildung für $|b|=1$

flächenerhaltend und für $|b|<1$ kontrahierend ist. Im ersten Fall wird ein konservatives, im zweiten Fall ein dissipatives physikalisches System beschrieben.

Der periodisch getriebene Rotator

Die HÉNON-Abbildung ist nicht nur ein mathematisches Konstrukt. Sie beschreibt trotz ihrer Einfachheit das physikalische System des periodisch getriebenen Rotators bereits sehr gut. Der Rotator zeigt wiederum Parallelen zu den untersuchten Plattenschwingungen. Diese werden am Ende des Abschnittes herausgestellt.

Die Bewegungsgleichung des Rotators ist in [Sch 94] angegeben und lautet

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \Gamma \dot{\varphi} &= F \\ &= Kf(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Darin ist φ der Drehwinkel, Γ die Dämpfungskonstante und T die Zeit zwischen zwei Kraftstößen. Das Trägheitsmoment J ist auf 1 normiert. Die Gleichung (IV.4) läßt sich auch als autonomes, nichtlineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung schreiben¹⁰.

Wegen der δ -Funktion wird das System nach der Integration diskret und zweidimensional. Äquivalenzumformungen führen auf die HÉNON-Abbildung mit den Parametern:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma x_n^2} Kf(x_n) + \frac{(1 + e^{-\Gamma})}{x_n} + \frac{1}{x_n^2} \\ b &= -e^{-\Gamma} \end{aligned}$$

Die Verbindung zu den Plattenschwingungen ergibt sich zum einen aus dem Zusammenhang zwischen Schwingungen und der eindimensionalen Projektion von Rotationen. Zum anderen sind die kurzen Rechteckpulse, mit denen die Platte im Experiment angeregt wurde, grob mit der hier vorliegenden Anregung, beschrieben durch die δ -Funktion, vergleichbar. Somit gewinnt dieses Beispiel und damit verbunden die HÉNON-Abbildung Bedeutung beim Verständnis des chaotischen Verhaltens der schwingenden Platte.

Weitere komplexere und damit realitätsnähere Beispiele ließen sich anschließen. Mir war jedoch nur wichtig, die Verhaltenstypen beim Übergang Ordnung – Chaos aufzuzeigen und den vorhandenen Bezug zu realen physikalischen Systemen aufzudecken. Dafür habe ich den relativ einfachen periodisch getriebenen Rotator gewählt. In den Experimenten wird es genau darum gehen, diese Verhaltensmuster nachzuweisen.

¹⁰ Die Gleichung (IV.4) als Differentialgleichungssystem geschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\Gamma y + Kf(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(z - nT) \\ \dot{z} &= 1 \end{aligned}$$

2. Mathematische Beschreibung nichtlinearer Systeme

Nachdem die Route von der Ordnung ins Chaos gezeichnet wurde und in diesem Zusammenhang einige charakteristische Verhaltenstypen nichtlinearer Systeme vorgestellt wurden, soll es nun um die mathematische Beschreibung nichtlinearer Schwingungen gehen.

Im Kapitel zur theoretischen Beschreibung von Plattenschwingungen wurde von der folgenden Gleichung ausgegangen: (II.33')

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, y, t) = q(x, t)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für die angeregte Plattenschwingung. Bedeutsam für die weiteren Ergebnisse ist, daß die Auslenkungsfunktion $w(x, y, t)$ nur linear in die Gleichung eingeht. In diesem Kapitel sollen verschiedene nichtlineare Ansätze diskutiert werden.

Die Schwingungsgleichung zu einem harmonischen gedämpften System hat folgende Struktur:

$$\ddot{x}(t) + \Gamma \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = k \cos(\Omega t) \quad (\text{IV.5})$$

Darin ist $x(t)$ die momentane Auslenkung, Γ der Reibungskoeffizient, ω die Eigenfrequenz des Systems, k die Amplitude und Ω die Frequenz der äußeren Kraft. Diese Gleichung wird in allen klassischen Lehrbüchern der Physik diskutiert. Es zeigen sich in Abhängigkeit von Γ, ω, Ω und k verschiedene Schwingungstypen, beispielsweise gedämpfte und ungedämpfte harmonische Schwingungen. Da das System jedoch nur lineare Abhängigkeiten von $x(t)$ aufweist, wird es nie chaotisch.

Die Nichtlinearität eines Systems kann verschiedene Ursachen haben. Einige davon sind in der nachfolgenden Grafik zusammengefaßt.

Ursachen für die Nichtlinearität eines Systems:

1. anharmonische Anregung --> bereits untersucht in Kapitel IV.1.
(periodisch getriebener Rotator)
2. System befindet sich in einem anharmonischen Potential
3. nichtlinearer Reibungsterm

Die letzten zwei Ursachen werden im Folgenden nacheinander näher betrachtet.

2.1. System mit anharmonischem Potential

Die Bewegungsgleichung eines schwingungsfähigen Systems mit periodischer äußerer Kraft lautet:

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \text{grad}U(x) = k \cos(\Omega t) \quad (\text{IV.6})$$

Hierin ist U das Potential, in dem sich das System bewegt. In den bisherigen Betrachtungen war das Potential immer harmonisch. Dies führte auf harmonische Schwingungen. Davon wird jetzt zugunsten eines *anharmonischen* Potentials und daraus resultierender chaotischer Schwingungen abgegangen. Das einfachste anharmonische Potential besteht aus den ersten zwei Gliedern der TAYLOR-Entwicklung für ein beliebiges symmetrisches Potential. Es enthält neben dem bisher betrachteten quadratischen Term auch eine Ortsabhängigkeit von der vierten Potenz.

$$U(x) = b \frac{x^2}{2} + c \frac{x^4}{4} \quad (\text{IV.7})$$

Durch die Wahl der Koeffizienten b und c werden verschiedene Varianten beschrieben. Ich werde mich auf die Variante $b < 0, c > 0$ beschränken. Die Fälle $b > 0, c > 0$ und $b > 0, c < 0$ sind in [Ste 94] ausführlich erläutert.

Aus dem Potential (IV.11) ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + bx + cx^3 = k \cos(\Omega t) \quad \text{mit } b < 0, c > 0 \quad (\text{IV.8})$$

Diese Gleichung wird in der Literatur als Bewegungsgleichung des DUFFING-Oszillators bezeichnet.¹¹ Sie beschreibt eines der einfachsten nichtlinearen dynamischen Systeme. Die Gleichung wurde 1918 von George DUFFING aufgestellt.

Trotz zahlreicher Untersuchungen gilt die Gleichung aufgrund ihrer fünf Parameter (Γ, b, c, k, Ω) als noch nicht vollständig verstanden. Auch in diesem System kann Periodenverdopplung als charakteristische Eigenschaft nichtlinearer Systeme beobachtet werden. Siehe dazu [Arg 94].

Hier soll exemplarisch ein Zeitverlauf $x = x(t)$ einer Schwingung dargestellt werden. In Abbildung IV.10. ist zu sehen, daß die Schwingung schon vor dem Durchgang durch die Abszisse umkehrt. Das heißt, daß das System mehr als ein attraktives Gebiet besitzt.

¹¹ In einigen Quellen gilt nur die eingeschränkte Variante mit $b = -1$ und $c = 1$ als DUFFING-Oszillator.

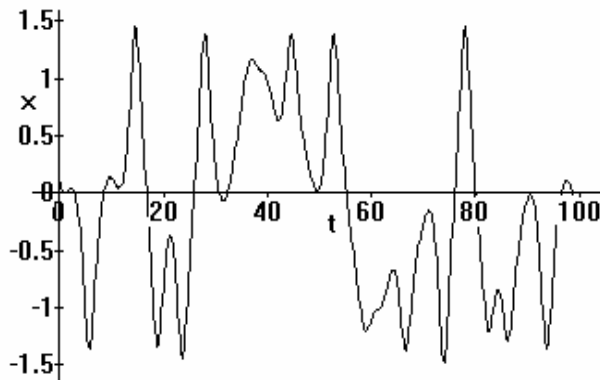


Abb. IV.10: Schwingung des DUFFING-Oszillators

In der Folge wurden viele physikalische Systeme gefunden, die sich mit der Gleichung (IV.12) beschreiben lassen. Hier soll stellvertretend eines der Systeme vorgestellt werden, das der Schwingung einer einseitig eingespannten Platte am nächsten kommt.

Beidseitig eingespannter, periodisch erregter Balken

Dieses System ist der beidseitig eingespannte Balken der Länge l mit dem Querschnitt A und der Dicke h . I sei das Flächenträgheitsmoment. Es wirke eine axiale Vorspannkraft P , die größer als die EULERSCHE Knicklast ist. Zum Aufbau siehe Bild (IV.11)

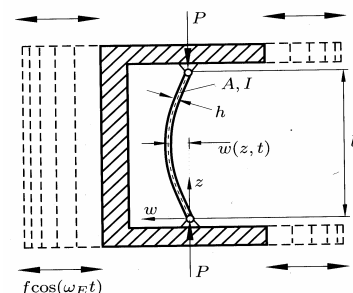


Abb. IV.11: Versuchsaufbau

Die Herleitung der Bewegungsgleichung ist in [Arg 94] beschrieben. Hier soll nur die Schwingungsgleichung angegeben werden. Sie entspricht Gleichung (IV.8) mit $b = -\beta < 0$ und $c = \alpha > 0$.

$$\ddot{w}(z, t) + \Gamma \dot{w}(z, t) - w(z, t)x + \alpha w(z, t)^3 = k \cos(\Omega t) \quad (\text{IV.9})$$

Darin sind $\alpha = \alpha(h)$ und $\beta = \beta(P) > 0$ Steifigkeitsparameter des Balkens.

In [Arg 94] ist ebenfalls angeführt, daß derselbe Gleichungstyp wie (IV.13) verwendet werden kann, um einen einseitig eingespannten und fremderregten Balken im Magnetfeld zu beschreiben. Es ist anzunehmen, daß dieses System der einseitig eingespannten Platte sehr gut entspricht.

2.2. System mit anharmonischem Potential und nichtlinearem Reibungsterm

Auch wenn das DUFFING-System möglicherweise die Dynamik der einseitig eingespannten Platte gut modelliert, besteht dennoch ein großer Unterschied: das DUFFING-System hat *zwei* attraktive Gebiete und bei der schwingenden Platte wurde nur *ein* attraktives Gebiet gemessen. (Siehe dazu das folgende Kapitel mit den experimentellen Ergebnissen.)

Um das System dahingehend besser zu modellieren, werden in der DUFFING-Gleichung zwei Ersetzungen vorgenommen: Reibungsterm: $\Gamma \rightarrow (x^2-1)$

$$\text{Potential: } bx^2+cx^4 \rightarrow cx^4$$

Die so entstandene Gleichung ist die VAN der POOL-DUFFING-Gleichung:

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + cx^3 = k \cos \Omega t \quad (\text{IV.10})$$

Hierin ist neben dem anharmonischen Potential $U(x) = \frac{1}{4}x^4$ der nichtlineare Reibungsterm $(x^2 - 1)$ berücksichtigt.

In Abbildung (IV.12) ist exemplarisch eine Schwingung dargestellt. Es ist zu erkennen, daß das System um *ein* Attraktorgebiet oszilliert.

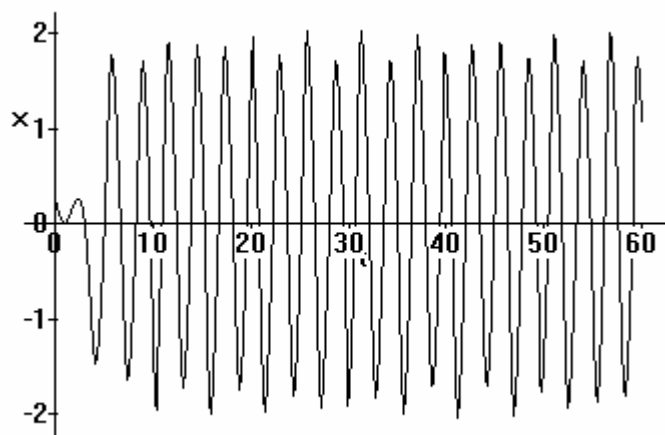


Abb.IV.12: Dynamisches Verhalten der VAN der POOL-DUFFING-Gleichung

Bei Variation der Parameter kann eine Kaskade von Periodenverdopplungen beobachtet werden. Damit modelliert die VAN der POOL-DUFFING-Gleichung das Schwingungsverhalten der einseitig eingespannten Platte am besten. Ähnliches Verhalten wird im Experiment gefunden.

V. Experimentelle Untersuchung zum chaotischen Verhalten

Nachdem im vierten Kapitel zum einen drei wesentliche Verhaltensmuster beschrieben und zum zweiten verschiedene mathematische Modelle vorgestellt wurden, werden in diesem Kapitel die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen zu nichtlinearen Plattenschwingungen dargestellt. So konnten beispielsweise die erörterten Verhaltensmuster, insbesondere eine Periodenverdopplungskaskade, für die schwingende Platte im Experiment nachgewiesen werden. Ein vollständiges Verständnis des Systems ist dennoch (u.a. aufgrund der vielen eingehenden Parameter) nicht möglich.

1. Beschreibung des Versuchsaufbaus

Zur Untersuchung stand das chaotische Schwingungsverhalten der Platte in Abhängigkeit von verschiedenen Parametern: der Anregungsfrequenz, der Anregungsspannung und der Einspannungshärte.

Im Verlauf der Experimente zeigte sich, daß die charakteristische Periodenverdopplung besonders gut in Abhängigkeit von der Anregungsspannung gemessen werden konnte. Die Spannung die vom Frequenzgenerator (max. $20V_{SS}$) ausgegeben wurde, war zu niedrig. Deshalb wurde ein Verstärker (bis max. $300V_{SS}$) eingesetzt. Die Anregung der Platte erfolgte mit Rechteckpulsen. Das Schallsignal wurde mit dem Mikrophon gemessen.

Der Versuchsaufbau war wie folgt: Abbildung (V.1)

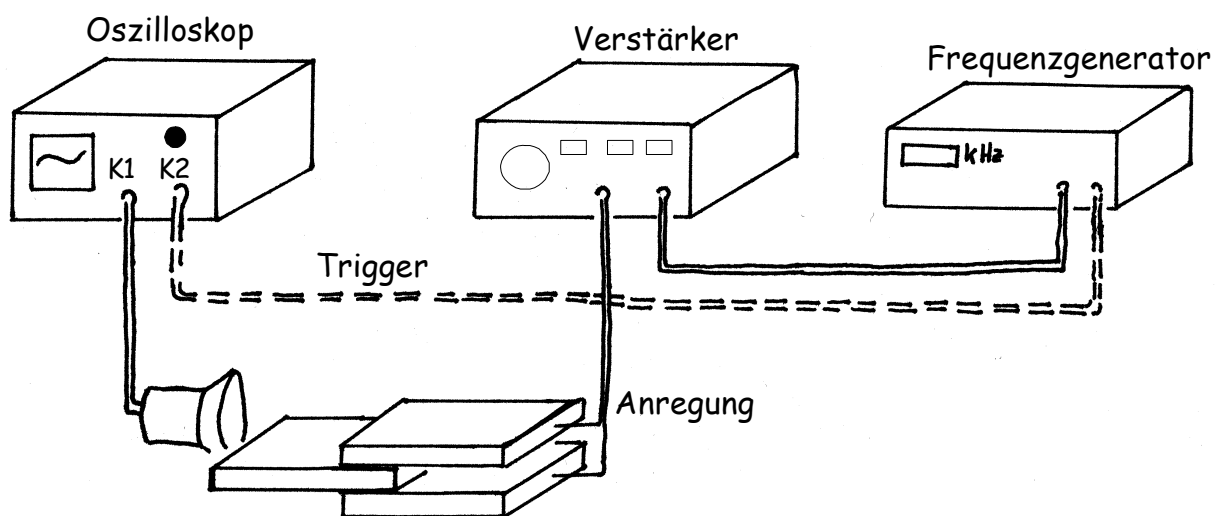


Abb. V.1: Versuchsaufbau für das Experiment zur Messung chaotischer Plattenschwingungen

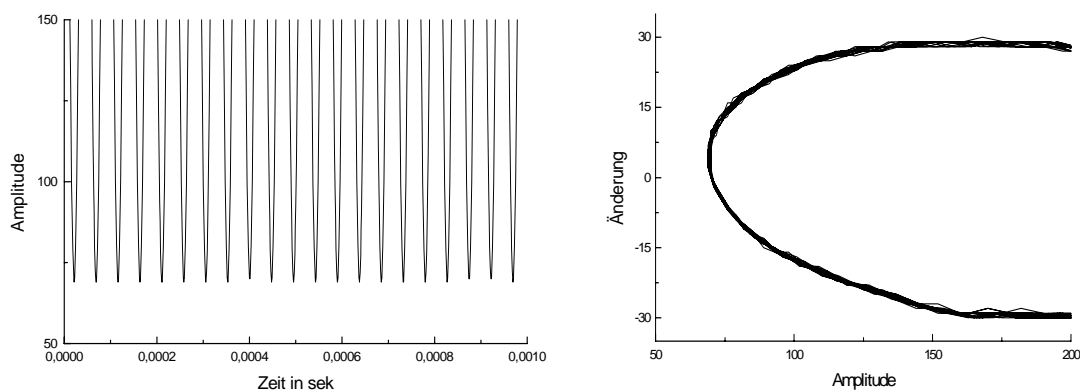
Auch die Frequenz der Wechselspannung war variabel. Am besten konnte die Periodenverdopplung nahe der Resonanzfrequenz $\nu_{2,0} \approx 18\text{kHz}$ in Abhängigkeit von der Spannung gemessen werden.

Die Härte der Platteneinspannung wurde ebenfalls variiert. Die nachfolgend vorgestellten Messungen sind für eine mittlere Einspannhärte aufgenommen. Diese hat sich für die Untersuchung des nichtlinearen Verhaltens der Plattenschwingung bewährt. Damit konnten Periodenverdopplungen am deutlichsten gemessen werden. Bei lockerer und sehr harter Einspannung war ebenfalls chaotisches Verhalten erkennbar, jedoch nicht so evident.

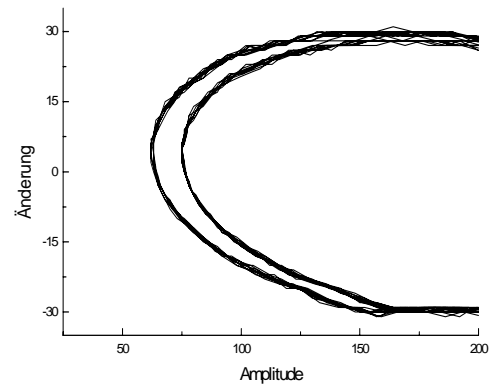
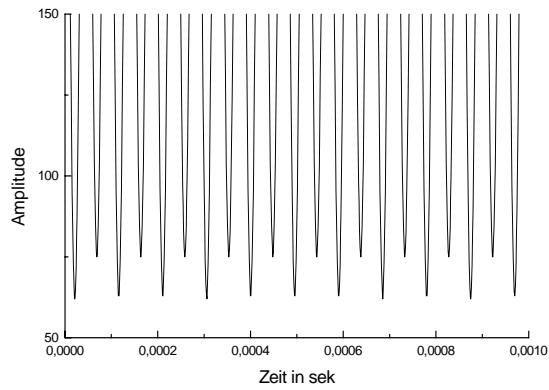
2. Messung nichtlinearer Plattenschwingungen

Die einzelnen Diagramme (V.2a...d) stellen die Meßergebnisse des Mikrophonesignals in Abhängigkeit von der Anregungsspannung dar. Die Anregungspulse erfolgten mit einer Frequenz $\nu \approx 20\text{kHz}$. Die Meßzeit betrug jeweils 1ms. Eine längere Aufnahmezeit wäre wünschenswert gewesen, ließ sich jedoch mit dem Oszilloskop bei Wahrung der nötigen Auflösung nicht bewerkstelligen. Eine Verbesserungsmöglichkeit besteht darin, einen Computer anzuschließen und die Daten direkt zu speichern.

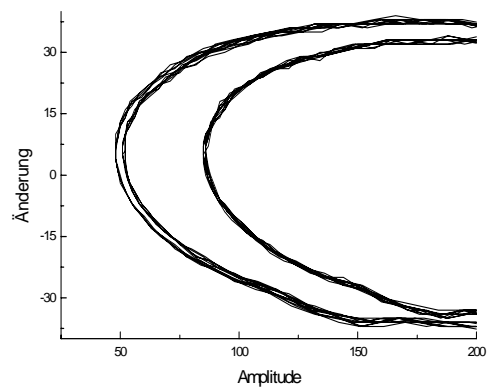
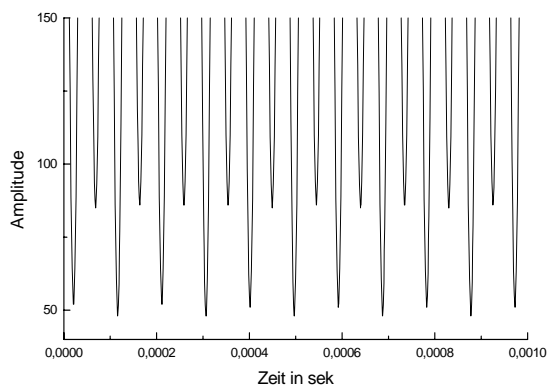
Die linken Diagramme zeigen das Mikrophonesignal in Abhängigkeit von der Zeit. In den rechten Abbildungen ist die Änderung der Amplitude in Abhängigkeit von der Amplitude selbst aufgetragen. Das heißt, die rechten Diagramme stellen das Schwingungsverhalten im zugehörigen $x - \dot{x}$ -Phasenraum dar.



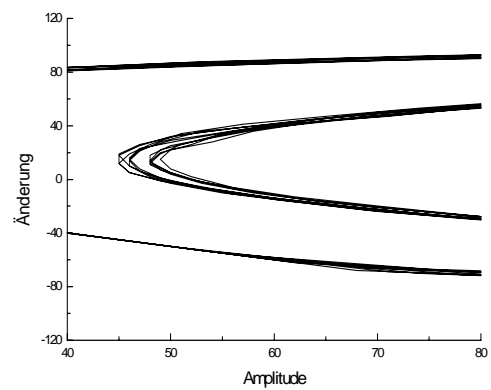
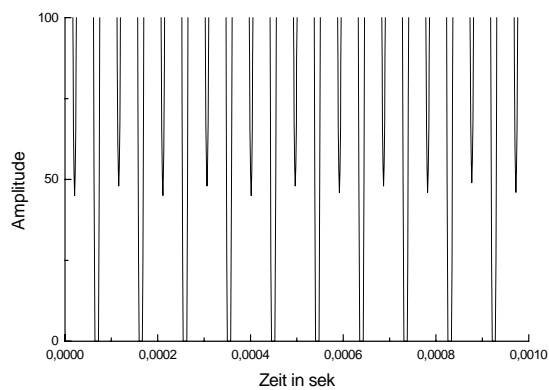
a)



b)



c)



d)

Abb. V.2: Mikrophonsignal von der Plattenschwingung, die mit etwa $\nu=20$ kHz Rechteckimpuls angeregt wurde
 Die Anregungsspannung beträgt: a, $U=18$ V b, $U=20$ V
 c, $U=23$ V d, $U=25$ V

Es ist deutlich eine Periodenverdopplung zu erkennen:

Bild a, stabil; b, Periode zwei und c, Periode vier

Bild d zeigt, daß auch der innere Zyklus der Periode 4 (Bild c) aufgespalten ist.

Es wurde jeweils nur die untere Hälfte des Schallsignals von der Schwingung auf dem Oszilloskop aufgezeichnet und in der Folge im Computer gespeichert. Dadurch war es

möglich, die wesentlichen Effekte, die in der Amplitudenschwankung zum Ausdruck kommen, größer darzustellen.

Bei einer Anregungsspannung $U= 18\text{V}$ (Abb.V.2a) ist die Plattenschwingung noch harmonisch. Im Phasenraum ist ein stabiler Grenzyklus zu sehen.

Nach Erhöhen der Spannung auf $U= 19\text{V}$ setzt eine Periodenverdopplung ein. (keine Abbildung) Das System ist instabil und schwankt zwischen Periode eins und zwei. Das Diagramm in Abbildung(V.2b) zeigt, daß das System nach weiterer Spannungserhöhung auf $U= 20\text{V}$ periodisch oszilliert. Eine Periodenverdopplung hat stattgefunden. Im Phasenraum ist eine Aufspaltung des Orbits zu erkennen.

Eine weitere Periodenverdopplung setzt bei $U= 22\text{ V}$ ein. Bei einer Spannung von $U= 23\text{ V}$ ist eine Schwingung mit Periode vier zu sehen. (Abb.V.2c) Im Phasenraum ist eine erneute Aufspaltung des äußeren Zyklus sichtbar. Der innere Orbit ist ebenfalls aufgespalten. Um dies nachzuweisen, wurde der Bereich der zwei kleineren Amplituden nochmals vergrößert und bei etwas höherer Anregungsspannung $U= 25\text{V}$ aufgezeichnet. (Abb.V.2d) Hier zeigt das Phasenraumbild eindeutig eine Aufspaltung des inneren Orbit.

Weitere Periodenverdopplungen konnten nicht aufgezeichnet werden, da das System in diesem Bereich zu sensibel auf Änderungen der äußeren Parameter reagiert und deshalb permanent zwischen verschiedenen Perioden und chaotischem Verhalten schwankt.

Ab einer Spannung von $U= 25\text{ V}$ setzt chaotisches Verhalten ein. In Abbildung (V.3) ist dies beispielhaft für $U= 26\text{ V}$ gezeigt. Charakteristisch dafür ist, daß im Phasenraum keine diskreten Orbits mehr erkennbar sind.

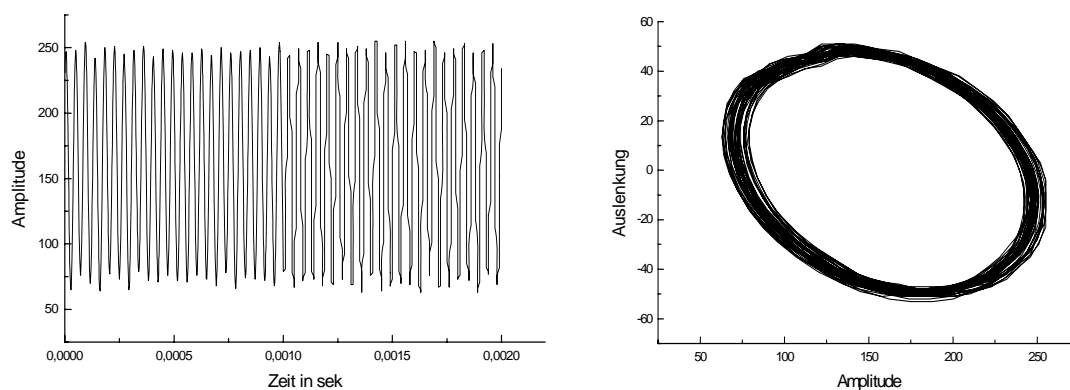


Abb. V.3: Chaotisches Schwingungsverhalten und Phasenraumdarstellung
Anregungsspannung $U= 26\text{ V}$.

Periodische Fenster im chaotischen Bereich wie im vorangehenden Kapitel beschrieben konnten beobachtet, aber nicht aufgezeichnet werden.

3. Diskussion der Ergebnisse

Das Ziel, chaotische Plattenschwingungen zu erzeugen und zu untersuchen, wurde erreicht. Ein Beleg dafür sind die aufgezeichneten Periodenverdopplungen der Plattenschwingung in Abhängigkeit von der Anregungsspannung. Sie sind eine Bestätigung für den nichtlinearen Charakter des Systems.

Neben dem Parameter der Anregungsspannung konnten erwartungsgemäß weitere qualitative Abhängigkeiten beobachtet werden: z.B. von der Erregerfrequenz sowie der Härte der Platteneinspannung.

Für eine genauere Untersuchung sind längere Aufzeichnungszeiten nötig. Dies lässt sich mit dem Oszilloskop bei Wahrung der nötigen Auflösung nicht realisieren. Die Aufzeichnung mit dem Computer über einen AD-Wandler stellt einen Lösungsansatz für dieses Problem dar. Dann könnten ebenfalls weitere Untersuchungen zu den anderen Parametern durchgeführt werden.

VI. Zusammenfassung

Aus der anfänglichen Vorbetrachtung hatten sich drei Problemstellungen für diese Arbeit ergeben: zum Ersten sollten die Resonanzfrequenzen der harmonischen Plattenschwingung theoretisch vorausgesagt und möglichst experimentell bestätigt werden.

Die theoretische Beschreibung der Plattenschwingung wurde mittels einer linearen Schwingungsgleichung vorgenommen. Die Linearisierung des eigentlich viel komplexeren Problems wirkt sich bei kleinen Amplituden nicht dominant auf das Ergebnis aus. So konnten im Anschluß an die theoretischen Betrachtungen die aus der linearen Schwingungsgleichung vorausgesagten Eigenfrequenzen der Plattenschwingungen auch im Experiment verifiziert werden. Die drei dazu eingesetzten Verfahren sind in Kapitel III beschrieben. Die wesentlichen Ergebnisse aus der experimentellen Untersuchung waren:

- die allgemein gute Übereinstimmung der gemessenen Eigenfrequenzen mit den prognostizierten Werten,
- die zunehmende Abweichung von theoretischen und experimentellen Werten mit wachsenden Schwingungsparametern.

Damit konnte einerseits die zweite Problemstellung, die nach dem Schwingungsmodus der Piezo-Elemente in den Ventilen zur Erzeugung kurzer Gaspulse fragt, geklärt werden.

Andererseits macht die Abweichung die Grenzen des Modells der einseitig ideal fest eingespannten Platte deutlich. Eine Modifizierung des Modells in der mit einer elastischen Einbettung der Platte statt mit einer ideal festen Einspannung gerechnet wird, wäre ein Ansatzpunkt zur besseren Beschreibung. Dafür ist jedoch keine geschlossene Theorie bekannt.

Dazu parallel kann schon hier angenommen werden, daß ebenfalls das Modell der linearen Schwingungsgleichung mit zunehmenden Schwingungsparametern an seine Grenzen stößt. Denn hohe Schwingungsparameter stehen für relativ große Krümmungen in der Platte, die ihrerseits zu Rückkopplungen führen. Diese Rückkopplungen werden in der linearen Schwingungsgleichung nicht berücksichtigt.

Ein möglicher Lösungsansatz führt in den dritten Problemkreis dieser Arbeit: die Erzeugung und Untersuchung chaotischer Plattenschwingungen und Möglichkeiten deren Beschreibung. Die Modellierung chaotischer Plattenschwingungen ist im Bereich der nichtlinearen Dynamik angesiedelt und gilt als noch lange nicht so gut verstanden wie die analogen linearen Probleme. In der theoretischen Beschreibung werden ausgehend von der linearen Schwingungsgleichung einzeln drei verschiedene nichtlineare Erweiterungen vorgenommen.

Diese drei Sonderfälle werden in IV.2. diskutiert und ihre jeweils spezifische Relevanz für das Problem der schwingenden Platten aufgezeigt. Dabei gibt es nicht ein Modell, das alles beschreibt, sondern jedes der drei Fälle trägt zur Beschreibung bei. Eine allgemeine Modellierung ist Sache der zukünftiger Untersuchungen.

In den hier vorgenommenen Experimenten konnte eine wichtige Eigenschaft nichtlinearer Systeme - der Übergang des Systems von der Ordnung in das Chaos – anhand einer Periodenverdopplungskaskade gezeigt werden. Diese Periodenverdopplung fand in Abhängigkeit von der Anregungsspannung statt. Zudem konnten andere Abhängigkeiten qualitativ beobachtet werden.

Parallel zu den experimentellen Untersuchungen sollte die Frage geklärt werden, ob sich dieses Experiment als Schauversuch eignet. Zweifellos können an diesem Versuch wichtige Gesetzmäßigkeiten der Physik, speziell aus dem Bereich der Mechanik, verdeutlicht werden. Dabei besteht ein Vorteil des Experimentes darin, daß die Effekte nicht über viele Meßgeräte sichtbar gemacht werden müssen, sondern direkt über das Ohr wahrnehmbar sind.

Demonstriert werden können beispielsweise parallel theoretisch und experimentell:

- die Wirkungsweise des Piezo-Effektes
- das Herleiten der Eigenfrequenzen eines schwingungsfähigen Systems und darauffolgende Demonstration des Maximalwerdens der Amplitude bei Anregung mit der Eigenfrequenz (bei kleiner Dämpfung),
- der Weg eines nichtlinearen schwingungsfähigen Systems zu chaotischen Verhalten anhand der logistischen Abbildung und der Periodenverdopplungskaskade,
- die Wirkung der Fouriertransformation zur Bestimmung der Frequenzen auf denen das System schwingt.

Gegen diesen Versuch spricht, daß es wesentlich eindrucksvollere Demonstrationsexperimente gibt, die die gleichen physikalischen Effekte veranschaulichen und, im Fall der Periodenverdopplung, diese stabiler reproduzieren. Abschließend bin ich der Meinung, daß sich dieser Versuch eher für ein Praktikum als für ein Demonstrationsexperiment (beispielsweise eingesetzt zum Tag der offenen Tür des Fachbereiches Physik der TU Chemnitz) eignet.

VII. Literaturverzeichnis

- [Arg 94] J. Argyris, G. Faust, M. Haase „Die Erforschung des Chaos“
Vieweg Verlagsgesellschaft Braunschweig 1994
- [Cro 84] J.B. Cross, J.J. Valentini
Rev. sci. Instrum. 53 (1982) 28
- [Bär 96] E. Bäringhausen „Über Chladnische Klangfiguren“
Praxis der Naturwissenschaften 2/1996 S.10 ff
- [Gle 90] J. Gleick „Chaos - die Ordnung des Universums“
- [Gro 96] Gross, Hauger, Schnell, Wringgers „Technische Mechanik 4“
Springer Lehrbuch Berlin, Heidelberg, New York 1995
- [Hag 89] P. Hagedorn „Technische Schwingungslehre“
Springer Berlin, Heidelberg, New York 1989
- [Koh 96] Kohlrausch „Praktische Physik“ Band 2
Teubner Stuttgart 1996
- [Lei 69] A.W. Leissa „Vibration of Plates“
NASA Reprint 1969
- [Lev 94] R.W. Leven, B.-P. Koch, B. Pompe „Chaos in dissipativen Systemen“
Akademie Verlag Berlin 1994
- [Pei 94] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe „Chaos-Bausteine der Ordnung“
Klett-Cotta/ Springer Verlag Stuttgart 1994
- [Pie 95] Piezosystem Jena Piezofibel 1995
- [Sch 94] H.G. Schuster „Deterministisches Chaos“
VCH Verlagsgesellschaft Weinheim 1994
- [Ste 94] W.-H. Steeb „Chaos und Quantenchaos in dynamischen Systemen“
B I Wissenschaftsverlag Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1994
- [Val 86] Valvo Datenbuch Piezoxide (PXE) 1986
- [Wei 95] Weißmantel „Grundlagen der Festkörperphysik“
J.A.Barth Verlag Heidelberg, Leipzig 1995
- [Win 91] Winkler/ Aurich „Taschenbuch der Technischen Mechanik“
Fachbuchverlag Leipzig Leipzig 1991

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich des Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen verwendet habe.

Grüna, den 23.03.1999