

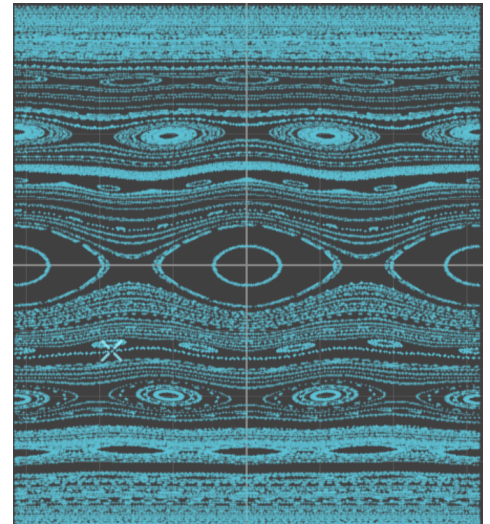


## V14 – Vom Chaos zum Quantenchaos

Ort: Labor C60.209 (Professur Theoretische Physik komplexer dynamischer Systeme)

Betreuer: M. Sc. Lukas Seemann, M. Sc. Tom Rodemund

Der Korrespondenz zwischen klassischer Mechanik auf der einen und Quantenmechanik auf der anderen Seite – die Strahlen-Wellen-Korrespondenz – ist ein zentrales Prinzip der modernen Physik. Besonders interessant ist diese Relation in klassischen Systemen mit nichtlinearer Dynamik, sogenannten chaotischen Systemen: Wie äußern sich die Nichtlinearitäten im quanten- bzw. wellenmechanischem Pendant, welche Auswirkung hat das auf die Erhaltungsgrößen, welche Rolle spielt das nur quantenmechanisch erlaubte Tunneln? Diese Fragen sind Gegenstand des Forschungsfeldes des Quantenchaos. Dieser Versuch soll einen Einblick in die vielfältigen und komplexen Fragestellungen geben und einen ersten Zugang zu den teilweise verblüffenden Antworten ermöglichen. Zur Illustrierung wählen wir ein prominentes Modellsystem, nämlich die Klasse der Billards. Wir starten mit klassischen Billards mit harten Wänden, in denen Abweichungen von der Kreisform die nichtlineare Dynamik induzieren. Die quantenmechanische Beschreibung erfolgt mit der Schrödingergleichung. Ein Aspekt des Versuchs wird die Betrachtung von Billards für Licht sein, insbesondere unter dem Aspekt der Strahlen-Wellen-Korrespondenz.



### 1. Klassische nichtlineare Dynamik in Billardsystemen

- 1.1 Programmieren Sie die Teilchendynamik in einem Kreisbillard mit "Einfallswinkel = Ausfallswinkel" auf einer Plattform Ihrer Wahl. Legen Sie Anfangsbedingungen fest und verfolgen Sie die entstehende Trajektorie, indem Sie für jeden Reflexionspunkt am Rand die Ortskoordinate (Bogenlänge  $s$ , im Kreisbillard gleichbedeutend mit dem Polarwinkel) und den Sinus des Einfallswinkels in einem File erfassen.
- 1.2 Stellen Sie die Dynamik im Ortsraum dar und überzeugen Sie sich von der Richtigkeit Ihres Programmes. Stellen Sie die Trajektorien für verschiedene Anfangsbedingungen im Phasenraum dar, wobei der Phasenraum aufgespannt wird von der Bogenlänge  $s$  bis zum Reflexionspunkt und dem Sinus zugehörigen Einfalls-(oder Ausfalls-)winkels. Welche Größe ist in diesem symmetrischen System erhalten und woran erkennt man dies?
- 1.3 Verallgemeinern Sie Ihr Programm auf Billards, die von der Kreisform abweichen, aber in Polarkoordinaten parametrisiert werden können, z.B. in der Form  $r(\phi) = R_0(1 + \epsilon \cos \phi)$  mit dem mittleren Radius  $R_0$  und dem Deformationsparameter  $\epsilon$ . Um Zeit zu sparen, geben die Betreuenden Tipps zur Umsetzung.
- 1.4 Stellen Sie wieder den Phasenraum dar; beginnend mit dem Fall des Kreisbillards für  $\epsilon = 0$  – Informieren Sie sich über das KAM-Theorem und das Poincaré-Birkhoff-Theorem, z.B. in einem Lehrbuch oder über die Webseiten [http://scholarpedia.org/article/Encyclopedia:Dynamical\\_systems](http://scholarpedia.org/article/Encyclopedia:Dynamical_systems) [1]. Illustrieren Sie den Sachverhalt mit ein oder zwei Beispielen in dem von Ihnen untersuchten System.



## 2. Quantenmechanik in Billardsystemen und Quantenchaos

- 2.1 Nun soll das Kreisbillard als quantenmechanisches System betrachtet werden - also als zweidimensionaler, kreisrunder Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden. Stellen Sie die Schrödinger-Gleichung für diesen Fall auf und lösen Sie sie.
- 2.2 Diskutieren Sie die Lösungen und stellen Sie diese exemplarisch im Ortsraum dar. Anmerkung: Eine Darstellung im Phasenraum ist über die sogenannten Husimifunktionen möglich, sprengt aber den hier vorgegebenen Rahmen. Die Idee ist, die Wellenfunktion im Ortsraum mit einem kohärenten Wellenpaket (Gauß in Ort und Drehimpulsquantenzahl  $m$ ) zu messen (also den Überlapp zu bilden).
- 2.3 Ausblick Quantenchaos (Literaturarbeit/Diskussion)
  - ▶ Nichtreguläre Billards: Welche Möglichkeiten der quantenmechanischen Beschreibung gibt es? Zählen Sie auf und charakterisieren Sie die Methode in 1-2 Sätzen. Wie unterscheiden sich Quantenbillards mit regulärem bzw. nichtlinearem klassischem Pendant und welche Beziehung besteht zur Zufallsmatrixtheorie? [2, 3]
  - ▶ In welchem Zusammenhang stehen die in Aufgabe 1 untersuchten Trajektorien zu den quantenmechanischen Eigenschaften eines Billardsystems? Das Stichwort lautet Spurformel; die Thematik ist als Ausblick und ggf. Zusatzaufgabe gedacht.[1]

## 3. Billards für Licht

Experimentell zugängliche Systeme, in denen die oben beschriebene Strahlen-Wellen-Korrespondenz deutlich und auch experimentell zugänglich wird, sind Mikrowellenbillards [3] und Billards für Licht [4].

- 3.1 Wir starten mit den Billards von Aufgabe 1 und nehmen im folgenden an, dass diese aus einem Material mit Brechungsindex  $n$  bestehen, als zweidimensional betrachtet werden können und in Luft liegen. Wie wird der optische Charakter des Systems im Strahlenbild erfasst, was ist neu im Vergleich zu harten Wänden?
- 3.2 Die Wellenoptik steht in enger Beziehung zur Quantenmechanik. Informieren Sie sich zur Analogie von Schrödinger- und Helmholtzgleichung. Wie bestimmt der Brechungsindex das Potential? Siehe dazu auch Kap. II in.[5] Was ist Tunneln im optischen Fall und was bedeutet das für den Wellenvektor  $k$ ?
- 3.3 Strahlen-Wellen-Korrespondenz in der Kreisscheibe: Die Beschreibung im Strahlenbild beruht wesentlich auf dem (erhaltenen) Einfallswinkel, der in der Wellenbeschreibung aber gar nicht vorkommt. Erläutern Sie, wie die Strahlen-Wellen-Korrespondenz etabliert wird, indem Sie den Zusammenhang zwischen Einfallswinkel und Quantenzahl  $m$  sowie zwischen Imaginärteil von  $k$  und den Fresnelkoeffizienten (Anteil an reflektiertem und transmittiertem Licht) ableiten.
- 3.4 Ausblick: Instabile Mannigfaltigkeit und Mikrolaser mit direktonaler Abstrahlung.[4]

[1] <http://scholarpedia.org/article/Encyclopedia:Dynamical.systems>. Über die Suchfunktion dieser Seite gelangen Sie sehr einfach an die gesuchten Begriffe.

[2] H.-J. Stöckmann, "Quantum Chaos. An Introduction", Cambridge University Press, 1999. Siehe auch <https://sci-books.com/quantum-chaos-an-introduction-0521027152/>

[3] H.-J. Stöckmann, "Quantenchaos zum Anfassen", Physik. Blätter, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/phbl.19970530205>

[4] M. Hentschel, "Billards für Licht", Physik Journal 10, 39, 2011. <https://www.pro-physik.de/restricted-files/95256>

[5] M. Hentschel und K. Richter, "Quantum chaos in optical systems", Phys. Rev. E 66, 056207, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056207>