

## Theorie und Auswertung des Stern-Gerlach-Versuches

Autor der Anleitung: Dr. E. Dost (März 2005)

### 1. Magnetisches Moment

Die den Atomstrahl bildenden Kaliumatome besitzen ein Außenelektron im Grundzustand 4s. Der Bahndrehimpuls ist gleich Null. Das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  der Kaliumatome, das von diesem Außenelektron erzeugt wird, ist daher nur auf dessen Spin  $\vec{S}$  zurück zu führen:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_0} \cdot g_s \cdot \vec{S} . \quad (1)$$

Darin ist  $g_s$  der Landé-Faktor (manchmal auch gyromagnetischer Faktor genannt).

Betrachtet man die Komponente  $S_z$  des Spins zu einer durch ein Magnetfeld mit der Feldstärke  $\vec{H}$  vorgegebenen  $z$ -Richtung, so ergeben sich für das System zwei verschiedene Orientierungsmöglichkeiten, die durch die Quantenzahlen

$$m_s = \pm \frac{1}{2} \quad \text{charakterisiert sind.}$$

Die  $z$ -Komponente des Spins nimmt die Eigenwerte  $S_z = m_s \cdot \hbar$  an.

Für die zugehörigen magnetischen Momente in  $z$ -Richtung folgt aus (1)

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_0} \cdot g_s \cdot m_s \cdot \hbar = -\mu_B \cdot m \quad (2)$$

mit dem Bohrschen Magneton  $\mu_B = -\frac{e\hbar}{2m_0} = 9,284 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$  und  $m = m_s \cdot g_s$ .

Der Literaturwert des  $g$ -Faktors für reinen Spinmagnetismus ist  $g_s = 2,0023$ .

Daher ist  $m = \pm 1,0012 \approx \pm 1$ .

Ziel des Stern-Gerlach-Experimentes ist die Bestätigung der Richtungsquantelung für den Elektronenspin. Darüber hinaus können, je nachdem welche Größen als bekannt vorausgesetzt werden, die Werte von  $\mu_z$ ,  $\mu_B$ ,  $m$  oder  $g_s$  bestimmt werden.

### 2. Kraftwirkung auf die Kaliumatome

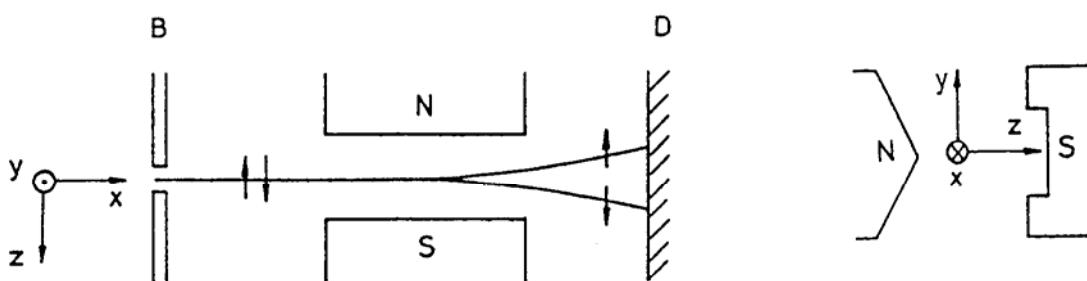


Abb. 1: Schematische Darstellung des Stern-Gerlach-Experimentes (schneidenförmiger Nordpol, rinnenförmiger Südpol; B Blende, D Detektor)

Links: Draufsicht, rechts: Blick durch den Magneten zum Detektor

Für die Kraft auf ein Teilchen mit dem magnetischen Moment  $\vec{\mu}$  gilt allgemein

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \text{grad}) \vec{B} \quad (3)$$

Bei einer Anordnung nach Abb. 1, bei der die Länge des Magneten groß gegenüber dem Polschuhabstand ist, kann angesetzt werden:

$$B_x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dB_x}{dx} = \frac{dB_y}{dx} = \frac{dB_z}{dx} = 0 \quad (4)$$

Da der Atomstrahl das Magnetfeld in der Nähe der Symmetrieebene durchläuft, kann für diesen Bereich auch  $B_y \approx 0$  und  $\frac{dB_y}{dz} \approx 0$  gesetzt werden.

Gemessen wird die Ablenkung der Atome in z-Richtung, so dass die Kraftkomponente  $F_z$  maßgebend ist. Für diese Komponente gilt unter den genannten Voraussetzungen:

$$F_z = \mu_z \cdot \frac{dB_z}{dz} = -m \cdot \mu_B \cdot \frac{dB_z}{dz} \quad (5)$$

Unter der Annahme, dass die Kaliumatome senkrecht in das Magnetfeld eintreten und dass der Feldgradient konstant ist, durchlaufen die Atome im Magneten eine parabelförmige und anschließend eine geradlinige Bahn, wobei die Gesamtablenkung von der Eintrittsgeschwindigkeit abhängig ist.

### 3. Zweidrahtfeld

In unserer Apparatur wird eine andere Polschuhform verwendet (Abb. 2), die ein so genanntes Zwei-Draht-Feld erzeugt. Die Polschuhe sind so geformt, dass der Feldlinienverlauf genau dem entspricht, der durch zwei parallele in entgegengesetzter Richtung vom Strom durchflossene Leiter erzeugt wird. Dieses Feld erfüllt in guter Näherung die Bedingung, dass der Feldgradient im Bereich des Atomstrahls konstant ist.

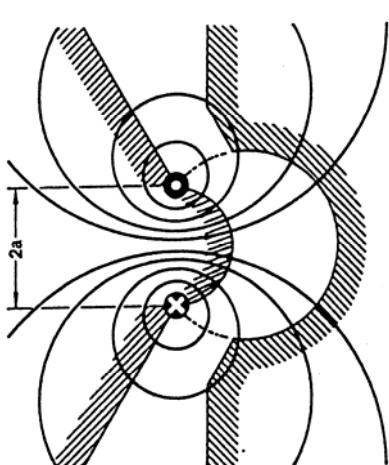


Abb. 2: Zwei-Drahtfeld

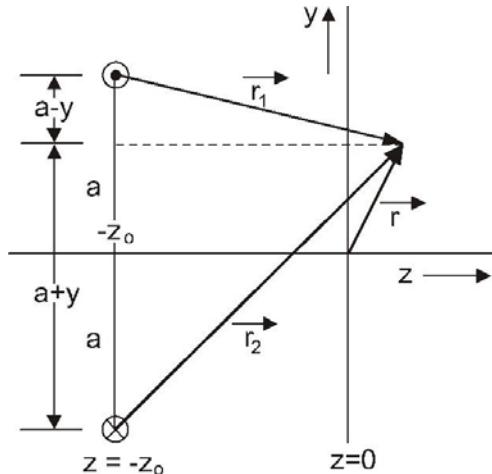


Abb. 3: Festlegung des Koordinatensystems

Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  setzt sich nach Abb. 3 aus zwei Anteilen  $\vec{H}_1$  und  $\vec{H}_2$  zusammen:  $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_1(\vec{r}_1) + \vec{H}_2(\vec{r}_2)$  mit  $\vec{H}_i(\vec{r}_i) = \frac{\vec{I}_i \times \vec{r}_i}{2\pi r_i^2}$ , ( $i = 1, 2$ ) und  $\vec{I}_1 = -\vec{I}_2 = \vec{I}$ .

Es gilt also:  $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \vec{I} \times \left( \frac{\vec{r}_1}{r_1^2} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^2} \right)$  (6)

Anmerkung: Die Bezeichnung  $\vec{I}$  wird zur Vereinfachung an Stelle des korrekten Ausdrucks Stromdichte • Flächennormalenvektor verwendet.

Für den Betrag der magnetischen Feldstärke ergibt sich unter Berücksichtigung der Tatsache, dass  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{I}$  liegen:

$$H = \frac{I}{\pi} \cdot \frac{a}{r_1 r_2} \quad (7)$$

mit  $r_1^2 = (a-y)^2 + (z+z_0)^2$  und  $r_2^2 = (a+y)^2 + (z+z_0)^2$ .

Für den Feldgradienten ergibt sich dann

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{I \cdot a \cdot (z+z_0)}{\pi} \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^3 \cdot r_2^3} = -\frac{2I \cdot a \cdot (z+z_0)}{\pi} \cdot \frac{a^2 + y^2 + (z+z_0)^2}{[(a^2 - y^2)^2 + 2(z+z_0)^2 \cdot (a^2 + y^2) + (z+z_0)^4]^{\frac{3}{2}}}$$

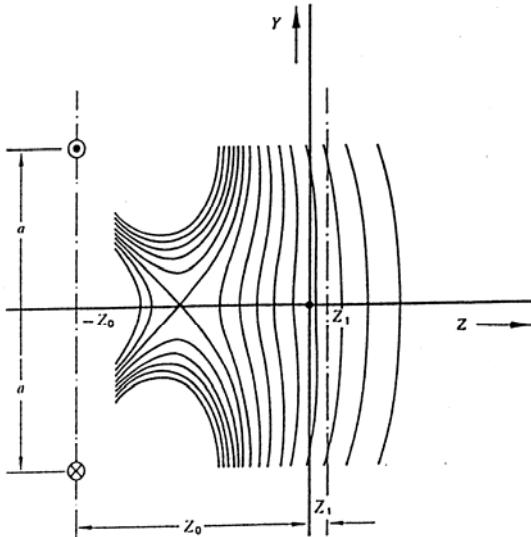


Abb. 4: Linien konstanter Feldinhomogenität

Abb. 4 zeigt eine Darstellung der Linien konstanter Feldinhomogenität. Gesucht wird nun die Ebene  $z = z_1$ , für die die entsprechende Fläche konstanter Inhomogenität möglichst eben ist. Dazu wird  $\frac{\partial H}{\partial z}$  in der Umgebung von  $y = 0$  in eine Reihe nach  $y^2$  entwickelt unter der Voraussetzung, dass  $y^2$  gegenüber  $(z_0 + z_1)^2$  und  $a^2$  klein ist. Bricht man die Reihe nach der 1. Ordnung ab, erhält man für den Feldgradienten:

$$\left| \frac{\partial H}{\partial z} \right|_{z_1} = \frac{2I \cdot a \cdot (z_0 + z_1)}{\pi} \cdot \frac{1 + 2y^2 \frac{2a^2 - (z_0 + z_1)^2}{(a^2 + (z_0 + z_1)^2)^2}}{(a^2 + (z_0 + z_1)^2)^2} \quad (8)$$

Bei  $z = z_1$  wird  $\left| \frac{\partial H}{\partial z} \right|_{z_1}$  von  $y$  unabhängig, wenn  $2a^2 - (z_0 + z_1)^2 = 0$  ist.

Daraus folgt  $z_0 + z_1 = a \cdot \sqrt{2}$ . (9)

Abb. 5 zeigt den Verlauf von  $\frac{\partial H}{\partial z}$  in Abhängigkeit von  $y$ , bezogen auf den Wert bei  $y = 0$ . Die

Abbildung zeigt, dass bis  $y \approx \frac{2}{3}a$  die Feldinhomogenität nahezu konstant bleibt. Für eine Länge des Strahlenkastens von ca. 4/3 a ist also die Bedingung konstanter Inhomogenität weitgehend erfüllt.

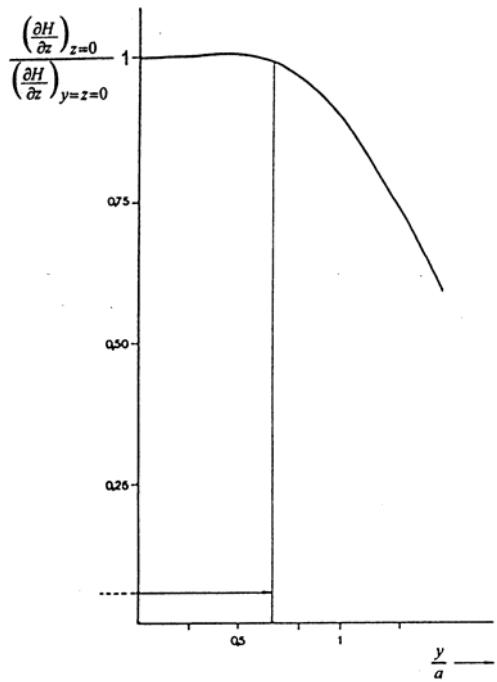


Abb. 5: Verhalten der Feldinhomogenität längs des Strahlenkastens

Eine Reihenentwicklung nach  $y^2$  liefert für  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{2a \cdot (z + z_0)}{a^2 + (z + z_0)^2} \cdot \left[ 1 + \frac{y^2 \cdot (5a^2 - 3 \cdot (z + z_0)^2)}{(a^2 + (z + z_0)^2)^2} \right].$$

Die Abhängigkeit von  $y$  verschwindet bei  $z = 0$  für

$$5a^2 - 3z_0^2 = 0.$$

Es folgt:  $z_0 = a \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = 1,29 \cdot a$  und

aus (9)  $z_1 = (\sqrt{2} - \sqrt{\frac{5}{3}}) \cdot a = 0,12 \cdot a \ll z_0$ .

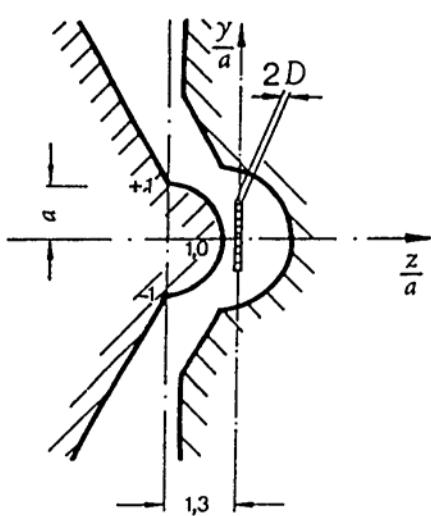


Abb. 6: Lage des Atomstrahlbündels

Nun ist nicht  $\frac{\partial H}{\partial z}$ , sondern nur  $H$  in der Umgebung der  $z$ -Achse messbar. Daher ist es notwendig, auch diejenige Ebene zu finden, für die der Ausdruck  $\left| \frac{\partial H}{\partial z} \right| \cdot \frac{a}{H} = \varepsilon$  in der Umgebung von  $y = 0$  eine von  $y$  unabhängige Größe ist, d. h. für die eine einfache Beziehung zwischen  $H$  und dem Gradienten von  $H$  besteht. In diese Ebene soll der Nullpunkt der  $z$ -Achse gelegt werden.

Die Ebene  $z = z_1$  liegt also in unmittelbarer Nähe von  $z = 0$ . Daher ist die Stern-Gerlach-Apparatur so justiert, dass der Strahlenkasten etwa um die Strecke  $1,3 \cdot a$  von den fiktiven Drähten des Zweidrahtfeldes entfernt liegt (Abb. 6). In dieser Ebene wurde auch die Kalibrierung des Magneten vorgenommen. Für  $z = 0$  errechnet sich der Wert von  $\varepsilon$  zu

$$\varepsilon(z=0) = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}}{1 + \frac{5}{3}} = 0,968. \text{ Die Berechnung}$$

des Feldgradienten erfolgt deshalb nach

$$\left| \frac{\partial H}{\partial z} \right| = 0,968 \cdot \frac{H}{a}$$

bzw.  $\left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| = 0,968 \cdot \frac{B}{a} . \quad (10)$

#### 4. Berechnung der Teilchenbahn

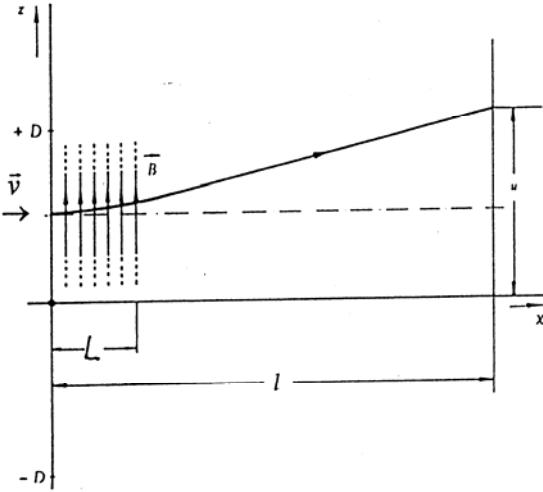


Abb. 7: Verlauf der Teilchenbahn zwischen dem Eintritt in den magnetischen Analysator und Detektor

Die Bahn der Kaliumatome zeigt Abb. 7. Die Atome sollen mit der Geschwindigkeit  $v$  in x-Richtung am Ort  $z$  in das Magnetfeld eintreten. Infolge der im inhomogenen Feld in z-Richtung wirkenden Kraft erhalten Kaliumatome der Masse  $M$  während des Durchlaufs des Magneten der Länge  $L$  (Zeitdauer  $\Delta t$ ) den Impuls

$$M \cdot v_z = F_z \cdot \Delta t = F_z \cdot \frac{L}{v} = -\frac{m\mu_B L}{v} \cdot \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (11)$$

Für den Auftreffort  $u$  ( $u$  bezeichnet die  $z$ -Koordinate des Auftreffortes in der Detektorebene, um die Unterscheidung zwischen Detektor- und Eintrittsebene zu erleichtern.) eines Kaliumatoms der Geschwindigkeit  $v$  ergibt sich dann

$$u = z + \frac{1}{2} v_z \Delta t + v_z \cdot (t - \Delta t) = z + \frac{1}{2} v_z \cdot \frac{L}{v} + v_z \cdot \left(\frac{l}{v} - \frac{L}{v}\right) = z + \frac{v_z}{v} \cdot \left(l - \frac{L}{2}\right).$$

Darin ist  $t$  die Flugzeit des Atoms vom Eintritt in den Magneten bis zum Detektor.

Da der Drehpunkt des Detektorarmes in der Magnetmitte liegt, ist es zweckmäßig, dessen Radius  $R$  in die Gleichung einzuführen, da  $R = l - \frac{L}{2}$  ist. Mit dem Wert für  $v_z$  aus (11) ergibt sich für die Ablenkung schließlich

$$u = z - \frac{L \cdot R}{M \cdot v^2} \cdot m\mu_B \cdot \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (12)$$

wobei  $u - z > 0$  für  $m = -1$   
und  $u - z < 0$  für  $m = +1$  ist.

#### 5. Geschwindigkeitsverteilung der Kaliumatome

Zur Erzeugung des Kalium-Atomstrahls wird ein Heizofen benutzt, der auf eine definierte Temperatur gebracht wird. Im Heizofen genügen die dort verdampften Kaliumatome der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung, d. h. die Anzahl der Atome mit einer Geschwindigkeit zwischen  $v$  und  $v + dv$  ist in jedem Volumenelement  $dV$  des Ofens

proportional zu  $e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv$ . Diese Proportionalität gilt auch dann, wenn man nur die Geschwindigkeitsrichtungen betrachtet, die innerhalb derjenigen Raumwinkel  $d\Omega$  liegen, welche bei  $x = 0$  durch nicht zu lange Streifen der Breite  $dz$  festgelegt sind.

Die aus einer Öffnung des Ofens austretenden Atome, die also zwischen  $z$  und  $z + dz$  mit einer Geschwindigkeit zwischen  $v$  und  $v + dv$  in das Magnetfeld hineinlaufen, genügen offenbar einer Verteilungsfunktion, in der  $v$  zur dritten Potenz auftritt (Abb. 8):

$$d^2 n = \frac{\Phi_m(z) \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} \cdot v^3 dv dz}{2 \int_0^\infty e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} \cdot v^3 dv} \quad (13)$$

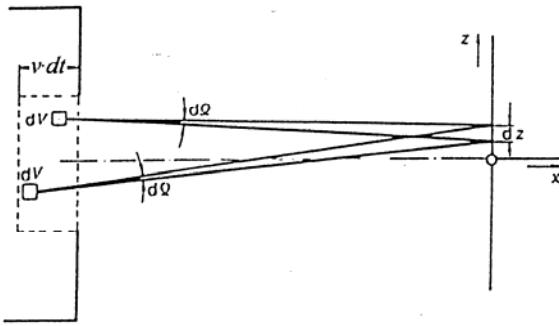


Abb. 8: Geometrische Verhältnisse zur Herleitung der von  $v$  und  $z$  abhängigen Verteilungsfunktion

Die Funktion  $\Phi_m(z)$  stellt das räumliche Teilchenzahlprofil für Teilchen der Orientierung  $m$  am Ort  $x = 0$  dar. Aus Symmetriegründen kann davon ausgegangen werden, dass beide Richtungsorientierungen gleich wahrscheinlich sind. Das Teilchenzahlprofil entsteht durch die Begrenzung des Atomstrahls mit einem geeigneten Blendensystem. Die Funktion  $\Phi_m(z)$  ist innerhalb einer rechteckigen Fläche der Breite  $2D$  (Strahlenkasten) von Null verschieden.

Aus der Verteilungsfunktion  $e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} \cdot v^3 \cdot dv$  ergibt sich für die wahrscheinlichste Geschwindigkeit  $v_w = \sqrt{\frac{3kT}{M}}$ . Unter der Annahme, dass die Maxima der gemessenen Verteilung dieser Geschwindigkeit zuzuordnen sind, ist eine näherungsweise Auswertung nach Gl. (12) möglich.

## 6. Teilchenstromdichte

Ziel der folgenden Rechnung ist es, ohne diese vereinfachte Annahme aus der von  $v$  und  $z$  abhängigen Verteilung die Teilchenstromdichte  $J$  in Abhängigkeit vom Ort  $u$  zu berechnen, weil diese dem Signal am Detektor proportional ist. Alle am Ort  $z$  in das Magnetfeld eintretenden Kaliumatome streuen wegen ihrer Geschwindigkeitsunterschiede  $dv$  am Ort  $u$  um  $du$ . Für gleiche Werte von  $z$  lässt sich für die Umsetzung von  $v$  auf  $u$  ansetzen:

$$v^3 \cdot dv = \frac{1}{4} \cdot \left| \frac{\partial v^4}{\partial u} \right| \cdot du. \quad (14)$$

Löst man Gleichung (12) für die Bahnablenkung in Abhängigkeit von  $v$  nach  $v^2$  (bzw.  $v^4$ ) auf, erhält man durch Einsetzen in (14) und Differenzieren:

$$v^3 dv = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{LR\mu_B \frac{\partial B}{\partial z}}{M} \right)^2 \cdot \frac{du}{|u - z|^3}. \quad (15)$$

Außerdem lässt sich aus (12) für den Exponenten der e-Funktion herleiten:

$$\frac{Mv^2}{2kT} = \frac{LR\mu_B \frac{\partial B}{\partial z}}{2kT \cdot |u - z|}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$q = \frac{LR\mu_B \frac{\partial B}{\partial z}}{2kT} \quad (16)$$

und

$$n_0 = \frac{LR\mu_B \frac{\partial B}{\partial z}}{4M^2 \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} \cdot v^3 dv},$$

dann erhält man durch Einsetzen in (13) die Verteilung

$$d^2n = n_0 \cdot \Phi_m(z) \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} \cdot \frac{du}{|u-z|^3} dz. \quad (17)$$

Nun ist über  $z$  zu integrieren und über die zwei möglichen Orientierungen zu summieren, um die Teilchenstromdichte am Ort  $u$  zu erhalten:

$$J = \frac{\sum_{m=-D}^{+D} \int d^2n}{du} = n_0 \cdot \int_{-D}^{+D} \Phi_{+1}(z) \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} \cdot \frac{dz}{|u-z|^3} + n_0 \cdot \int_{-D}^{+D} \Phi_{-1}(z) \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} \cdot \frac{dz}{|u-z|^3}.$$

$u-z < 0 \qquad u-z > 0$

Wegen der Gleichwertigkeit der Teilchenprofile für die zwei Orientierungen ist

$$\Phi_{+1}(z) \equiv \Phi_{-1}(z) \equiv J_0(z)$$

$$\text{und daher} \quad J(u) = n_0 \cdot \int_{-D}^{+D} J_0(z) \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} \cdot \frac{dz}{|u-z|^3}. \quad (18)$$

## 7. Infinitesimaler Strahlquerschnitt

Der Verlauf der Teilchenstromdichte  $J(u)$  hängt u. a. davon ab, wie  $J_0(z)$  ausgebildet ist. Als einfachste Näherung kann man von einem beliebig schmalen Strahlenkasten ausgehen:

$$J_0^{(0)}(z) = 2D \cdot J_0 \cdot \delta(z), \quad (19)$$

wobei  $\delta(z)$  die Dirac-Funktion ist.

$$\text{Dann ist} \quad J^{(0)}(u) = 2Dn_0 J_0 \cdot \int_{-D}^{+D} \delta(z) \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} \cdot \frac{dz}{|u-z|^3},$$

$$\text{also} \quad J^{(0)}(u) = 2Dn_0 J_0 \cdot \frac{e^{-\frac{q}{|u|}}}{|u|^3}. \quad (20)$$

Die Lage der Maxima der Teilchenstromdichte  $u_e^{(0)}$  findet man durch Differenzieren nach  $u$  und Nullsetzen. Der Abstand der beiden Maxima beträgt  $2u_e$ .

$$\frac{dJ^{(0)}(u)}{du} = 2Dn_0 J_0 \cdot \frac{q - 3|u|}{|u|^5} \cdot e^{-\frac{q}{|u|}}.$$

Aus  $\frac{dJ^{(0)}}{du}(u_e^{(0)}) = 0$  erhält man eine Bestimmungsgleichung für  $u_e^{(0)}$  :

$$u_e^{(0)} = \pm \frac{1}{3}q = \pm \frac{LR\mu_B \frac{\partial B}{\partial z}}{6kT} \quad (21)$$

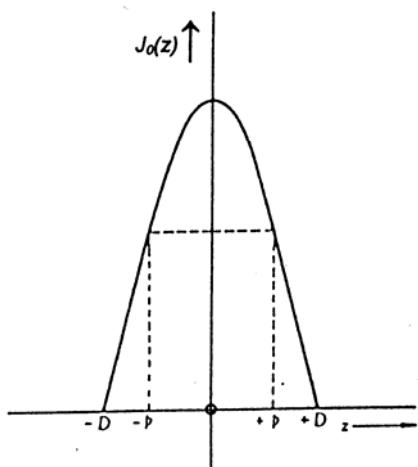
Die Abstände der Maxima von der x-Achse nehmen also in diesem Fall proportional mit der Feldinhomogenität zu.

## 8. Realer Strahlquerschnitt

Eine bessere Anpassung der Rechnung an das Experiment erreicht man dadurch, dass die Breite  $2D$  des Strahlenkastens als endlich angesehen und das Profil durch zwei steile gerade Flanken und einen parabelförmigen Scheitel beschrieben wird (Abb. 9):

$$\begin{aligned} J_0(z) &= j_0 \cdot (D + z) && \text{für } -D \leq z \leq -p \\ J_0(z) &= j_0 \cdot \left( D - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2} \frac{z^2}{p} \right) && \text{für } -p \leq z \leq +p \\ J_0(z) &= j_0 \cdot (D - z) && \text{für } +p \leq z \leq +D \end{aligned} \quad (22)$$

Dieser Ansatz ist nun in Gl. (18) einzusetzen. Die Parameter  $p$  und  $D$  werden aus der Messung der Teilchenstromdichte ohne Magnetfeld ermittelt.



Die sich mit diesem Ansatz ergebende Teilchenstromdichte  $J(u)$  nimmt in Abhängigkeit von der Inhomogenität des Magnetfeldes und damit von  $q$  Maxima an Orten  $u_e(q)$  an, die sich mehr oder weniger von denjenigen Orten  $u_e^{(0)} = \pm q/3$  unterscheiden, die sich aus der Näherung des infinitesimal schmalen Strahlenkastens ergeben. Zur Bestimmung der Funktion  $u_e(q)$  ist von der Bedingung  $\frac{dJ}{du}(u_e) = 0$  auszugehen. (23)

Abb. 9: Mathematischer Ansatz für die Teilchenstromdichte  $J_0(z)$

Bei der Berechnung von  $\frac{dJ}{du}$  kann die Differentiation nach  $u$  in das Integral hineingezogen werden, da der von  $u$  abhängige Ausdruck in der folgenden Gleichung im gesamten Integrationsgebiet stetig partiell nach  $u$  differenzierbar ist:

$$\frac{dJ}{du} = \frac{d}{du} \cdot n_0 \cdot \int_{-D}^{+D} dz \cdot J_0(z) \cdot \frac{e^{-\frac{q}{|u-z|}}}{|u-z|^3} = n_0 \cdot \int_{-D}^{+D} dz \cdot J_0(z) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \frac{e^{-\frac{q}{|u-z|}}}{|u-z|^3} .$$

Am Integrand ändert sich nur das Vorzeichen, wenn man  $\frac{\partial}{\partial u}$  durch  $-\frac{\partial}{\partial z}$  ersetzt.

Dieses Integral lässt sich durch partielle Integration lösen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial u} &= -n_0 \cdot \int_{-D}^{+D} dz \cdot J_0(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-\frac{q}{|u-z|}}}{|u-z|^3} \\ &= -n_0 \cdot J_0(z) \cdot \left. \frac{e^{-\frac{q}{|u-z|}}}{|u-z|^3} \right|_{-D}^{+D} + n_0 \cdot \int_{-D}^{+D} dz \cdot \frac{dJ_0(z)}{dz} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{|u-z|}}}{|u-z|^3} \cdot dz .\end{aligned}\quad (24)$$

Der erste Summand in (24) ist Null, da  $J_0(z)$  sowohl bei  $+D$  als auch bei  $-D$  Null ist. Der zweite Summand ist nun für die Intervalle  $[-D, -p]$ ,  $[-p, +p]$  und  $[+p, +D]$  getrennt zu berechnen. Im Intervall  $[-p, +p]$ , in dem  $\frac{dJ_0}{dz} = -j_0 \cdot \frac{z}{p}$ , also von  $z$  abhängig ist, ist eine

Aufteilung des Integranden nach dem Prinzip  $-z = -u + (u - z)$  nützlich, um die Integration zu erleichtern. Es ergibt sich also:

$$\frac{dJ}{du} = n_0 \cdot j_0 \cdot \left\{ \int_{-D}^{-p} dz - \frac{u}{p} \cdot \int_{-p}^{+p} dz - \int_{+p}^{+D} dz \right\} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{|u-z|}}}{|u-z|^3} + n_0 \cdot j_0 \cdot \frac{1}{p} \cdot \int_{-p}^{+p} dz \cdot \frac{u-z}{|u-z|^3} \cdot e^{-\frac{q}{|u-z|}} .\quad (25)$$

Diese Integrale sind geschlossen lösbar. Es ergibt sich:

$$\frac{dJ}{du} = \frac{n_0 \cdot j_0}{p \cdot q^2} \cdot F(u) \quad (26)$$

mit der Lösungsfunktion

$$F(u) = -|u+p| \cdot e^{-\frac{q}{|u+p|}} + |u-p| \cdot e^{-\frac{q}{|u-p|}} + p \cdot \frac{q+|u+D|}{u+D} \cdot e^{-\frac{q}{|u+D|}} + p \cdot \frac{q+|u-D|}{u-D} \cdot e^{-\frac{q}{|u-D|}} .\quad (27)$$

Daraus folgt unmittelbar die gesuchte Bestimmungsgleichung  $F(u_e) = 0$  für die Lage der Teilchenstrommaxima.

Wegen der Zentralsymmetrie des Problems beschränken wir uns auf positive Werte der Lösungskurve  $u_e(q)$ .

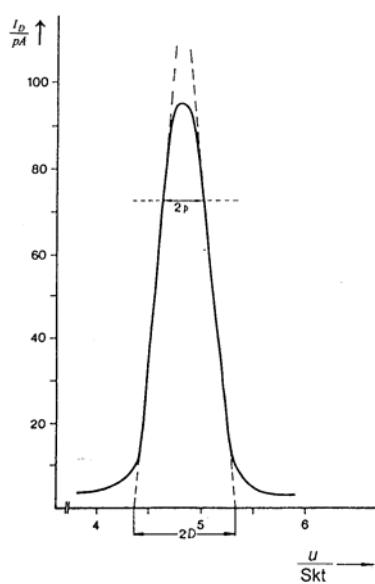


Abb. 10: Ionisationsstrom bei verschwindendem Magnetfeld

Wie bereits erwähnt werden die Parameter  $p$  und  $D$  aus der Messung der Teilchenstromdichte ohne Magnetfeld ermittelt, wie an einer typischen Messkurve in Abb. 10 gezeigt wird. Dazu ist es nicht unbedingt notwendig, die Messkurve durch entsprechende Funktionen zu fitten, sondern eine grafische Darstellung ist ausreichend. Der ermittelte Wert  $2D$  entspricht der unter der Annahme eines parallelen Atomstrahls anzusetzenden Breite des Strahlenkastens.

Die wahre Breite ist wegen der unvermeidbaren geringen Divergenz des Atomstrahlbündels geringer. Dieser Einfluss bleibt unberücksichtigt.

Für ein spezielles Beispiel ( $p = 0,36 \text{ mm}$ ,  $D = 0,86 \text{ mm}$ ) zeigt Abb. 11 den Verlauf der Lösungsfunktion in Abhängigkeit von verschiedenen Werten des Parameters  $q$ . Die Schnittpunkte der Kurven mit der  $u$ -Achse liefern die gesuchten Werte für die Abhängigkeit zwischen  $u_e$  und  $q$ . Die berechneten Werte von  $u_e$  sind in Abb. 12 als Funktion von  $q$  dargestellt.

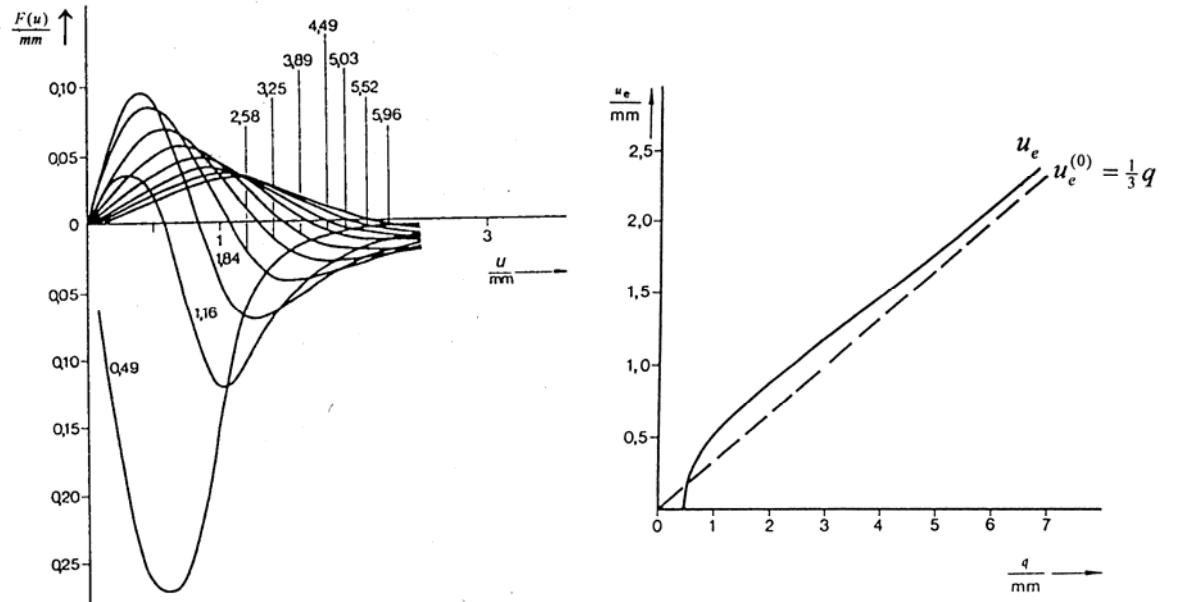


Abb. 11: Lösungsfunktion  $F(u)$  für verschiedene Werte des Parameters  $q$  (in mm)

Abb. 12: Lage der Nullstellen der Lösungsfunktion  $F(u)$  in Abhängigkeit vom Parameter  $q$

## 9. Berechnung des asymptotischen Verhaltens für große Felder

Aus Abb. 12 ist zu erkennen, dass sich für große Felder eine nahezu lineare Abhängigkeit zwischen  $u_e$  und  $q$  ergibt. Deshalb soll für diesen Bereich ein mathematischer Zusammenhang zwischen den beiden genannten Größen gesucht werden. Für große Felder kann angenommen werden:

$$\frac{p}{u_e}, \frac{p}{q}, \frac{D}{u_e}, \frac{D}{q} < 1 . \quad (28)$$

Daher wird eine Taylorreihen-Entwicklung der 4 Terme in Gleichung (27) nach Potenzen von  $p$  bzw.  $D$  vorgenommen. Da die in (28) auftretenden Größen nicht klein gegen 1 sind, kann die Reihe nicht nach dem ersten von Null verschiedenen Glied abgebrochen werden. Da sich die meisten Koeffizienten der 4 Funktionen gegenseitig aufheben, muss die Entwicklung bis zur fünften Ableitung erfolgen.

Es bleiben dann nur die Terme der dritten und fünften Ableitung übrig:

$$F(u) = p \cdot \left(D^2 - \frac{1}{3} \cdot p^2\right) \cdot f^{(3)}(u) + \frac{p}{12} \cdot \left(D^4 - \frac{1}{5} \cdot p^4\right) \cdot f^{(5)}(u), \quad (29)$$

wobei  $f^{(3)}(u) = \frac{q^2}{u^4} \cdot \left(\frac{q}{u} - 3\right) \cdot e^{-\frac{q}{u}}$

und  $f^{(5)}(u) = \frac{12q^2}{u^6} \cdot \left[\frac{q^2}{12u^2} \cdot \left(\frac{q}{u} - 15\right) + 5 \cdot \left(\frac{q}{u} - 1\right)\right] \cdot e^{-\frac{q}{u}}$

die dritte bzw. fünfte Ableitung der Funktion  $f(u) = u \cdot e^{-\frac{q}{u}}$  sind.

Um die Nullstellen  $u_e$  zu finden, wird (29) gleich Null gesetzt. Damit ergibt sich die gesuchte Bestimmungsgleichung für  $u_e$ :

$$0 = \left(D^2 - \frac{1}{3} p^2\right) \cdot \left(\frac{q}{u_e} - 3\right) + \frac{D^4 - \frac{1}{5} p^4}{u_e^2} \cdot \left[\frac{q^2}{12u_e^2} \cdot \left(\frac{q}{u_e} - 15\right) + 5 \cdot \left(\frac{q}{u_e} - 1\right)\right]. \quad (30)$$

Der erste Summand von (30) liefert die bekannte Lösung  $u_e^{(0)} = q/3$ , wenn der zweite Summand vernachlässigt wird. Wenn man dies nicht tut, ist es zulässig, im rechten Summanden  $u_e$  durch  $u_e^{(0)}$  zu ersetzen, weil die damit verbundene Abweichung noch höherer Ordnung ist. Die eckige Klammer wird dann gleich Eins, und man erhält:

$$0 = \left(D^2 - \frac{1}{3} p^2\right) \cdot \left(\frac{q}{u_e} - 3\right) + \frac{D^4 - \frac{1}{5} p^4}{u_e^2}. \quad (31)$$

Aus (31) folgt die gesuchte Beziehung zwischen  $q$  und  $u_e$ :

$$q = 3 \cdot u_e - \frac{D^4 - \frac{1}{5} p^4}{D^2 - \frac{1}{3} p^2} \cdot \frac{1}{u_e}. \quad (32)$$

als Näherung für genügend große inhomogene Felder. Der Koeffizient von  $\frac{1}{u_e}$  wird mit

$$C = \frac{D^4 - \frac{1}{5} p^4}{D^2 - \frac{1}{3} p^2} \quad (33)$$

abgekürzt und als Strahlparameter bezeichnet. Gl. (32) lässt sich damit einfach schreiben als

$$q = 3 \cdot u_e - \frac{C}{u_e}. \quad (34)$$

Zur Auswertung der Messungen werden zunächst aus den Kurven Detektorstrom  $I_D$  als Funktion des Detektorortes  $u$  die zu verschiedenen Feldinhomogenitäten gehörenden Werte  $u_e$  ermittelt. Da  $q$  nach Gleichung (16) proportional zu  $\frac{\partial B}{\partial z}$  ist, ist es zur Auswertung sinnvoll, eine grafische Darstellung von  $q = 3 \cdot u_e - \frac{C}{u_e}$  als Funktion von  $\frac{\partial B}{\partial z}$  anzufertigen. Ein Beispiel für eine solche Darstellung zeigt Abb. 13.

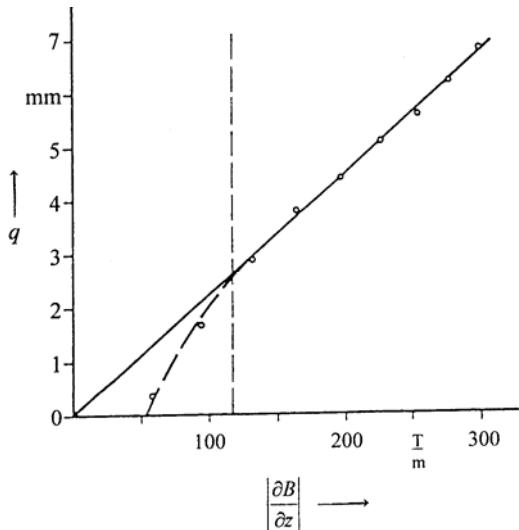


Abb. 13: Parameter  $q$  nach (34) in Abhängigkeit von der Feldinhomogenität

Für große Inhomogenitäten des Feldes zeigt diese Kurve den erwarteten linearen Verlauf (etwa rechts der gestrichelten Geraden). Die Regressionsgerade für große Felder kann dann durch den Potenzansatz

$$q = A \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \quad (35)$$

beschrieben werden. Nach Gleichung (16) kann schließlich das Bohrsche Magneton berechnet werden aus:

$$\mu_B = \frac{2 \cdot k \cdot T}{L \cdot R} \cdot A. \quad (36)$$

## 10. Zusammenfassung

Der aus dem Ofen austretende Kaliumatomstrahl wird durch ein Blendensystem so geformt, dass die Atome in x-Richtung in den magnetischen Analysator eintreten. Dessen Polschuhe besitzen eine Gestalt, die ein Zweidrahtfeld erzeugt, das im Bereich des Atomstrahls eine annähernd konstante Feldinhomogenität besitzt. Dadurch wirkt auf die Atome infolge ihres Spins eine konstante Kraft in z-Richtung, und es ergibt sich eine Bahnkurve nach Gl. (12). Wegen der zwei möglichen Einstellungen des magnetischen Moments der Atome weist die Verteilungskurve in der Detektorebene bei hinreichend großer Feldinhomogenität zwei Maxima auf. Unter der Annahme, dass diese Maxima den Atomen mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit zuzuordnen ist, kann eine erste näherungsweise Auswertung erfolgen.

Lässt man diese Annahme fallen und setzt zunächst einen infinitesimal schmalen Strahlquerschnitt voraus, liefert die entsprechende Rechnung für den Zusammenhang zwischen der Position der Maxima  $u_e$  und dem Parameter  $q$ , der nach Gl. (16) mit dem Bohrschen Magneton verknüpft ist, die Beziehung:  $3 u_e = \pm q$ .

Weiter verbessert wird die Näherung durch die Approximation des Strahlquerschnitts mit endlicher Breite nach Abb. 9 und Gl. (22), wobei die Größen  $p$  und  $D$  aus der Messung der Teilchenstromdichte ohne Magnetfeld bestimmt werden. Unter dieser Annahme ergibt sich für genügend große inhomogene Felder ein linearer Zusammenhang zwischen der Feldinhomogenität und der Größe  $q = 3 \cdot u_e - \frac{C}{u_e}$ . Darin ist  $C$  ein von  $p$  und  $D$  nach Gl. (33)

abhängiger Strahlparameter. Aus einer grafischen Darstellung von  $q = 3 \cdot u_e - \frac{C}{u_e}$  über  $\frac{\partial B}{\partial z}$  lässt sich also durch lineare Regression nach den Gleichungen (35) und (36) das Bohrsche Magneton berechnen.

Literatur: Fa. PHYWE, Beschreibung der Stern-Gerlach-Apparatur